

Proyecto MaTeX

Complejos

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)

© 2004 javier.gonzalez@unican.es
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTeX

COMPLEJOS



Tabla de Contenido

1. Introducción

1.1. Las potencias de i

2. Forma binómica de un número complejo

2.1. Representación gráfica

2.2. Operaciones en forma binómica

- Suma en forma binómica
- Producto en forma binómica
- Cociente en forma binómica

3. Forma polar de un número complejo

3.1. Forma trigonométrica de un número complejo

3.2. Producto en forma polar

3.3. División en forma polar

3.4. Potencia en forma polar

3.5. Raíz n -ésima de un complejo

Soluciones a los Ejercicios

Soluciones a los Tests



MaTeX

COMPLEJOS





1. Introducción

Vamos a clasificar los números como soluciones de las ecuaciones. Observa las siguientes ecuaciones:

- $x + 3 = 8 \Rightarrow x = 5$ tiene solución en los naturales \mathcal{N}
- $x + 3 = 1 \Rightarrow x = -2$ tiene solución en los enteros \mathcal{Z}
- $2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ tiene solución en los racionales \mathcal{Q}
- $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ tiene solución en los reales \mathcal{R}

Se tiene así que el sistema de números se ha ido ampliando

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$$

Ahora observa la ecuación

$$x^2 = -1$$

que como sabes no hay ningún número cuyo cuadrado sea negativo. En el siglo XVI “inventaron” un número que cumple la ecuación anterior y llamaron la *unidad imaginaria*, \mathbf{i} .

Es decir definimos la unidad imaginaria \mathbf{i} como un número (no real) que cumple

$$\mathbf{i}^2 = -1 \tag{1}$$

MaTeX

COMPLEJOS





1.1. Las potencias de i

Únicamente hay cuatro potencias distintas de i :

$$i = i$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$$

Si seguimos calculando potencias sólo aparecen

$$\{1, -1, i, -i\}$$

Así por ejemplo

$$i^{47} = i^{4 \cdot 11 + 3} = (i^4)^{11} \cdot i^3 = i^3 = -i$$

Ejercicio 1. Efectúa las siguientes potencias de i :

a) i^{34}

b) i^{64}

c) i^{81}

d) i^{107}

Además, ahora podemos expresar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$x^2 + 9 = 0 \implies x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}\sqrt{-1} = \pm 3i$$

$$x^2 + 16 = 0 \implies x = \pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16}\sqrt{-1} = \pm 4i$$

MaTeX

COMPLEJOS





Ejemplo 1.1. Resuelve la ecuación $x^2 + 8x + 25 = 0$

Solución: Resolvemos la ecuación sustituyendo $\sqrt{-1}$ por i .

$$\begin{aligned} x &= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 25}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm 6\sqrt{-1}}{2} \\ &= -4 \pm 3i \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.2. Comprueba que $-4 + 3i$ verifica $x^2 + 8x + 25 = 0$

Solución: Sustituimos y operamos de forma natural

$$\begin{aligned} (-4 + 3i)^2 + 8(-4 + 3i) + 25 &= 16 - 24i + 9i^2 \\ &\quad - 32 + 24i + 25 \\ &= 9 + 9i^2 \\ &= 9 + 9(-1) = 0 \end{aligned}$$

□

MaTeX

COMPLEJOS



Estos nuevos “números” de la forma

$$a + bi$$

los llamamos **números complejos** en forma binómica y decimos que a es la parte real y b la parte imaginaria. Un modelo para comprenderlos consiste en representarlos en el plano

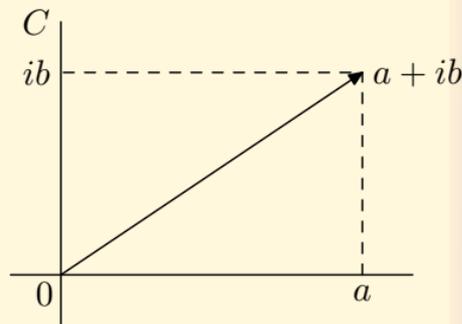
2. Forma binómica de un número complejo

2.1. Representación gráfica

Un complejo en forma binómica

$$a + bi$$

se representa mediante un vector con origen el punto $O(0,0)$ y extremo el punto de coordenadas $A(a,b)$. Al punto $A(a,b)$ se le llama **afijo** del complejo



Ejercicio 2. Representar los siguientes complejos en el plano:

a) $3 + i$

b) $2i$

c) $-2 + 3i$

d) -2

e) $-2 - i$

f) $2 - 2i$

g) 2



MaTeX

COMPLEJOS





2.2. Operaciones en forma binómica

• Suma en forma binómica

Para sumar números complejos en forma binómica se suman la parte real y la parte imaginaria.

Ejemplo 2.1. Hallar la suma $(5 + i) + (1 - 3i)$:

Solución:

$$\begin{aligned}(5 + i) + (1 - 3i) &= (5 + 1) + (1 - 3)i \\ &= 6 - 2i\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2. Efectuar la suma $3 \cdot (5 + i) + 2 \cdot (1 - 3i)$:

Solución:

$$\begin{aligned}3 \cdot (5 + i) + 2 \cdot (1 - 3i) &= (15 + 3i) + (2 - 6i) \\ &= (15 + 2) + (3 - 6)i \\ &= 17 - 3i\end{aligned}$$

□

Ejercicio 3. Efectúa las operaciones:

a) $(2 + 5i) + (3 - 2i)$

b) $(2 - 2i) + (2 + 2i)$

c) $(5 + i) + 2(1 - 3i)$

d) $(2 - 4i) - (3 - 3i)$

MaTeX

COMPLEJOS





• Producto en forma binómica

Para multiplicar números complejos en forma binómica se multiplican de forma algebraica natural, teniendo en cuenta que el término $i^2 = -1$.

