Proyecto MaTEX

Integral Definida

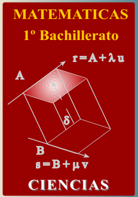
Fco Javier González Ortiz

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTEX

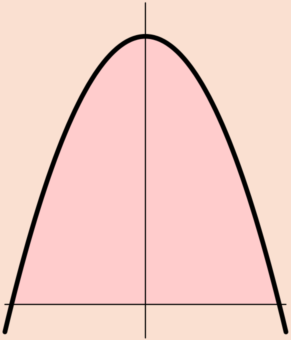
INTEGRAL DEFINIDA

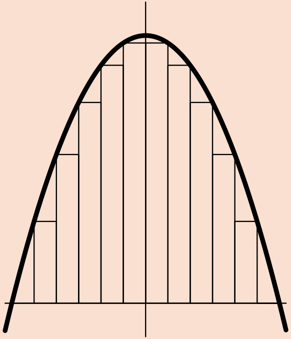
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Tabla de Contenido

1. Integral Definida

El problema planteado es hallar el área de la región que encierra la curva del gráfico con la recta horizontal. Una idea sencilla consiste en dividir la región en rectángulos verticales y de esta forma «llenar» la región con numerosos rectángulos.
De esta manera el área de la región se puede aproximar, cuanto queramos, mediante la suma de las áreas de n rectángulos, tomando todos con la misma base $\Delta\, x$.
Teniendo en cuenta que el área de cada rectángulo se obtiene multiplicando la base por la altura, tenemos que el área de cada rectángulo será la base $\Delta\, x$ por su altura respectiva $f(x_i)$.
A la suma de las áreas de los rectángulos se les llama sumas de Riemann.





A la primera de ellas se le llama suma inferior S_{Inf}:

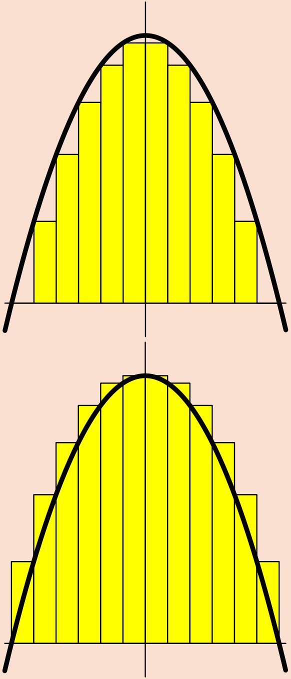
$$S_{Inf} = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta\, x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$
$$\Longrightarrow \qquad S_{Inf} \leq \text{Área}$$

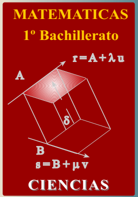
A la segunda de ellas se le llama suma superior S_{Sup}:

$$S_{Sup} = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta\, x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$
$$\Longrightarrow \qquad S_{Sup} \geq \text{Área}$$

Se tiene así que

$$\boxed{S_{Inf} \leq \text{Área} \leq S_{Sup}}$$





A medida que aumentamos el número de rectángulos n, $(n \to \infty)$ con $\Delta x \to 0$, el área buscada se podrá hallar con

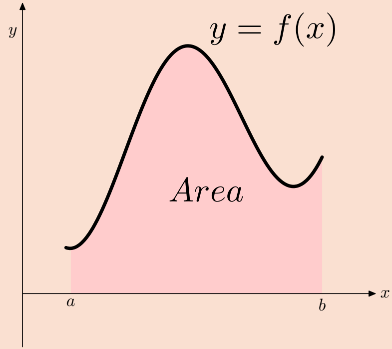
$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \tag{1}$$

El símbolo $\sum$ de sumatorio se convirtió en una “s” estilizada $\int$, quedando la expresión anterior con la notación

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Definimos Integral Definida de $f(x)$ entre a y b, al área de la región limitada por la función $f(x)$ entre los puntos a y b y el eje OX. Dicho área lo representaremos con el símbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



Si bien las áreas que determina las funciones se pueden calcular con el método comentado anteriormente, afortunadamente aquí no realizaremos límites de sumas de áreas de rectángulos como muestra la ecuación (1). Ello se debe a un resultado conocido como teorema fundamental del cálculo

