Proyecto MaTEX

Las Cónicas

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

 javier.gonzalez@unican.es
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4

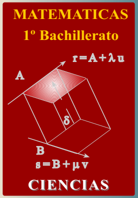
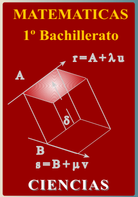
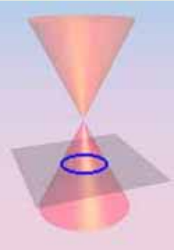


Tabla de Contenido

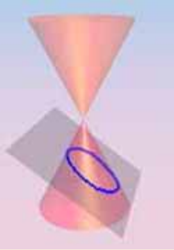


◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

1. Introducción



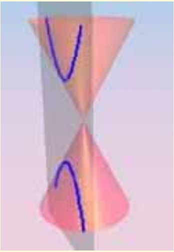
circunferencia



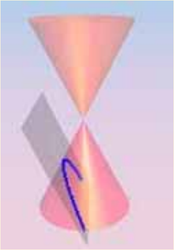
elipses

"*Las Cónicas*" de Apolonio de Pérgamo (262-190 a. C), constaban de ocho libros. Esta obra es el resultado de estudiar las secciones de un cono a las que denominó cónicas. Apolonio descubrió que se obtenían al cortar mediante una superficie plana un cono circular en diversas posiciones.

Depende de cómo se corten, las secciones resultantes serán círculos, elipses, hipérbolas o parábolas. Aunque estos conceptos no tuvieron posibilidad de ser aplicados a la ciencia de su época, su importancia ha quedado plenamente justificada con el paso del tiempo.



hipérbolas



parábolas

Hay varias formas de estudiar las cónicas:

a) Se pueden estudiar como hicieron los griegos, como has visto en las figuras anteriores, en términos de intersecciones del cono con planos.

b) Se pueden estudiar como casos particulares de ecuaciones de segundo grado con dos variables x e y

$$A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

c) Sin embargo en este nivel, como continuación del capítulo de métrica en el plano, es más adecuado estudiarlas como lugares geométricos de puntos que cumplen cierta propiedad geométrica

2. La circunferencia

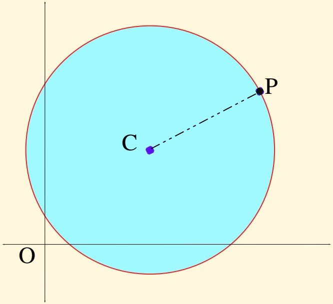
Definición 2.1 *Una circunferencia es el lugar geométrico de los $P(x, y)$ que equidistan de un punto fijo C llamado (centro)*

$$d(P, C) = cte = radio$$

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera verificando $d(P, C) = r$, siendo r el radio y $C(x_0, y_0)$ el centro. De la fórmula de la distancia de dos puntos se tiene

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

y elevando al cuadrado se obtiene la ecuación de la circunferencia



$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2} \tag{1}$$

Cuando la circunferencia tiene el centro en el origen se tiene la ecuación reducida

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2} \tag{2}$$

Ejemplo 2.1. Halla el centro y el radio de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4\,x - 6\,y = 12$$

Solución:
Para conseguir la ecuación reducida del tipo (1) se agrupan cuadrados de la siguiente forma

- $x^2 - 4\,x = x^2 - 2 \cdot 2\,x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4$
- $y^2 - 6\,y = y^2 - 2 \cdot 3\,y + 9 - 9 = (y-3)^2 - 9$

sustituyendo en la expresión dada se obtiene

$$(x-2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 = 12 \Longrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

luego el centro es $C(2,3)$ y el radio $r = 5$ □

Ejercicio 1. Halla el centro y el radio de las circunferencias:

a) $x^2 + y^2 - 4\,x + 10\,y + 25 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 18\,x - 9 = 0$

Ejercicio 2. Escribir la ecuación de las circunferencias:

a) De centro $C(1,1)$ y radio $r = 3$.

b) De centro $C(0,0)$ y radio $r = 2$.

2.1. Recta tangente a una circunferencia

Si desde un punto $P(x, y)$ trazamos una recta t, será tangente a una circunferencia cuando la distancia del centro a la recta coincida con el radio.

- la recta es tangente si

$$d(C, t) = radio$$

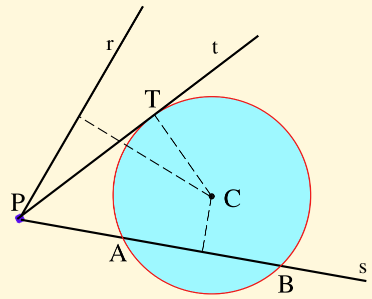
- la recta se llama exterior si

$$d(C, r) > radio$$

- la recta se llama secante si

$$d(C, s) < radio$$

la intersecta en dos puntos A y B.