Ejemplo 2.3. Hallar el producto $(5 + i) \cdot (1 - 3i)$:

Solución:

$$\begin{aligned}(5 + i) \cdot (1 - 3i) &= 5 - 15i + i - 3i^2 \\ &= 5 - 15i + i + 3 \\ &= 8 - 14i\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.4. Hallar el producto $(2 + i) \cdot (1 - i)$:

Solución:

$$(2 + i) \cdot (1 - i) = 3 - i$$

□

Ejercicio 4. Efectúa las operaciones:

a) $(2 + 5i) \cdot (3 - 2i)$

b) $(2 - 2i) \cdot (2 + 2i)$

c) $(5 + i) \cdot (1 - 3i)$

d) $(2 - 4i) \cdot (3 - 3i)$

e) $(2 + 2i) \cdot (1 - 5i) \cdot (2 + 3i)$

f) $(1 + 5i) \cdot (-i) - (4 + 3i) \cdot (4 - 3i)$

MaTEX

COMPLEJOS

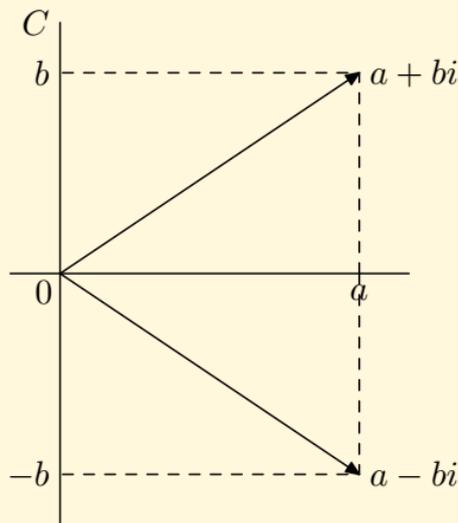


Definición 2.1

Llamamos *conjugado de un número complejo* $z = a + bi$ al complejo

$$\bar{z} = a - bi$$

es decir sus partes imaginarias son opuestas. Al conjugado de z lo vamos a representar por \bar{z} .



Ejercicio 5. Demostrar que la suma de dos números complejos conjugados es un número real:

Ejercicio 6. Demostrar que el producto de dos números complejos conjugados es un número real:



MaTeX

COMPLEJOS





• Cociente en forma binómica

Para dividir números complejos en forma binómica se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador.

Ejemplo 2.5. Hallar el cociente $\frac{3-i}{3+i}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{3-i}{3+i} &= \frac{3-i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{9-3i-3i+i^2}{9-i^2} \\ &= \frac{8-6i}{10} = \frac{8}{10} - \frac{6}{10}i\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.6. Hallar el cociente $\frac{2+i}{i}$.

Solución:

$$\frac{2+i}{i} = \frac{2+i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = 1 - 2i$$

□

Ejercicio 7. Hallar los cocientes:

a) $\frac{2-i}{3-i}$

b) $\frac{3-i}{3+i}$

c) $\frac{5-2i}{3+2i}$

d) $\frac{i}{1+i}$

MaTeX

COMPLEJOS



3. Forma polar de un número complejo

Definición 3.1

Un número complejo $z = a + bi$ se puede caracterizar por su **módulo** o magnitud $m = |z|$ y por el ángulo que determina con la parte positiva del eje Ox . En el gráfico se aprecia que el módulo por el teorema de Pitágoras corresponde a:

$$m = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

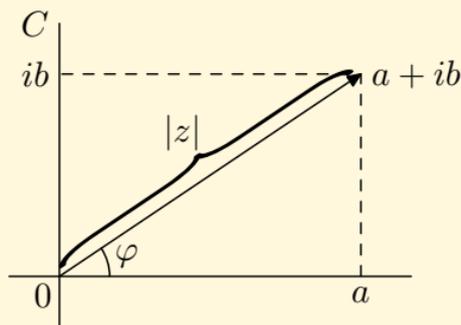
y el ángulo φ que llamamos **argumento** verifica

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \arctan \frac{b}{a}$$

De esta forma un número complejo en forma binómica $a + bi$ se puede expresar en forma polar m_φ

$$a + bi = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = \arctan \frac{b}{a} \end{array} \right\} \Longrightarrow m_\varphi$$

(2)



MaTeX

COMPLEJOS





Ejemplo 3.1. Expresar en forma polar $1 + i$:

Solución: Calculamos su módulo y su argumento.

$$1 + i = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} = \sqrt{2} \frac{\pi}{4}$$

□

Ejemplo 3.2. Expresar en forma polar $2i$:

Solución: Calculamos su módulo y su argumento.

$$2i = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \\ \varphi = \arctan \frac{2}{0} = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} = 2 \frac{\pi}{2}$$

□

Ejercicio 8. Hallar el módulo y argumento de los siguientes complejos , representándolos previamente:

a) $2 - 2i$

b) $2i$

c) $-2i$

d) $-2 + 2i$

e) $2 + 2i$

f) 2

g) -2

h) $-2 - 2i$

Ejercicio 9. Hallar el módulo y el argumento de los complejos:

a) $\sqrt{6} + \sqrt{2}i$

b) $\sqrt{12} - 2i$

c) $-2 + 2i$

Ejercicio 10. Expresar en forma polar los números complejos:

a) $3 + \sqrt{3}i$

b) $2i$

c) $-2 + 2i$

MaTeX

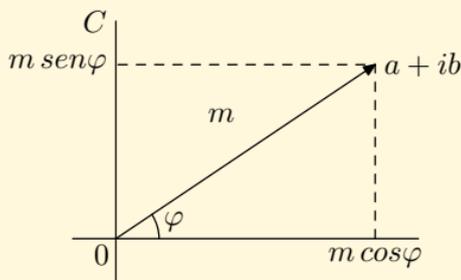
COMPLEJOS



3.1. Forma trigonométrica de un número complejo

En el dibujo se aprecia que a partir de la forma polar de un número complejo, podemos calcular su parte real y su parte imaginaria, pues

$$a = m \cos \varphi \quad b = m \sin \varphi$$



Se llama la expresión trigonométrica

$$m_{\varphi} \implies m(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (3)$$