2. Teorema Fundamental del Cálculo

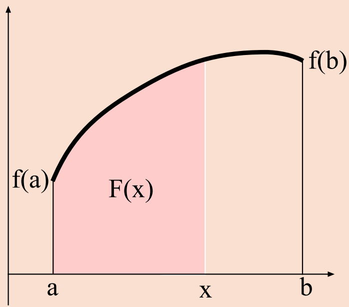
Teorema 2.1. (Teorema Fundamental del Cálculo) Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $I = [a, b]$. Entonces la función

$$\boxed{\begin{array}{c} F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\, dx \text{ es derivable} \\ F'(x) = f(x) \quad x \in (a, b) \end{array}} \tag{2}$$

El teorema demuestra que la función integral que da las áreas entre a y x para cada valor de x

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx$$

es una función cuya derivada es la función $f(x)$.



$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ representa un número y $\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ representa una función de x.

Es importante recalcar que $\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ es una función de x. Como los son

$$\int_a^x f(s)\,ds = \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(w)\,dw$$

A $f(s), f(t)$ y $f(w)$ se les llama el integrando y las variables s, t o w son las variables auxiliares de integración.

Realiza el siguiente test para ver si se ha comprendido

Test. Sea la expresión $I = \displaystyle\int_2^3 a\,s^2\,ds$, responder a:

1. El significado de I es

(a) Integral Definida (b) Integral Indefinida

2. El significado de I es

(a) Un número (b) una función

3. El integrando de I es

(a) $a\,s^2\,ds$ (b) s^2 (c) $a\,s^2$

4. La variable de integración es

(a) a (b) ds (c) s

Test. Sea la expresión $I = \int_2^x (a + t^2)\, dt$, responder a:

1. El significado de I es

(a) Integral Definida (b) Integral Indefinida

2. El significado de I es

(a) Un número (b) una función

3. I es función de

(a) a (b) x (c) t

4. El integrando de I es

(a) $(a + t^2)\, dt$ (b) t^2 (c) $(a + t^2)$

5. La variable de integración es

(a) a (b) x (c) t

6. La derivada de I es

(a) $a + x^2$ (b) $a + t^2$ (c) $(a + t^2)\, dt$

Test. La derivada de la función $F(x) = \int (1 + x^2) dx$ es

(a) $1 + x^2$ (b) 0

2.1. Regla de Barrow

Teorema 2.2. (Regla de Barrow) Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $I = [a, b]$ y $G(x)$ una primitiva de $f(x)$ Entonces la integral definida

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)} \tag{3}$$

Observaciones:

1. La importancia de esta regla es fundamental, ya que pone en relación el cálculo de áreas con el cálculo de primitivas.
2. Para hallar la integral definida seguiremos el siguiente proceso:
   a) Se halla una primitiva cualquiera de la función,
   b) Se sustituyen en esta primitiva los límites de integración -el superior y el inferior- y se restan los resultados.

Ejemplo 2.1. Hallar la integral definida $\displaystyle\int_0^\pi \cos x\,dx$

Solución: Hallamos una primitiva $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$ luego

$$\int_0^\pi \cos x\,dx = [\operatorname{sen} x]_0^\pi = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0$$

□

Ejemplo 2.2. Hallar la integral definida $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

Solución: Hallamos una primitiva $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{3}\,x^3$ luego

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}\,x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,(1)^3 - \frac{1}{3}\,(0)^3 = \frac{1}{3}$$

$\square$

Ejemplo 2.3. Calcular $\displaystyle\int_{-3}^{3} |x+2|\,dx$

Solución: Como $|x+2| = \begin{cases} -x-2 & x \leq -2 \\ x+2 & -2 < x \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3} |x+2|\,dx &= \int_{-3}^{-2} (-x-2)\,dx + \int_{-2}^{3} (x+2)\,dx + \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{3} \\
&= \left[(-2+4) - (-\frac{9}{2}+6)\right] + \left[(\frac{9}{2}+6) - (2-4)\right] \\
&= \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{25}{2}\right] = 13
\end{aligned}$$

$\square$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 1. Hallar la integral definida $\int_0^1 (1+x^2)\,dx$

3. Aplicación. Cálculo de áreas

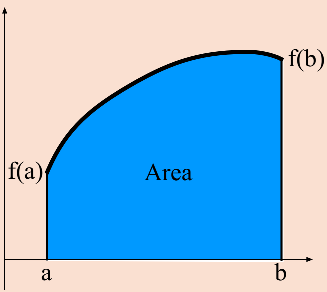
Para determinar el área bajo f distinguimos el signo de $f(x)$