Ejemplo 2.2. Comprobar que la recta $s \equiv 4\,x - 3\,y + 6 = 0$ es tangente a la circunferencia

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$$

Solución: Veamos que el radio coincide con la distancia del centro a la recta dada

$$d(C; s) = \frac{|4\,(2) - 3\,(3) + 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1 = \text{ radio}$$

$\square$

Ejercicio 3. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 4\,x + 10\,y + 25 = 0$, calcular:

a) La circunferencia concéntrica con radio 8

b) La circunferencia concéntrica que pase por $P(2,2)$.

Ejercicio 4. Hallar la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas, tiene radio 4 y su centro está en la bisectriz del primer cuadrante.

Ejercicio 5. Hallar la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,1)$, $B(3,-3)$ y tiene su centro en la recta $r \equiv x + y - 5 = 0$.

Ejercicio 6. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos $A(2,1)$, $B(3,-3)$. Calcular su ecuación.

Ejercicio 7. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C(2,3)$ y tangente a la recta $s \equiv 4\,x - 3\,y + 6 = 0$.

Ejercicio 8. Determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ que pasa por el punto $A(0,6)$.

Ejercicio 9. Determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ que es paralela a la recta $r \equiv 2\,x - \ y + 3 = 0$.

Ejercicio 10. Halla razonadamente:

a) la ecuación del lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por los puntos $A(2,0)$ y $B(0,1)$.

b) Entre todas estas circunferencias halla la ecuación de aquélla cuyo centro equidista de los ejes coordenados.

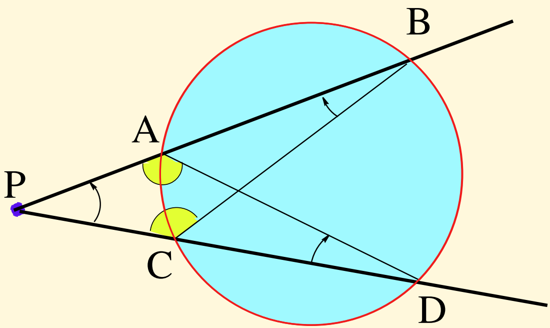
2.2. Potencia de un punto

Definición 2.2 *Si desde un punto $P(x, y)$ trazamos una recta que corte a una circunferencia $\mathcal{C}$ en dos puntos A y B, se llama potencia del punto respecto de la circunferencia al producto $PA \cdot PB$.*

$$Pot(P)_{\mathcal{C}} = PA \cdot PB$$

Teorema 2.1. El valor de la potencia de un punto P respecto de una circunferencia es constante.

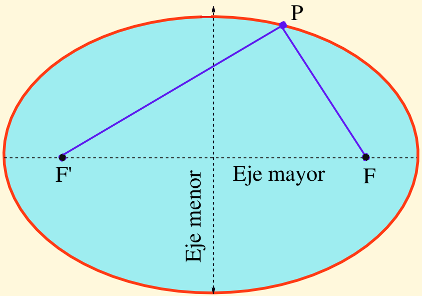
$$Pot(P)_{\mathcal{C}} = \text{ constante}$$



3. La elipse

Definición 3.1 *Una elipse es el lugar geométrico de los $P(x, y)$ cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F' (focos) es constante*

$$|PF| + |PF'| = cte = 2a$$



Para su construcción manual, se toma un segmento de longitud $2\,a$ y se sujetan sus extremos en los puntos F y F', los focos, si se mantiene el segmento tirante y se va girando se obtiene el gráfico de la elipse.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

3.1. Ecuación reducida de la elipse

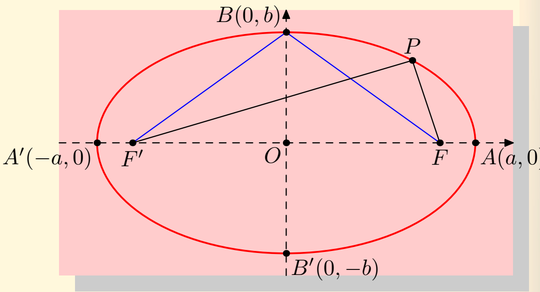
Teorema 3.1. La ecuación reducida de una elipse cuando los focos están situados en el eje Ox y $|PF| + |PF'| = 2a$ corresponde a:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{3}$$

- a es el semieje mayor
- b es el semieje menor
- focos $F(c, 0)$ $F'(-c, 0)$
- el centro es $O(0, 0)$
- vértices A, A', B, B'
- En el gráfico se tiene

$$BF = a$$

$$OB = b \quad OF = c$$



luego por el teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$

Ejemplo 3.1. Halla el eje mayor, el eje menor, los vértices, y los focos de la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Solución:
De la ecuación