Ejemplo 3.3. Expresar en forma trigonométrica $1 + i$:

Solución: Calculamos su módulo y su argumento.

$$1 + i = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

□



MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 11. Expresar en forma polar y trigonométrica los números complejos::

a) $1 + i$

b) $-i$

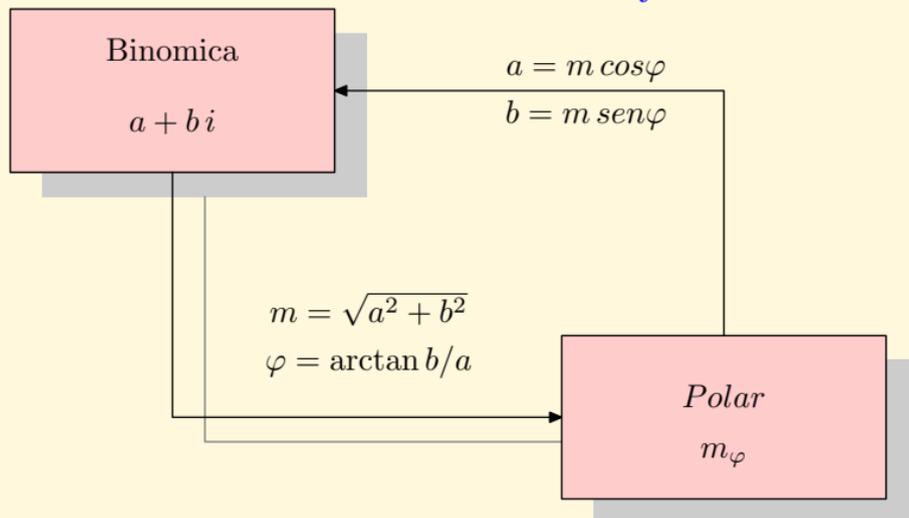
c) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$



MaTeX

COMPLEJOS

Conversión de Binómica a Polar y viceversa





Ejercicio 12. Rellenar la tabla siguiente

Cartesiana	Binómica	Polar	Trigonométrica
(1, -1)			
	$\sqrt{3} - \mathbf{i}$		
		$3\pi/4$	
			$2 \cos \pi/3 + \mathbf{i} \operatorname{sen} \pi/3$

Ejercicio 13. Hallar x para que el cociente

$$\frac{x + 3\mathbf{i}}{3 + 2\mathbf{i}}$$

sea imaginario puro.

Ejercicio 14. Hallar x para que el complejo $z = \frac{3 - 2xi}{4 + 3i}$:

- Sea imaginario puro.
- Sea un número real.

Ejercicio 15. Hallar x para que el módulo de $z = \frac{x + i}{2 + i}$ sea $\sqrt{2}$.

MaTeX

COMPLEJOS



3.2. Producto en forma polar

Teorema 3.1. El producto de dos números en forma polar es un complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos

$$m_{\alpha} \cdot m'_{\beta} = (m \cdot m')_{\alpha+\beta} \quad (4)$$

Ejemplo 3.4. Hallar $4_{120^{\circ}} \cdot 2_{30^{\circ}}$

Solución:

$$4_{120^{\circ}} \cdot 2_{30^{\circ}} = 8_{150^{\circ}} = 8(\cos 150 + \operatorname{sen} 150 i) = -4\sqrt{3} + 4i$$

□

Ejemplo 3.5. Hallar $2_{90^{\circ}} \cdot 1_{90^{\circ}}$

Solución:

$$2_{90^{\circ}} \cdot 1_{90^{\circ}} = 2_{180^{\circ}} = 2(\cos 180 + \operatorname{sen} 180 i) = -2$$

□

Ejercicio 16. Halla los siguientes productos:

a) $3_{\pi/6} \cdot 2_{\pi/6}$

b) $4_{\pi/12} \cdot 2_{\pi/6}$

c) $\sqrt{2}_{\pi/3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}_{5\pi/3}$

d) $-3 \cdot 4_{\pi/4} \cdot 2_{\pi/6}$



MaTeX

COMPLEJOS



3.3. División en forma polar

Teorema 3.2. El cociente de dos números en forma polar es un complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y cuyo argumento es la diferencia de los argumentos

$$\frac{m_\alpha}{m'_\beta} = \left(\frac{m}{m'} \right)_{\alpha-\beta} \quad (5)$$

Ejemplo 3.6. Hallar $\frac{4_{120^\circ}}{2_{30^\circ}}$

Solución:

$$\frac{4_{120^\circ}}{2_{30^\circ}} = 2_{90^\circ} = 2(\cos 90 + \operatorname{sen} 90 i) = 2i$$

□

Ejercicio 17. Halla los siguientes cocientes:

a) $3_{\pi/6} : 2_{\pi/6}$

b) $4_{\pi/12} : 2_{\pi/6}$

c) $3_{\pi/2} : 2_{\pi/4}$

d) $8_\pi : 2_{\pi/2}$

Ejercicio 18. Expresar en forma trigonométrica

$$\frac{-3 + 3\sqrt{3}i}{2 - 2i}$$



MaTEX

COMPLEJOS



Ejercicio 19. Expresar en forma trigonométrica $\frac{2 - 2i}{\sqrt{3} + i}$

Ejercicio 20. Escribe en forma trigonométrica: $\frac{6i}{1 + i}$

Ejercicio 21. Escribe en forma trigonométrica: $\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}$