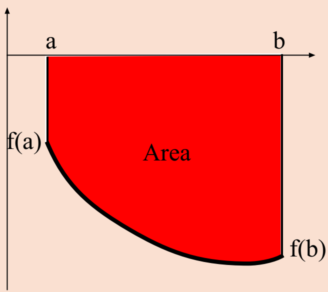
- Si $f(x) > 0 \quad x \in [a,b]$, entonces la integral definida es positiva

$$\text{Area del recinto} = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Si $f(x) < 0 \quad x \in [a,b]$, entonces la integral definida es negativa

$$\text{Area del recinto} = -\int_a^b f(x)\,dx$$





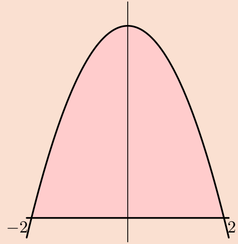
Ejemplo 3.1. Hallar el área limitada por $y = 4 - x^2$ y el eje OX.

Solución: La función $y = 4 - x^2$ corta al eje Ox en ± 2.

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[4(2) - \frac{1}{3}2^3\right] - \left[4(-2) - \frac{1}{3}(-2)^3\right]$$

$$= \boxed{\frac{32}{3}}$$



□

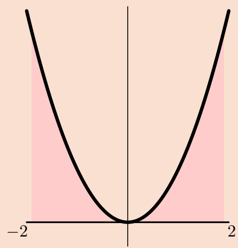
Ejemplo 3.2. Hallar el área limitada por $y = x^2$,$x = -2$, $x = 2$ y el eje OX.

Solución: La función $y = x^2$ corta al eje Ox en 0.

$$A = \int_{-2}^{2} (x^2)\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[\frac{1}{3}2^3\right] - \left[\frac{1}{3}(-2)^3\right]$$

$$= \boxed{\frac{16}{3}}$$



□

3.1. Area del recinto para una función

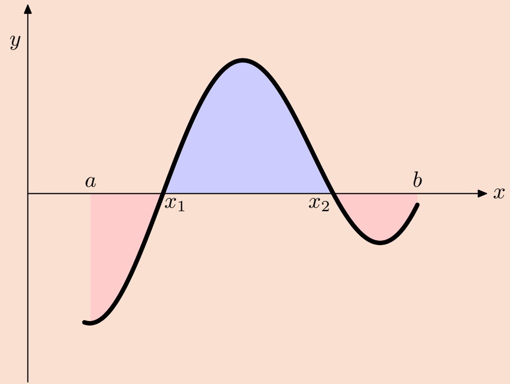
Para determinar el área de un recinto limitado por una función $f(x)$ y el eje OX entre los puntos a y b necesitamos saber si la función cambia de signo, hallando los cortes con el eje OX.
Después, se hallan las integrales definidas por separado en cada intervalo tomando sus valores en valor absoluto.
El área pedido será la suma de todas las áreas de cada uno de los recintos.

$$A_1 = \left| \int_a^{x_1} f(x)\,dx \right|$$

$$A_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

$$A_3 = \left| \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx \right|$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$



$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x)\,dx \right| + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \left| \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx \right|$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 3.3. Hallar el área delimitada por la gráfica de $\cos x$, el eje OX en el intervalo $[0, 2\pi]$

Solución:

La función $\cos x$ corta al eje Ox en $\dfrac{\pi}{2}$ y $\dfrac{3\pi}{2}$.

Teniendo en cuenta los cambios de signo

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx + \left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x\, dx \right| + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x\, dx$$

luego

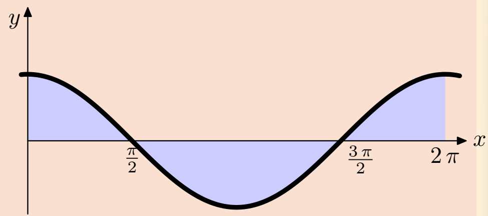
$$A_1 = \Big[\operatorname{sen} x \Big]_0^{\pi/2} = 1$$

$$A_2 = \left| \Big[\operatorname{sen} x \Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} \right| = 2$$