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

se tiene:

- Eje mayor $2a = 2 \cdot 5 = 10$
- Eje menor $2b = 2 \cdot 4 = 8$
- Vértices $A(5,0)$,$A'(-5,0)$,$B(0,4)$ y $B'(0,-4)$
- Los focos. Como $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$$F(3,0) \qquad F'(-3,0)$$

□

Ejercicio 11. Halla los ejes mayor, los vértices, los focos y la excentricidad de la elipse

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$$

• Excentricidad

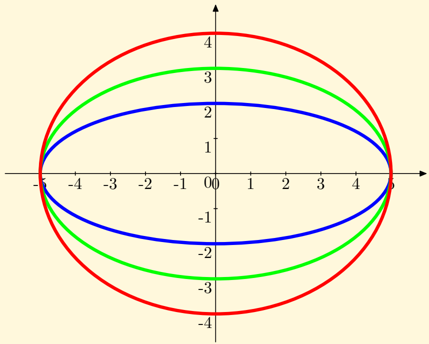
Definición 3.2 *Llamamos excentricidad e de una elipse al cociente entre la distancia focal y el eje real.*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$$

La excentricidad mide el grado de achatamiento de la elipse

- $e = 0{,}6$
- $e = 0{,}8$
- $e = 0{,}9165$

Cuanto mas cerca está e de uno , más achatada está. Si $e = 0$, la elipse es una circunferencia



• Cambio de centro

Definición 3.3 *La ecuación de la elipse cuando el centro está en el punto $O(u, v)$ es:*

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

Ejercicio 12. Halla los ejes mayor, los vértices, los focos y la excentricidad de la elipse

$$3\,x^2 + 6\,y^2 = 12$$

Ejercicio 13. Escribe la ecuación de la elipse centrada en el origen, de semieje mayor 10 y distancia focal 12.

Ejercicio 14. Escribe la ecuación de la elipse centrada en el origen, de excentricidad 0.4 y semidistancia focal 2.

Ejercicio 15. Halla la ecuación de una elipse sabiendo que pasa por los puntos $P(1, -1)$ y $Q(0, -4)$.

- **Ecuación de la tangente**

Teorema 3.2. La ecuación de la tangente a la elipse

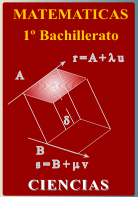
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto $P(x_0, y_0)$ es

$$\boxed{\frac{x_0\,x}{a^2} + \frac{y_0\,y}{b^2} = 1} \tag{5}$$

Ejercicio 16. Halla la ecuación de la recta tangente que pasa por $P(4, 1)$ a la elipse

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$$

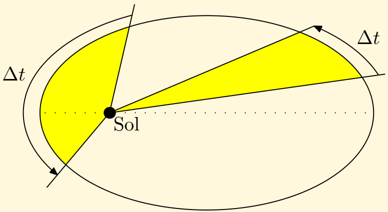


MaTEX
CÓNICAS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

- **Las leyes de Kepler**

En 1609 Johannes Kepler (1571-1620) publica, utilizando las observaciones de su maestro Tycho Brahe, su obra "*Astronomía Nova*" en donde enuncia las dos primeras leyes referente a las órbitas de los planetas. Posteriormente, en 1619, Kepler publicaría la tercera.

Primera Ley Los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol.



Segunda Ley Las áreas barridas por la recta que une el sol con el planeta son directamente proporcionales a los tiempos empleados en barrerlas.

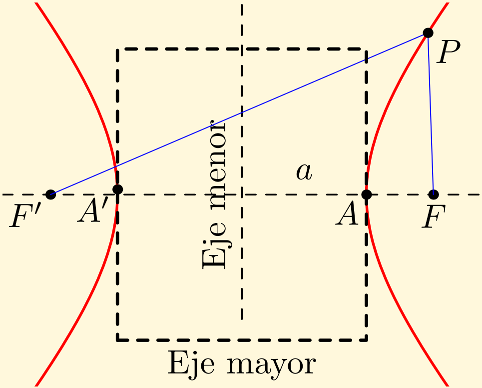
(Si las áreas dibujadas son iguales, entonces la velocidad del planeta es mayor en el perihelio que en el afelio)

Tercera Ley Los cuadrados de los períodos de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas.