Ejercicio 22. Escribe en forma trigonométrica: $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{\sqrt{12} - 2i}$

Test. Responde a las preguntas:

- El complejo $z = -2 + 2i$ está en:
 - 1º cuadrante
 - 2º cuadrante
 - 3º cuadrante
- La forma polar de $z = -2 + 2i$ es:
 - $\sqrt{8}_{\pi/4}$
 - $\sqrt{8}_{-\pi/4}$
 - $\sqrt{8}_{3\pi/4}$
- La forma polar de $3(\cos 30^\circ - i \operatorname{sen} 30^\circ)$ es
 - 3_{30}
 - $1\ 3_{-30}$
 - 3_{60}
- El módulo de $1_\pi \cdot 1_{2\pi} \cdot 1_{3\pi}$ es:
 - 3
 - 1
 - otro
- El argumento de -3 es:
 - π
 - 0
 - 2π



MaTEX

COMPLEJOS



3.4. Potencia en forma polar

Teorema 3.3. La potencia n -ésima de un número en forma polar m_φ es un complejo cuyo módulo es la potencia n -ésima de m y cuyo argumento es n veces φ .

$$(m_\alpha)^n = m_n^n \alpha \quad (6)$$

Ejemplo 3.7. Efectuar $(2_{\pi/4})^5$

Solución:

$$(2_{\pi/4})^5 = 2_{5 \times \pi/4}^5 = 32_{225^\circ}$$

□

Ejemplo 3.8. Efectuar $(3_\pi)^2$

Solución:

$$(3_\pi)^2 = 3_{2 \times \pi}^2 = 8_{180^\circ}$$

□

Ejercicio 23. Hallar la potencia $(1 + \mathbf{i})^5$

Ejercicio 24. Hallar la potencia $(-2 + 2\sqrt{3}\mathbf{i})^6$

Ejercicio 25. Operar en forma polar $\frac{1}{(1 + \mathbf{i})^5}$



MaTeX

COMPLEJOS



3.5. Raíz n -ésima de un complejo

Queremos hallar la raíz n -ésima de un complejo $a + bi$ que expresaremos en forma polar m_φ .

$$x = \sqrt[n]{m_\varphi} \iff x^n = m_\varphi$$

Llamemos a la solución buscada $x = r_\alpha$, entonces se tiene que

$$(r_\alpha)^n = m_\varphi = r_n^n \alpha$$

igualando módulos y argumento,

$$m = r^n \implies r = \sqrt[n]{m}$$

$$n\alpha = \varphi + k \cdot 360^\circ \implies \alpha = \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

La raíz n -ésima de un número en forma polar corresponde a n números complejos con la expresión

$$\sqrt[n]{m_\varphi} = \frac{\sqrt[n]{m} \varphi + k \cdot 360^\circ}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (7)$$

En los números reales $\sqrt[3]{1} = 1$, pero ahora en el campo de los complejos además de 1, hay otros dos complejos cuyo cubo es la unidad.



MaTeX

COMPLEJOS



Ejemplo 3.9. Hallar las raíces $\sqrt[3]{1}$

Solución: Ponemos el radicando en forma polar

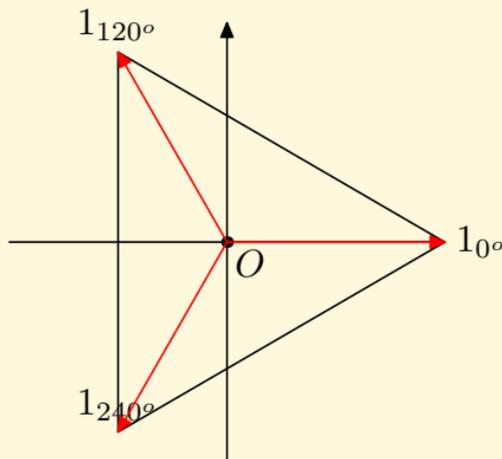
$$1 \implies 1_0$$

El módulo es $\sqrt[3]{1} = 1$ y de la ecuación (7) dando valores a $k = 0, 1, 2$ se tienen los argumentos,

$$\alpha_k = \frac{0 + k \cdot 360^\circ}{3} \begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = 120 \\ \alpha_2 = 240 \end{cases}$$

luego las tres raíces son

$$1_0 \quad 1_{120^\circ} \quad 1_{240^\circ}$$



Los afijos de las soluciones son los vértices de un triángulo equilátero. \square



MaTeX

COMPLEJOS



Ejemplo 3.10. Hallar las raíces $\sqrt[5]{-32}$

Solución: Ponemos el radicando en forma polar

$$-32 \implies 32_{180}$$

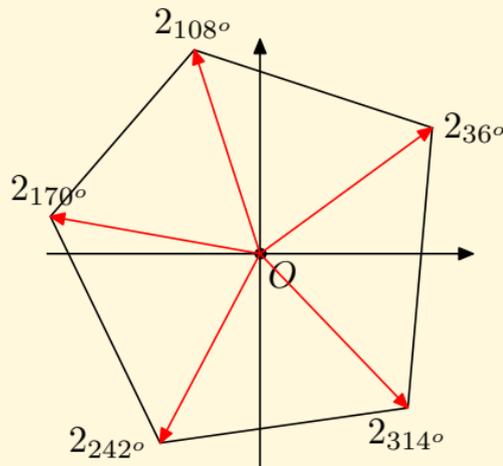
El módulo es $\sqrt[5]{32} = 2$ y de la ecuación (7) dando valores a $k = 0, 1, \dots, 4$ se tienen los argumentos,

$$\alpha_k = \frac{0 + k \cdot 360^\circ}{5} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = 36^\circ \\ \alpha_1 = 108^\circ \\ \alpha_2 = 170^\circ \\ \alpha_3 = 242^\circ \\ \alpha_4 = 314^\circ \end{array} \right.$$

luego las cinco raíces son

$$2_{36^\circ} \quad 2_{108^\circ} \quad 2_{170^\circ} \quad 2_{242^\circ} \quad 2_{314^\circ}$$