$$A_3 = \Big[\operatorname{sen} x \Big]_{3\pi/2}^{2\pi} = 1$$

Luego

$$\boxed{Area = 4}$$



□

◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

3.2. Para dos funciones positivas sin corte

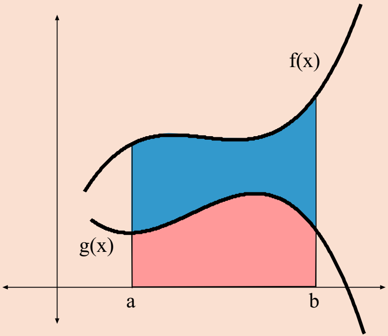
Para determinar el área de un recinto limitado por dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ positivas sin corte entre los puntos a y b, como en la figura, teniendo en cuenta que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{azul} + \text{rosa} \qquad \int_a^b g(x)\,dx = \text{rosa}$$

el área del recinto comprendido entre ambas funciones se obtiene restando ambas integrales,

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

resultando la sencilla expresión



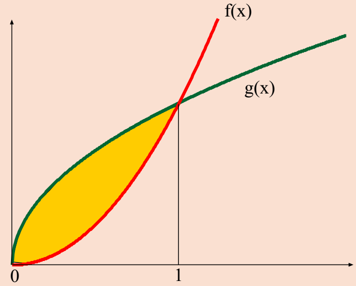
$$\boxed{A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx} \tag{4}$$

Ejemplo 3.4. Hallar el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

Solución: Hallamos la intersección de ambas

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = x^2 \\ g(x) = \sqrt{x} \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2 = \sqrt{x} \Longrightarrow x = 0, 1$$

$$A = \int_0^1 (g(x) - f(x))\ dx$$



$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\ dx \\ &= \left[\frac{2}{3}\,x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \end{aligned}$$

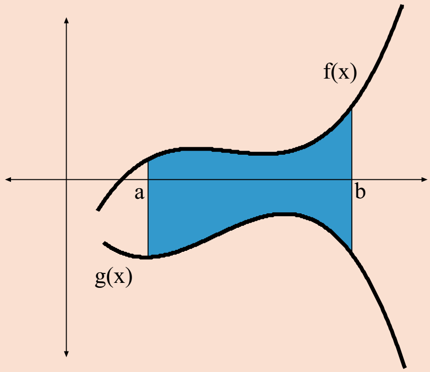
$$\boxed{Area = \frac{1}{3}}$$

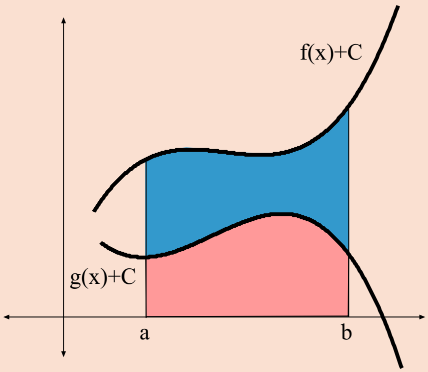
□

3.3. Para dos funciones cualesquiera sin corte

Para determinar el área de un recinto limitado por dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ entre los puntos a y b pudiendo ser alguna o ambas negativas se aplica la misma expresión que para dos funciones positivas, ya que bastaría desplazar las funciones $f(x)+C$ y $g(x)+C$ como se muestra en el gráfico de la derecha

$$A = \int_a^b (f(x)+C-(g(x)+C))\ dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\ dx$$





3.4. Para dos funciones que se cortan

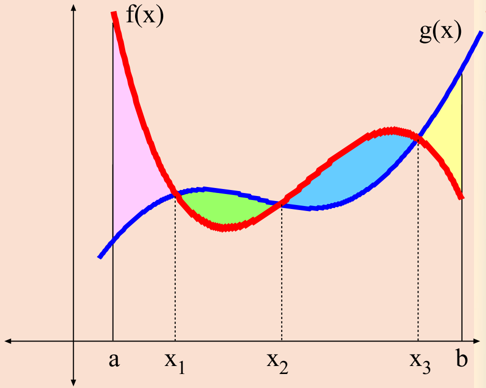
Para determinar el área de un recinto limitado por dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ entre los puntos a y b necesitamos saber los puntos de corte entre ellas. Se hallan las integrales definidas por separado en valor absoluto y se suman todas las áreas.

$$A_1 = \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x))\, dx \right|$$

$$A_2 = \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\, dx \right|$$

$$A_3 = \left| \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - g(x))\, dx \right|$$

$$A_4 = \left| \int_{x_3}^{b} (f(x) - g(x))\, dx \right|$$



$$A = A_1 + A_2 + A_2 + A_4$$

Ejercicio 2. Hallar el área delimitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.