4. La hipérbola

Definición 4.1 *Una* *hipérbola* *es el lugar geométrico de los* $P(x,y)$ *cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos* F *y* F' *(focos) es constante*

$$|PF| - |PF'| = cte = \pm 2a$$



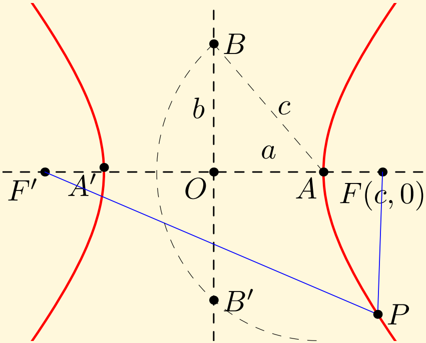
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

4.1. Ecuación reducida de la hipérbola

Teorema 4.1. La ecuación reducida de una hipérbola cuando los focos están situados en el eje Ox y $|PF| - |PF'| = \pm 2a$ corresponde a:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (6)$$

- a es el semieje mayor
- b es el semieje menor
- focos $F(c,0)\, F'(-c,0)$
- vértices A, A', B, B'
- B y B' son los cortes de la circunferencia con centro en A y radio c.



Obteniéndose la relación $c^2 = a^2 + b^2$

Ejemplo 4.1. Halla el eje mayor, el eje menor, los vértices, y los focos de la hipérbola

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Solución:
De la ecuación

$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

se tiene:

- Eje mayor $2\,a = 2 \cdot 5 = 10$
- Eje menor $2\,b = 2 \cdot 4 = 8$
- Vértices $A(5,0)$,$A'(-5,0)$,$B(0,4)$ y $B'(0,-4)$
- Los focos. Como $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = 41$,

$$F(\sqrt{41}, 0) \qquad F'(-\sqrt{41}, 0)$$

□

Ejercicio 17. Halla los ejes mayor, los vértices, y los focos de la hipérbola

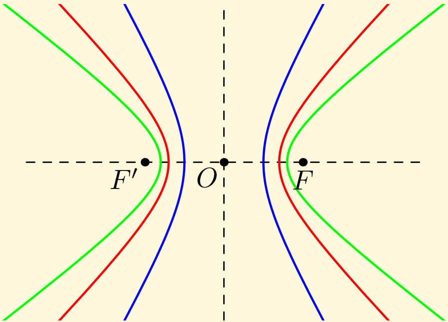
$$3\,x^2 - 6\,y^2 = 12$$

• Excentricidad

Definición 4.2 *Llamamos excentricidad e de una hipérbola al cociente entre la distancia focal y el eje real.*

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

En estas hipérbolas hemos dejado fijo el foco y cambiado el valor del semieje real a. Cuanto más pequeño es a, el valor de la excentricidad e aumenta.



• Cambio de centro

Definición 4.3 *La ecuación de la hipérbola cuando el centro está en el punto $O(u, v)$ es:*

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

Ejercicio 18. Escribe la ecuación de la hipérbola centrada en el origen, de eje real 20 y distancia focal 32.

Ejercicio 19. Escribe la ecuación de la hipérbola centrada en el origen, de excentricidad 1.4 y semidistancia focal 7.

Ejercicio 20. Calcula la excentricidad de la hipérbola

$$\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$$

Ejercicio 21. Calcula la hipérbola

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

si pasa por el punto $P(3\sqrt{5}, -2)$.

- **Ecuación de la tangente**

Teorema 4.2. La ecuación de la tangente a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto $P(x_0, y_0)$ es

$$\boxed{\frac{x_0\, x}{a^2} - \frac{y_0\, y}{b^2} = 1} \tag{8}$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

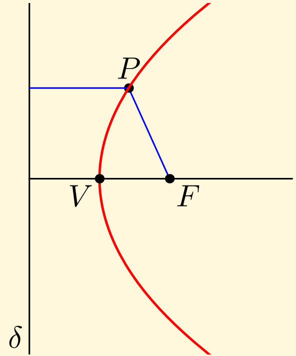
Ejercicio 22. Halla la ecuación de la recta tangente que pasa por $P(0,6)$ a la hipérbola $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2} = 1$

Ejercicio 23. Halla la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $4x^2 - y^2 = 20$ en el punto de ordenada 4 y abcisa positiva.

5. La Parábola

Definición 5.1 *Una parábola es el lugar geométrico de los $P(x,y)$ que equidistan de un recta fija δ (directriz) y de un punto fijo F (foco).*

$$|PF| = d(P,\delta|$$



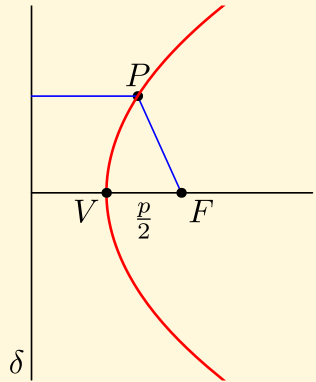
5.1. Ecuación reducida de la parábola

Teorema 5.1. La ecuación reducida de una parábola cuando el foco está en el eje Ox y directriz $\delta \equiv x = -\dfrac{p}{2}$ corresponde a:

$$\boxed{y^2 = 2\,p\,x} \tag{9}$$

Elementos de la parábola

- recta VF es el eje
- Foco $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$
- El vértice es $V(0,0)$
- Directriz $\delta \equiv x = -\dfrac{p}{2}$
- $\overline{VF} = -\dfrac{p}{2}$



Definición 5.2 *Si trasladamos una parábola al vértice $V(u,v)$ su ecuación es:*

$$(y-u)^2 = 2\,p\,(x-v)$$

Ejercicio 24. Halla la ecuación de la parábola de eje paralelo al eje de abcisas sabiendo que su vértice es $V(1,-2)$ y que pasa por el punto $P(4,1)$.