Los afijos de las soluciones son los vértices de un polígono regular de cinco lados. \square



MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 26. Un complejo z en forma binómica es $a + bi$, su conjugado es $\bar{z} = a - bi$ y su opuesto es $-z = -a - bi$. ¿Cuál es la expresión de los mismos en forma polar?

Ejercicio 27. Hallar dos complejos z_1 y z_2 sabiendo que su cociente es 4, sus argumentos suman 40° y la suma de sus módulos es 15.

Ejercicio 28. Hallar dos complejos z_1 y z_2 sabiendo que su producto es $27i$ y uno de ellos es el cuadrado del otro.

Ejercicio 29. Hallar un complejo z_1 que cumpla que su inverso al cuadrado sea el opuesto de su conjugado.



MaTeX

COMPLEJOS



Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Teniendo en cuenta que $i^4 = 1$, basta dividir por 4 los exponentes:

$$a) i^{34} = i^{4 \cdot 8 + 2} = (i^4)^8 \cdot i^2 = i^2 = -1$$

$$b) i^{64} = i^{4 \cdot 16} = (i^4)^{16} = 1$$

$$c) i^{81} = i^{4 \cdot 20 + 1} = (i^4)^{20} \cdot i = i$$

$$d) i^{107} = i^{4 \cdot 26 + 3} = (i^4)^{26} \cdot i^3 = i^3 = -i$$

Ejercicio 1

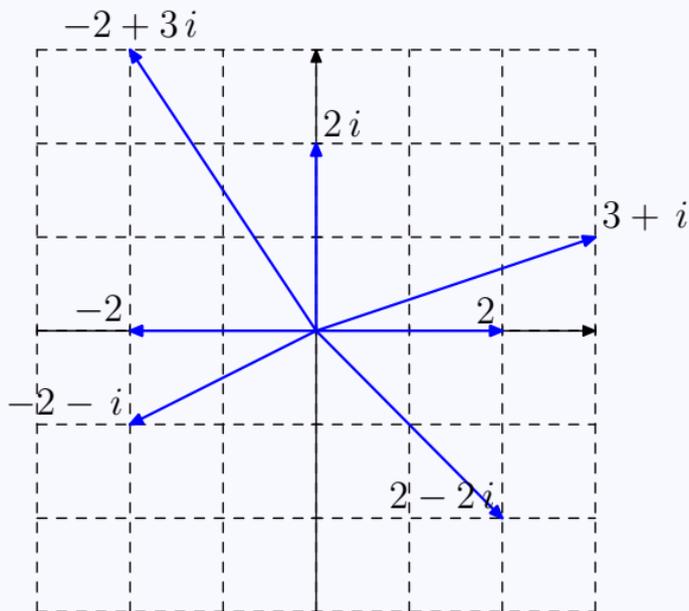


MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 2.



MaTeX

COMPLEJOS

Ejercicio 2



Ejercicio 3.

$$a) (2 + 5i) + (3 - 2i) = 5 + 3i$$

$$b) (2 - 2i) + (2 + 2i) = 4 +$$

$$c) (5 + i) + 2(1 - 3i) = 7 - 5i$$

$$d) (2 - 4i) - (3 - 3i) = -1 - i$$



Ejercicio 3

MaT_EX

COMPLEJOS



Ejercicio 4.

$$a) (2 + 5i) \cdot (3 - 2i) = 16 + 11i$$

$$b) (2 - 2i) \cdot (2 + 2i) = 8$$

$$c) (5 + i) \cdot (1 - 3i) = 8 - 14i$$

$$d) (2 - 4i) \cdot (3 - 3i) = -6 - 18i$$

$$e) (2 + 2i) \cdot (1 - 5i) \cdot (2 + 3i) = 48 + 20i$$

$$f) (1 + 5i) \cdot (-i) - (4 + 3i) \cdot (4 - 3i) = -20 - i$$

**MaTEX**

Ejercicio 4

COMPLEJOS



Ejercicio 5. Sean los números complejos conjugados

$$z = a + bi \quad \bar{z} = a - bi$$

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (a + bi) + (a - bi) \\ &= 2a \end{aligned}$$

es decir la parte imaginaria es cero y por tanto es un número real.

Ejercicio 5



MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 6. Sean los números complejos conjugados

$$z = a + bi \quad \bar{z} = a - bi$$

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi) \cdot (a - bi) \\ &= a^2 - abi + abi - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

es decir la parte imaginaria es cero y por tanto es un número real.