Ejercicio 3. Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = x^2 + x$ e $y = x + 2$.

Ejercicio 4. Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones e $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ y $g(x) = -x^2 + 1$.

Ejercicio 5. Hallar el área delimitada por la curva $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$ y las rectas $x = -1$, $x = 1$, y $y = 1/2$.

Ejercicio 6. Dada la curva $y = x^2 + 2x + 2$, halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y recta la tangente a la curva de pendiente 6.

Ejercicio 7. Calcula el área de la región comprendida entre las funciones $y = 2 - x^2$ e $y = |x|$.

Ejercicio 8. Hallar el área limitada por $y = -x^2 + 4\,x + 5$ con al recta $y = 5$.

Ejercicio 9. Hallar el área limitada por $y = x^2 - 2\,x$ con al recta $y = x$.

Ejercicio 10. La curva $y = a[1 - (x - 2)^2]$, con $a > 0$, limita con el eje de abscisas un recinto de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a.

Ejercicio 11. Dada la función $f(x) = a\,e^{x/3} + \dfrac{1}{x^2}$, con $x \neq 0$,

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

a) Calcular $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ en función de a

b) Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ hallar a sabiendo que $F(1) = 0$ y $F(2) = \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 12. De todas las primitivas de la función $f(x) = 1 + x\,|x|$, determina aquella cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Hallamos una primitiva

$$\int (1+x^2)\, dx = x + \frac{1}{3}\, x^3$$

luego

$$\int_0^1 (1+x^2)\, dx = \left[x + \frac{1}{3}\, x^3 \right]_0^1 = \left(1 + \frac{1}{3}\,(1)^3 \right) - \left(0 + \frac{1}{3}\,(0)^3 \right) = \frac{4}{3}$$

Ejercicio 1

Ejercicio 2. Sea $y = x^3 - 6x^2 + 8x$, hallamos los puntos de corte con el eje OX

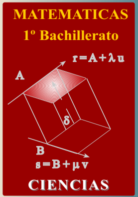
$$y = x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Longrightarrow x = 0, 2, 4$$

una primitiva,

$$F(x) = \int (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^2 f(x)\, dx \right| &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 = |4| \\
\left| \int_2^4 f(x)\, dx \right| &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 = |-4| \\
&= \text{Area del recinto} = \mathbf{8}
\end{aligned}$$

Ejercicio 2



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 3. Sean $y = x^2 + x$ e $y = x + 2$, hallamos los puntos de corte entre ambas

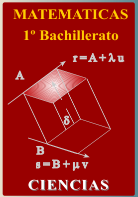
$$\left. \begin{array}{c} y = x^2 + x \\ y = x + 2 \end{array} \right\} \Longrightarrow x^2 + x = x + 2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

una primitiva de $f - g$,

$$F(x) = \int [(x^2 + x) - (x + 2)]\, dx = \int (x^2 - 2)]\, dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x) - g(x)\, dx \right| &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = |-\frac{4}{3}\sqrt{2}| \\ &= \text{Area del recinto} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 3



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 4. Sean $y = -x^2 + 1$ e $y = x^4 - 2x^2 + 1$, hallamos los puntos de corte entre ambas

$$\left.\begin{array}{r} y = -x^2 + 1 \\ y = x^4 - 2x^2 + 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow -x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 \Longrightarrow x = 0, \pm 1$$

una primitiva de $f(x) - g(x) = x^4 - 2x^2 + 1 - (-x^2 + 1) = x^4 - x^2$,

$$F(x) = \int (x^4 - x^2)\, dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$$

$$\begin{aligned} \left|\int_{-1}^{0} f(x) - g(x)\, dx\right| &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} &= |-\frac{2}{15}| \\ \left|\int_{0}^{1} f(x) - g(x)\, dx\right| &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1} &= |-\frac{2}{15}| \\ &= \text{Area del recinto} &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