Ejercicio 25. Encontrar el foco y la directriz de la parábola de ecuación.

$$x = -\frac{1}{9}y^2$$

Ejercicio 26. Determine la ecuación de la parábola con vértice $V(0;0)$, que tiene al eje y como eje de simetría y que pasa por el punto $P(-3,3)$.

Ejercicio 27. Encontrar las coordenadas del vértice, el foco y la ecuación de la directriz de cada una de las siguientes parábolas:

a) $y^2 = 2x$

b) $y^2 = -9(x-4)$

c) $(y+5)^2 = \dfrac{4}{3}(x-6)$

d) $x^2 = -4y$

e) $x^2 = -4(y-2)$

f) $(x+1)^2 = 12(y-4)$

Teorema 5.2. La ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 2\,p\,x$ en el punto $P(x_0, y_0)$ es

$$\boxed{y_0\,y = p\,x + p\,x_0} \tag{10}$$

Ejercicio 28. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 10\,x$ en el punto $P(10,10)$.

6. Expresión general de las cónicas

Empezaremos con un ejemplo. Considera la ecuación de segundo grado con dos incógnitas x e y siguiente:

$$2\,x^2 + 3\,y^2 - 4\,x - 12\,y + 8 = 0$$

Para conseguir la ecuación reducida de la cónica se agrupan cuadrados de la siguiente forma

- $2\,x^2 - 4\,x = 2(x^2 - 2x) = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) = 2[(x-1)^2 - 1]$
- $3\,y^2 - 12\,y = 3(y^2 - 4y) = 3(y^2 - 4y + 4 - 4) = 3[(y-2)^2 - 4]$

sustituyendo en la expresión dada se obtiene

$$2[(x-1)^2 - 1] + 3[(y-2)^2 - 4] + 8 = 0$$

operando

$$2(x-1)^2 + 3(y-2)^2 = 6$$

dividiendo por 6, se obtiene la ecuación reducida de la elipse

$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$$

Definición 6.1 *La ecuación general de segundo grado en x e y*

$$\boxed{A\,x^2 + B\,y^2 + C\,x + D\,y + E = 0} \tag{11}$$

corresponde a una de las cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola o parábola. Para llegar a su ecuación reducida se agrupan cuadrados.

Ejercicio 29. Halla los vértices, los focos y la excentricidad de las cónicas siguientes:

(a) $9\,x^2 + 16\,y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

(b) $x^2 - 4\,y^2 - 2\,x - 3 = 0$

(c) $x^2 + 9\,y^2 - 36\,y + 27 = 0$

(d) $y^2 - 12\,y - 8\,x + 20 = 0$

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.
Para conseguir la ecuación reducida se agrupan cuadrados de la siguiente forma

a) $x^2 + y^2 - 4\,x + 10\,y + 25 = 0$

- $x^2 - 4\,x = x^2 - 2 \cdot 2\,x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4$
- $y^2 + 10\,y = y^2 + 2 \cdot 5\,x + 25 - 25 = (y+5)^2 - 25$

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 4 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} C(2,-5) \\ r = 2 \end{array} \right.$$

b) $x^2 + y^2 - 18\,x - 19 = 0$

- $x^2 - 18\,x = x^2 - 2 \cdot 9\,x + 81 - 81 = (x-9)^2 - 81$

$$(x-9)^2 + y^2 = 100 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} C(9,0) \\ r = 10 \end{array} \right.$$

Ejercicio 1

Ejercicio 2.
La ecuación de las circunferencias son

a) de centro $C(1,1)$ y radio $r = 3$.