Ejercicio 6



MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 7.

$$a) \frac{2-i}{3-i} = \frac{2-i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{7-i}{10} = \frac{7}{10} - \frac{1}{10}i$$

$$b) \frac{3-i}{3+i} = \frac{3-i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{8-6i}{10} = \frac{8}{10} - \frac{6}{10}i$$

$$c) \frac{5-2i}{3+2i} = \frac{5-2i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{11-16i}{13} = \frac{11}{13} - \frac{16}{13}i$$

$$d) \frac{i}{1+i} = \frac{i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$



MaTEX

COMPLEJOS

Ejercicio 7



Ejercicio 8.

a) $2 - 2i \rightarrow \sqrt{8}7\pi/4$

b) $2i \rightarrow 2\pi/2$

c) $-2i \rightarrow 23\pi/2$

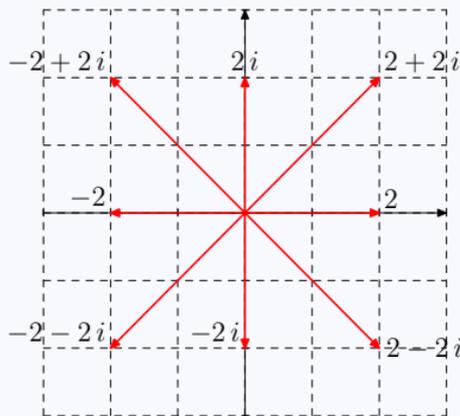
d) $-2 + 2i \rightarrow \sqrt{8}3\pi/4$

e) $2 + 2i \rightarrow \sqrt{8}\pi/4$

f) $2 \rightarrow 2_0$

g) $-2 \rightarrow 2_\pi$

h) $-2 - 2i \rightarrow \sqrt{8}5\pi/4$



Ejercicio 8



MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 9.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sqrt{6} + \sqrt{2}i & \begin{cases} m = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} \\ \varphi = \arctan \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} \end{cases} \\
 \text{b) } \sqrt{12} - 2i & \begin{cases} m = \sqrt{12+4} = 4 \\ \varphi = \arctan -\frac{2}{\sqrt{12}} = \arctan -\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{11\pi}{6} \end{cases} \\
 \text{c) } -2 + 2i & \begin{cases} m = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \\ \varphi = \arctan -\frac{2}{2} = \arctan -1 = \frac{3\pi}{4} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 9



MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 10.

$$a) 3 + \sqrt{3}i = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{12} \\ \varphi = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} \end{array} \right\} = \sqrt{12} \frac{\pi}{6}$$

$$b) 2i = 2 \frac{\pi}{2}$$

$$c) -2 + 2i = \sqrt{8} \frac{\pi}{4}$$



MaTeX

Ejercicio 10

COMPLEJOS



**Ejercicio 11.**

$$a) 1 + i = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} = \sqrt{2} \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

$$b) -i = \left\{ \begin{array}{l} m = 1 \\ \varphi = \arctan -\frac{1}{0} = \frac{3\pi}{2} \end{array} \right\} = 1 \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$$

$$c) \sqrt{2} + \sqrt{2}i = \left\{ \begin{array}{l} m = 2 \\ \varphi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} = 2 \frac{\pi}{4}$$

$$2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

Ejercicio 11

MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 12.

Cartesiana	Binómica	Polar	Trigonométrica
$(1, -1)$	$1-i$	$\sqrt{2}7\pi/4$	$\sqrt{2}(\cos 7\pi/4 + i \operatorname{sen} 7\pi/4)$
$(\sqrt{3}, -1)$	$\sqrt{3} - i$	$2_{11\pi/6}$	$2(\cos 11\pi/6 + i \operatorname{sen} 11\pi/6)$
$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$	$3_{\pi/4}$	$3(\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4)$
$(1, \sqrt{3})$	$1 + \sqrt{3}i$	$2_{\pi/3}$	$2(\cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3)$

Ejercicio 12



MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 13.

$$\frac{x + 3i}{3 + 2i} = \frac{x + 3i}{3 + 2i} \cdot \frac{3 - 2i}{3 - 2i} = \frac{(3x + 6) + (9 - 2x)i}{13}$$

para que sea imaginario puro la parte real debe ser cero

$$\frac{3x + 6}{13} = 0 \implies x = -2$$

Ejercicio 13

MaTEX

COMPLEJOS



**Ejercicio 14.**

$$z = \frac{3 - 2xi}{4 + 3i} = \frac{3 - 2xi}{4 + 3i} \cdot \frac{4 - 3i}{4 - 3i} = \frac{12 - 6x}{25} - \frac{(9 + 8x)i}{25}$$

a) para que sea imaginario puro la parte real debe ser cero

$$\frac{12 - 6x}{25} = 0 \implies x = 2$$

b) para que sea real puro la parte imaginaria debe ser cero

$$\frac{(9 + 8x)i}{25} = 0 \implies x = -\frac{9}{8}$$

Ejercicio 14

MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 15.

$$z = \frac{x+i}{2+i} = \frac{x+i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2x+1}{5} + \frac{(2-x)i}{5}$$

igualamos el módulo a $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{2x+1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2-x}{5}\right)^2} &= \sqrt{2} \implies \\ \frac{4x^2 + 4x + 1}{25} + \frac{4 - 4x + x^2}{25} &= 2 \implies \\ 5x^2 + 5 = 50 &\implies x^2 = 9 \implies \boxed{x = \pm 3} \end{aligned}$$

Ejercicio 15



MaTeX

COMPLEJOS



Prueba del Teorema 3.1.