Ejercicio 4

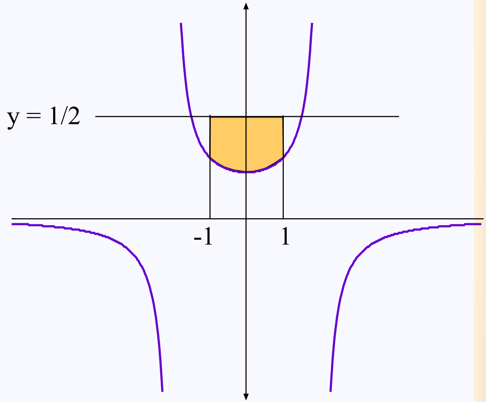
Ejercicio 5. Sean $f(x) = 1/2$ e $g(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$,

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4-x^2}$$

$$F(x) = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{4-x^2})\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln\frac{2-x}{2+x}$$

$$\text{Área} = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln\frac{2-x}{2+x}\right]_{-1}^{1}$$

$$= |1 + \frac{1}{2}\ln 3|$$



Ejercicio 5

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 6. Sea $y = x^2 + 2x + 2$

- Recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo. Como $y' = 2x + 2$, $y' = 0 \Longrightarrow x = -1$, el punto $(-1, 1)$ es un mínimo. La ecuación de su tangente es
$$y_1 = 1$$
- Recta la tangente a la curva de pendiente 6. Como $y' = 2x + 2$, $y' = 6 \Longrightarrow 2x + 2 = 6 \Longrightarrow x = 2$, el punto es $(2, 10)$ y la tangente es
$$y_2 - 10 = 6(x - 2) \Longrightarrow y_2 = 6x - 2$$

Las tangentes se cortan en
$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= 6x - 2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 6x - 2 = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Area bajo la parábola:
$$\int_{-1}^{2} (x^2 + 2x + 2)\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} = 12$$

Area pedida es el recinto azul, igual al área bajo la parábola menos el rectángulo marrón y el trapecio rosa.

Doc Doc
Volver Cerrar

Area del rectángulo marrón

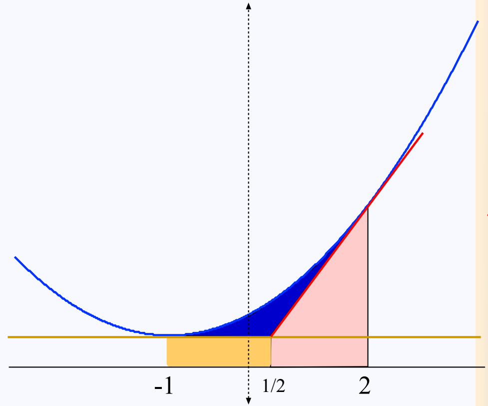
$$\int_{-1}^{1/2} 1\,dx = \frac{3}{2}$$

Area del trapecio rosa

$$\int_{1/2}^{2} (6x-2)\,dx = \frac{33}{4}$$

Recinto azul

$$12 - \left(\frac{3}{2} + \frac{33}{4}\right) = \boxed{\frac{9}{4}}$$



Ejercicio 6

Ejercicio 7. Sean $y = 2 - x^2$ e $y = |x|$, hallamos los puntos de corte entre ambas

$$\left.\begin{array}{c} y = 2 - x^2 \\ y = |x| \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{ll} (x<0) & -x = 2 - x^2 \Longrightarrow x = \boxed{-1}, 2 \\ (x>0) & x = 2 - x^2 \Longrightarrow x = \boxed{1}, -2 \end{array}\right\}$$

Area pedida

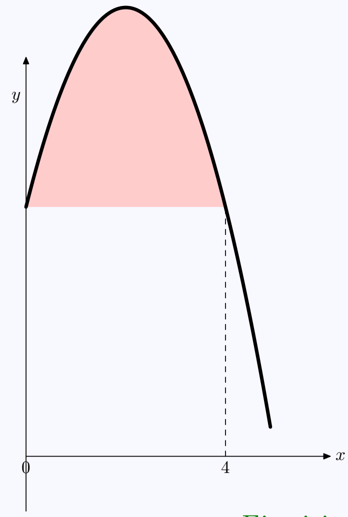
$$\begin{aligned} \left|\int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\,dx\right| &= \left|\int_{-1}^{1} (2 - x^2 - |x|)\,dx\right| \\ &= \left|\int_{-1}^{0} (2 - x^2 + x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (2 - x^2 - x)\,dx\right| \\ &= \frac{13}{6} + \frac{13}{6} \\ &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