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$$

b) De centro $C(0,0)$ y radio $r = 2$.

$$x^2 + y^2 = 4$$

Ejercicio 2

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 3. Sea $x^2 + y^2 - 4\,x + 10\,y + 25 = 0$

- $x^2 - 4\,x = x^2 - 2 \cdot 2\,x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4$
- $y^2 + 10\,y = y^2 + 2 \cdot 5\,x + 25 - 25 = (y+5)^2 - 25$

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 4 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} C(2,-5) \\ r = 2 \end{array} \right.$$

a) La circunferencia concéntrica con radio 8

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 64$$

b) La circunferencia concéntrica que pase por $P(2,2)$.

$$(2-2)^2 + (2+5)^2 = r^2 \Longrightarrow r = 7 \Longrightarrow (x-2)^2 + (y+5)^2 = 49$$

Ejercicio 3

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 4. Sea la circunferencia buscada

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

- tiene radio 4, luego $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 16$
- pasa por el origen de coordenadas, luego

$$(0 - x_0)^2 + (0 - y_0)^2 = 16 \Longrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 16$$

- su centro está en la bisectriz del primer cuadrante, luego $y_0 = x_0$, sustituyendo

$$x_0^2 + x_0^2 = 16 \Longrightarrow x_0 = \pm\sqrt{8} \quad y_0 = \pm\sqrt{8}$$

Hay dos soluciones

$$(x - \sqrt{8})^2 + (y - \sqrt{8})^2 = 16$$
$$(x + \sqrt{8})^2 + (y + \sqrt{8})^2 = 16$$

Ejercicio 4

Ejercicio 5. Sea la circunferencia buscada

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

- pasa por los puntos $A(2, 1)$, $B(3, -3)$, luego restando las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}(2 - x_0)^2 + (1 - y_0)^2 = r^2 \\ (3 - x_0)^2 + (-3 - y_0)^2 = r^2\end{array}\right\} \Longrightarrow 2\,x_0 - 8\,y_0 = 13$$

- su centro en la recta $r \equiv x + y - 5 = 0$, luego $x_0 + y_0 - 5 = 0$. Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{r}2\,x_0 - 8\,y_0 = 13 \\ x_0 + y_0 - 5 = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow y_0 = -\frac{3}{10} \quad x_0 = \frac{53}{10}$$

Sustituyendo arriba se obtiene el radio, luego

$$\left(x - \frac{53}{10}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{36106}{100}$$

Ejercicio 5

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 6. Si los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos $A(2,1)$, $B(3,-3)$, su centro es el punto medio de ellos

$$C = \frac{1}{2}(A+B) = \left(\frac{5}{2}, -1\right)$$

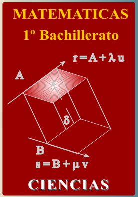
El radio es la distancia del centro a un extremo del diámetro:

$$r = d(C,A) = \sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2 + (-1-1)^2} = \frac{5}{2}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{25}{4}$$

Ejercicio 6



MaTEX
CÓNICAS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 7. El radio coincide con la distancia del centro a la recta tangente $s \equiv 4\,x - 3\,y + 6 = 0$.

$$
\begin{aligned}
r = d(C; s) =& \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\
r =& \frac{|4\,(2) - 3\,(3) + 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \\
r =& \frac{5}{\sqrt{25}} \\
r =& 1
\end{aligned}
$$

La ecuación pedida es:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

Ejercicio 7

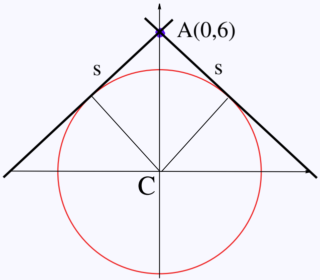
Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 8. De la circunferencia $x^2+y^2=25$, su centro es $C(0,0)$ y su radio $r=5$. La recta s buscada como pasa por el punto $A(0,6)$

$$s \equiv y-6 = m\,(x-0) \Longrightarrow m\,x - y + 6 = 0$$

Hallamos su pendiente m con la condición de tangencia, $d(C,s)=5$. Por la distancia de punto a recta

$$\begin{aligned} d(C;s) &= \frac{|A\,x_0+B\,y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ 5 &= \frac{|m\,(0)-(0)+6|}{\sqrt{m^2+1^2}} \\ 5 &= \frac{6}{\sqrt{m^2+1}} \\ 5\,\sqrt{m^2+1} &= 6 \\ m &= \pm\,\frac{\sqrt{11}}{5} \end{aligned}$$



Ejercicio 8

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 9. De la circunferencia $x^2+y^2=16$, su centro es $C(0,0)$ y su radio $r=4$. La recta s buscada es paralela a la recta $r \equiv 2\,x - y + 3 = 0$, luego su ecuación es de la forma

$$s \equiv 2\,x - y + k = 0$$

Hallamos el término k con la condición de tangencia, $d(C,s)=4$.