Expresamos los complejos m_α y m'_β en forma trigonométrica. Al operar aparece el coseno y el seno de la suma de ángulos:

$$\begin{aligned}
 m_\alpha \cdot m'_\beta &= m(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot m'(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) \\
 &= m \cdot m'[\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \\
 &\quad + i \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \operatorname{sen} \beta] \\
 &= m \cdot m'[\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)] \\
 &= (m \cdot m')_{\alpha+\beta}
 \end{aligned}$$



MaTeX

COMPLEJOS





Ejercicio 16.

$$a) 3_{\pi/6} \cdot 2_{\pi/6} = 6_{\pi/3} = 6(\cos 30 + \operatorname{sen} 30 i) = 3\sqrt{3} + 3i$$

$$b) 4_{\pi/12} \cdot 2_{\pi/6} = 8_{\pi/4} = 8(\cos 45 + \operatorname{sen} 45 i) = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$$

$$c) \sqrt{2}_{\pi/3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}_{5\pi/3} = 1_{2\pi} = 1(\cos 360 + \operatorname{sen} 360 i) = 1$$

$$d) -3 \cdot 4_{\pi/4} \cdot 2_{\pi/6} = 3_{\pi} \cdot 4_{\pi/4} \cdot 2_{\pi/6} = 24_{17\pi/12}$$

$$24_{17\pi/12} = 24(\cos 120 + \operatorname{sen} 120 i) = -12 + 12\sqrt{3}i$$

Ejercicio 16

MaTeX

COMPLEJOS



Prueba del Teorema 3.2.

Expresamos los complejos m_α y m'_β en forma trigonométrica. Al operar aparece el coseno y el seno de la diferencia de ángulos:

$$\begin{aligned} \frac{m_\alpha}{m'_\beta} &= \frac{m(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}{m'(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)} \\ &= \frac{m(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}{m'(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)} \frac{(\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta)}{(\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta)} \\ &\quad (\text{operando}) \\ &= \frac{m}{m'} [\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta)] \\ &= \left(\frac{m}{m'} \right)_{\alpha - \beta} \end{aligned}$$



MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 17.

$$a) \frac{3_{\pi/6}}{2_{\pi/6}} = \left(\frac{3}{2}\right)_0$$

$$b) \frac{4_{\pi/12}}{2_{\pi/6}} = (2)_{23\pi/12}$$

$$c) \frac{3_{\pi/2}}{2_{\pi/4}} = \left(\frac{3}{2}\right)_{\pi/4}$$

$$d) \frac{8_{\pi}}{2_{\pi/2}} = (4)_{\pi/2}$$



MaTeX

COMPLEJOS

Ejercicio 17



Ejercicio 18. Expresamos numerador y denominador en forma polar

$$\begin{aligned} -3 + 3\sqrt{3}i &\implies m = \sqrt{36} \quad \varphi = \frac{2\pi}{3} \\ 2 - 2i &\implies m = \sqrt{8} \quad \varphi = \frac{7\pi}{4} \end{aligned}$$

Ahora operamos el cociente en forma polar

$$\frac{-3 + 3\sqrt{3}i}{2 - 2i} = \frac{6_{2\pi/3}}{\sqrt{8}_{7\pi/4}} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right)_{-13\pi/12}$$

$$\begin{aligned} -\frac{13\pi}{12} &= 2\pi - \frac{13\pi}{12} = \frac{11\pi}{12} = 165^\circ \text{ y pasamos a forma binómica} \\ &\frac{3}{\sqrt{2}}(\cos 165^\circ + \text{sen } 165^\circ i) \end{aligned}$$

Ejercicio 18



MaTEX

COMPLEJOS



Ejercicio 19. Expresamos numerador y denominador en forma polar

$$2 - 2i \implies m = \sqrt{8} \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

$$\sqrt{3} + i \implies m = \sqrt{4} \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Ahora operamos el cociente en forma polar

$$\frac{2 - 2i}{\sqrt{3} + i} = \frac{\sqrt{8} e^{7\pi/4}}{2 e^{\pi/6}} = (\sqrt{2})_{19\pi/12}$$

y pasamos a forma trigonométrica

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + \operatorname{sen} \frac{19\pi}{12} i \right)$$

Ejercicio 19



MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 20. Expresamos numerador y denominador en forma polar

$$6i \implies m = 6 \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$1 + i \implies m = \sqrt{2} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Ahora operamos el cociente en forma polar

$$\frac{6i}{1+i} = \frac{6_{\pi/2}}{\sqrt{2}_{\pi/4}} = \left(\frac{6}{\sqrt{2}} \right)_{\pi/4}$$

y pasamos a forma trigonométrica

$$\frac{6}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} i \right)$$

Ejercicio 20



MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 21. Expresamos numerador y denominador en forma polar

$$1 + \sqrt{3}i \implies m = 2 \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$1 - i \implies m = \sqrt{2} \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

Ahora operamos el cociente en forma polar

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} = \frac{2\pi/3}{\sqrt{2}7\pi/4} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)_{-17\pi/12}$$

$$-\frac{17\pi}{12} = 2\pi - \frac{17\pi}{12} = \frac{7\pi}{12} = 105^\circ \text{ y pasamos a forma trigonométrica}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}(\cos 105^\circ + \operatorname{sen} 105^\circ i)$$

Ejercicio 21



MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 22. Expresamos numerador y denominador en forma polar

$$\begin{aligned}\sqrt{6} + \sqrt{2}i &\implies m = \sqrt{8} & \varphi = \frac{\pi}{6} \\ \sqrt{12} - 2i &\implies m = 4 & \varphi = -\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Ahora operamos el cociente en forma polar

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{\sqrt{12} - 2i} = \frac{\sqrt{8}_{\pi/6}}{4_{-\pi/6}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\pi/3}$$

y pasamos a forma trigonométrica

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} i \right)$$

Ejercicio 22



MaTeX

COMPLEJOS



Prueba del Teorema 3.3.