Ejercicio 7

Ejercicio 8.
Hallamos los puntos de corte:

$$-x^2 + 4\,x + 5 = 5 \Longrightarrow x = 0 \; x = 4$$

$$\begin{aligned}
Area &= \int_0^4 (-x^2 + 4\,x + 5 - 5)\, dx \\
&= \int_0^4 (-x^2 + 4\,x)\, dx \\
&= \left(-\frac{x^3}{3} + 2\,x^2\right)_0^4 \\
&= \left(-\frac{64}{3} + 32\right) - 0 \\
&= \frac{64}{3}
\end{aligned}$$



Ejercicio 8

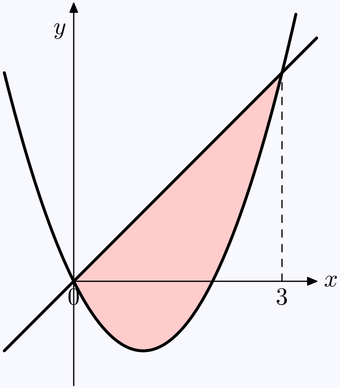
MATEMATICAS 1º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
INTEGRAL DEFINIDA
Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 9.

Hallamos los puntos de corte:

$$x^2 - 2\,x = x \Longrightarrow x = 0 \; x = 3$$

$$\begin{aligned} Area &= \int_0^3 (x - x^2 + 2\,x)\,dx \\ &= \int_0^3 (3\,x - x^2)\,dx \\ &= \left(\frac{3\,x^2}{2} - \frac{1}{3}\,x^3 \right)_0^3 \\ &= \left(\frac{27}{2} - 9 \right) - 0 \\ &= \frac{27}{6} \end{aligned}$$



Ejercicio 9

MATEMATICAS 1º Bachillerato
r=A+λu
A
δ
B
s=B+μv
CIENCIAS
MaTEX
INTEGRAL DEFINIDA
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 10.
Hallamos los puntos de corte con el eje de abscisas:

$$a\left[1-(x-2)^2\right]=0 \Longrightarrow 1=(x-2)^2 \Longrightarrow x=1 \; x=3$$

Igualamos el área a 12

$$a\int_1^3 (1-(x-2)^2)\,dx = a\left(x-\frac{(x-2)^3}{3}\right)_1^3$$

$$12 = a\left(3-\frac{1}{3}\right) - a\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

$$12 = a\cdot\frac{4}{3}$$

$$\boxed{a=9}$$

Ejercicio 10

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 11.

Siedno $f(x) = a\,e^{x/3} + \dfrac{1}{x^2}$, con $x \neq 0$,

a)

$$\int_1^2 (a\,e^{x/3} + \frac{1}{x^2})\,dx = \int_1^2 a\,e^{x/3}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \left(3\,a\,e^{x/3}\right)_1^2 - \left(\frac{1}{x}\right)_1^2$$
$$= 3\,a\,(e^{2/3} - e^{1/3}) + \frac{1}{2}$$

b) Una primitiva es $F(x) = 3\,a\,e^{x/3} - \dfrac{1}{x} + k$. Hallar a y k con las condiciones $F(1) = 0$ y $F(2) = \dfrac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{rcl} 3\,a\,e^{1/3} - \dfrac{1}{1} + k & = & 0 \\ 3\,a\,e^{2/3} - \dfrac{1}{2} + k & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{rcl} 3\,a\,e^{1/3} + k & = & 1 \\ 3\,a\,e^{2/3} + k & = & 1 \end{array}\Bigg\}$$

$$\boxed{a = 0} \qquad \boxed{k = 1}$$

Ejercicio 11

Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 12. Sea $f(x) = 1 + x\,|x|$, Como

$$f(x) = 1 + x\,|x| = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 0 \\ 1 + x^2 & 0 < x \end{cases}$$

las primitivas de $f(x)$ son

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \begin{cases} x - \dfrac{1}{3}x^3 + C_1 & x < 0 \\ x + \dfrac{1}{3}x^3 + C_2 & 0 < x \end{cases}$$

para que pase por el punto $(0, 1)$, exigimos que

$$F(0^-) = F(0^+) = 1$$

luego

$$\boxed{C_1 = C_2 = 1}$$

Ejercicio 12

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Soluciones a los Tests

Solución al Test: En efecto

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int (1+x^2)dx = (1+x^2)$$

Final del Test

Índice alfabético