$$\begin{aligned} d(C;s) =& \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ 4 =& \frac{|2\,(0) - (0) + k|}{\sqrt{2^2+1^2}} \\ 4 =& \frac{|k|}{\sqrt{5}} \\ |k| =& 4\,\sqrt{5} \Longrightarrow \boxed{k = \pm 4\,\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Hay dos soluciones:

$$s \equiv 2\,x - y \pm 4\,\sqrt{5} = 0$$

Ejercicio 9

Ejercicio 10. Sea el centro $C(x_0, y_0)$ de las circunferencias que pasan por los puntos $A(2,0)$ y $B(0,1)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (2-x_0)^2 + (0-y_0)^2 = r^2 \\ (0-x_0)^2 + (1-y_0)^2 = r^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} (2-x_0)^2 + (0-y_0)^2 = r^2 & (1) \\ (0-x_0)^2 + (1-y_0)^2 = r^2 & (2) \end{array} \right.$$

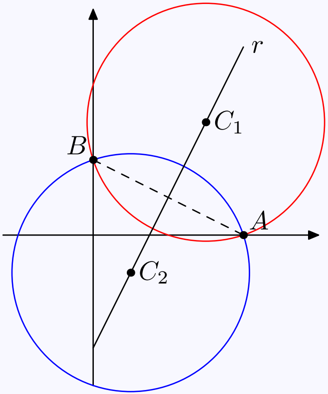
Desarrollando y restando (1) con (2) se obtiene

$$r : \boxed{4\,x_0 - 2\,y_0 + 3 = 0}$$

que corresponde a una recta, la mediatriz del segmento AB.

De entre ellas la que tiene el centro que equidista de los ejes coordenados, es la que cumple que $x_0 = y_0$ o bien $x_0 = -y_0$. Sustituyendo en la ecuación anterior se obtienen dos circunferencias de centros respectivos

$$C_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \qquad C_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

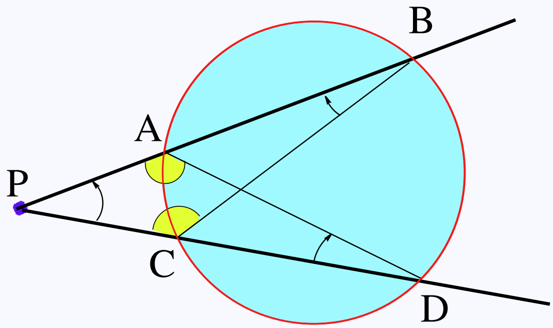


Ejercicio 10

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Prueba del Teorema 2.1.
Observa en el dibujo los triángulos PAD y PCB. Veamos que son semejantes. Tienen un ángulo común en $\widehat{P}$ y los ángulos, $\widehat{PBC}$ y $\widehat{PDA}$ son iguales por ser inscritos que abarcan el mismo arco AC de la circunferencia. Por semejanza se tiene

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Longrightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Prueba del Teorema 3.1.

$$\begin{aligned}
\overline{PF} + \overline{PF'} &= 2\,a \\
\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a \\
\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 \\
(x-c)^2+y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2 \\
4xc + 4a^2 &= 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \\
x^2c^2 + a^4 + 2a^2xc &= a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2xc + a^2y^2 \\
a^2(a^2-c^2) &= x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 \qquad (c^2 = a^2 - b^2) \\
a^2b^2 &= x^2b^2 + a^2y^2
\end{aligned}$$

Dividiendo por $a^2\,b^2$ y ordenando

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 11.
De la ecuación

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$$

se tiene:

- eje mayor $2a = 2 \cdot \sqrt{6}$
- eje menor $2b = 2 \cdot \sqrt{2}$
- los vértices $A(\sqrt{6}, 0)$,$A'(-\sqrt{6}, 0)$,$B(0, \sqrt{2})$ y $B'(0, -\sqrt{2})$
- los focos $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$, $F(2, 0)$ y $F'(-2, 0)$
- excentricidad $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = 0{,}816$

Ejercicio 11

Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 12.
Dividiendo por 12 se tiene la ecuación canónica

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

se tiene:

- eje mayor $2a = 2 \cdot \sqrt{4} = 4$
- eje menor $2b = 2 \cdot \sqrt{2}$
- los vértices $A(2,0)$,$A'(-2,0)$,$B(0,\sqrt{2})$ y $B'(0,-\sqrt{2})$
- los focos $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2}$, $F(\sqrt{2},0)$ y $F'(-\sqrt{2},0)$
- excentricidad $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7$

Ejercicio 12

Ejercicio 13.

$$b^2 = a^2 - c^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Longrightarrow b = 8$$
$$\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{8^2} = 1$$

Ejercicio 13

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 14.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{a} = 0{,}4 \Longrightarrow a = 5$$
$$b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 2^2 = 21 \Longrightarrow b = \sqrt{21}$$
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$$

Ejercicio 14

Ejercicio 15.
Sustituyendo en la ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

los puntos $P(1,-1)$ y $Q(0,-4)$ se plantea un sistema y se resuelve:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{1^2}{a^2}+\dfrac{(-1)^2}{b^2}=1 \\ \dfrac{0^2}{a^2}+\dfrac{(-4)^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1 \\ \dfrac{16}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Longrightarrow b=4 \quad a=\frac{4}{\sqrt{15}}$$

Ejercicio 15

MATEMATICAS 1º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
CÓNICAS
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Prueba del Teorema 3.2.