Por la regla del producto se tiene

$$\begin{aligned}(m_\alpha)^n &= m_\alpha \cdot m_\alpha \cdots m_\alpha \\ &= (m \cdot m \cdots m)\alpha + \alpha + \cdots + \alpha \\ &= m_n^n \alpha\end{aligned}$$



MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 23. Calculamos su módulo y su argumento.

$$1 + i = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Ahora operamos la potencia en forma polar

$$\left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5 = \sqrt{2}^5 e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

Ejercicio 23



MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 24. Calculamos su módulo y su argumento.

$$(-2 + 2\sqrt{3}\mathbf{i})^6 = \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{2^2 + 12} = \sqrt{16} = 4 \\ \varphi = \arctan -\sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} \end{array} \right\} = 4 \frac{2\pi}{3}$$

Ahora operamos la potencia en forma polar

$$\left(4 \frac{2\pi}{3}\right)^6 = 4^6 \frac{2\pi}{3} = 40$$

Ejercicio 24



MaTeX

COMPLEJOS





Ejercicio 25. Expresamos numerador y denominador en forma polar

$$\begin{aligned} 1 &\implies m = 1 & \varphi = 0 \\ 1 + i &\implies m = \sqrt{2} & \varphi = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Ahora operamos el cociente en forma polar

$$\frac{1}{(1+i)^5} = \frac{1_0}{(\sqrt{2}_{\pi/4})^5} = \frac{1_0}{4\sqrt{2}_{5\pi/4}} = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)_{3\pi/4}$$

y pasamos a forma binómica

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + \mathbf{i} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{16} i$$

Ejercicio 25

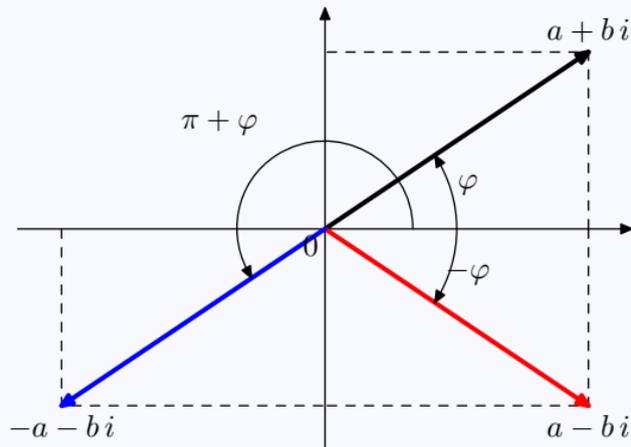
MaTeX

COMPLEJOS



Ejercicio 26. A partir del gráfico es fácil observar que si $a + bi$ es en forma polar m_φ , entonces

- Su conjugado $a - bi$ en polar es $m_{-\varphi}$
- Su opuesto $-a - bi$ en polar es $m_{\pi+\varphi}$



Ejercicio 26



MaTeX

COMPLEJOS



**Ejercicio 27.**

Sean $z_1 = m_\alpha$ y $z_2 = k_\beta$. Planteamos un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{m_\alpha}{k_\beta} = 40 \\ \alpha + \beta = 40 \\ m + k = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{m}{k} = 4 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 40 \\ m + k = 15 \end{array} \right\}$$

$$\blacksquare \alpha = \beta \Rightarrow 2\alpha = 40 \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta = 20}$$

$$\blacksquare m = 4k \Rightarrow 5k = 15 \Rightarrow \boxed{k = 3} \quad \boxed{m = 12}$$

Los complejos pedidos son

$$12_{20^\circ} \quad 3_{20^\circ}$$

Ejercicio 27

MaTeX

COMPLEJOS



**Ejercicio 28.**

Sean $z_1 = m_\alpha$ y $z_2 = k_\beta$. Planteamos un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} m_\alpha \cdot k_\beta = 27i = 27_{90^\circ} \\ m_\alpha = (k_\beta)^2 = k_{2\beta}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m \cdot k = 27 \\ \alpha + \beta = 90 \\ m = k^2 \\ \alpha = 2\beta \end{array} \right\}$$

$$\blacksquare \alpha = 2\beta \Rightarrow 3\beta = 90 \Rightarrow \boxed{\alpha = 60} \quad \boxed{\beta = 30}$$

$$\blacksquare m = k^2 \Rightarrow k^3 = 27 \Rightarrow \boxed{k = 3} \quad \boxed{m = 9}$$

Los complejos pedidos son

$$9_{60^\circ} \quad 3_{30^\circ}$$

Ejercicio 28

MaTeX

COMPLEJOS





Ejercicio 29.

Sean $z_1 = m_\alpha$ el complejo buscado

- Su inverso es

$$\frac{1}{m_\alpha} = \frac{1_0}{m_\alpha} = \left(\frac{1}{m} \right)_{-\alpha}$$

- El conjugado de $z_1 = m_\alpha$ es $\bar{z}_1 = m_{-\alpha}$ y el opuesto de este es $-\bar{z}_1 = m_{\pi-\alpha}$

luego se tiene que cumplir que

$$\left(\frac{1}{m^2} \right)_{-2\alpha} = m_{\pi-\alpha} \implies \left. \begin{array}{l} 1 = m^3 \\ -2\alpha = \pi - \alpha \end{array} \right\}$$

El complejo buscado es $1_{-\pi} = 1_\pi = -1$

Ejercicio 29

MaTeX

COMPLEJOS



Soluciones a los Tests

Solución al Test: En efecto

$$-2 + 2i \quad \left\{ \begin{array}{l} m = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \\ \varphi = \arctan -\frac{2}{2} = \arctan -1 = \frac{3\pi}{4} \end{array} \right.$$

Final del Test

MaTEX

COMPLEJOS



Índice alfabético

argumento, 11

conjugado, 9

forma binómica, 6

 cociente, 10

 producto, 8

 representación, 6

 suma, 7

forma polar, 11

 división, 17

 potencia, 19

 producto, 16

 radicación, 20

forma trigonométrica, 13

módulo, 11

unidad imaginaria i , 3



MaTeX

COMPLEJOS