Hallamos la derivada de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto $P(x_0, y_0)$

$$\frac{2\,x}{a^2} + \frac{2\,y\,y'}{b^2} = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

$$y - y_0 = m\,(x - x_0) \qquad [m = y'(x_0)]$$

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}\,(x - x_0) \qquad [\text{operando}]$$

$$b^2\,x_0\,x + a^2\,y_0\,y = b^2\,x_0^2 + a^2\,y_0^2 \qquad [b^2\,x_0^2 + a^2\,y_0^2 = 1]$$

ecuación de la tangente

$$\boxed{\frac{x_0\,x}{a^2} + \frac{y_0\,y}{b^2} = 1}$$

Ejercicio 16.
Si el punto de tangencia es $A(x_0, y_0)$ la tangente es

$$\frac{x_0\,x}{18} + \frac{y_0\,y}{9} = 1$$

el punto $A(x_0, y_0)$ está en la elipse y en la tangente, luego se palntea un sistema y se resuelve:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x_0^2}{18} + \dfrac{y_0^2}{9} = 1\\[2ex] \dfrac{4x_0}{18} + \dfrac{y_0}{9} = 1\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} x_0^2 + 2\,y_0^2 = 18\\[1ex] 2\,x_0 + y_0 = 9\end{array}\right\} y_0 = 9 - 2\,x_0$$

$$x_0^2 + 2\,(9 - 2\,x_0)^2 = 18$$

$$x_0^2 - 8\,x_0 + 16 = 0 \Longrightarrow x_0 = 4 \quad y_0 = 1$$

la ecuación de la tangente es:

$$\frac{4\,x}{18} + \frac{y}{9} = 1$$

Ejercicio 16

Prueba del Teorema 4.1.

$$\begin{aligned}
\overline{PF} - \overline{PF'} &= 2\,a \\
\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a \\
(\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 &= (2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2})^2 \\
(x-c)^2+y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2 \\
4xc + 4a^2 &= 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \\
x^2c^2 + a^4 + 2a^2xc &= a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2xc + a^2y^2 \\
a^2(a^2-c^2) &= x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 \qquad (c^2 = a^2+b^2) \\
-a^2b^2 &= -x^2b^2 + a^2y^2
\end{aligned}$$

Dividiendo por $a^2\,b^2$ y ordenando

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 17.
Dividiendo por 12 se tiene la ecuación canónica o reducida

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$$

se tiene:

- eje mayor $2a = 2 \cdot \sqrt{4} = 4$
- eje menor $2b = 2 \cdot \sqrt{2}$
- los vértices $A(2,0)$,$A'(-2,0)$,$B(0,\sqrt{2})$ y $B'(0,-\sqrt{2})$
- los focos $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{6}$, $F(\sqrt{6},0)$ y $F'(-\sqrt{6},0)$

Ejercicio 17

Ejercicio 18.

$$b^2 = c^2 - a^2 = 16^2 - 10^2 = 156 \Longrightarrow b = \sqrt{156}$$
$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{156} = 1$$

Ejercicio 18

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 19.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{7}{a} = 1{,}4 \Longrightarrow a = 5$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 7^2 - 5^2 = 24 \Longrightarrow b = \sqrt{24}$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$$

Ejercicio 19

Ejercicio 20.

$$c^2 = a^2 + b^2 = 80 + 20 = 100 \Longrightarrow c = \sqrt{10}$$
$$e = \frac{c}{a} = \frac{10}{\sqrt{80}} \approx 1{,}12$$

Ejercicio 20

Ejercicio 21.
Sustituyendo $P(3\sqrt{5}, -2)$ en la ecuación

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow b = \frac{10}{\sqrt{20}}$$

Ejercicio 21

Prueba del Teorema 4.2.
Hallamos la derivada de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto $P(x_0, y_0)$

$$\frac{2\,x}{a^2} - \frac{2\,y\,y'}{b^2} = 0 \Longrightarrow y' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

$$y - y_0 = m\,(x - x_0) \qquad [m = y'(x_0)]$$

$$y - y_0 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}\,(x - x_0) \qquad [\text{operando}]$$

$$b^2\,x_0\,x - a^2\,y_0\,y = b^2\,x_0^2 - a^2\,y_0^2 \qquad [b^2\,x_0^2 - a^2\,y_0^2 = 1]$$

ecuación de la tangente

$$\boxed{\frac{x_0\,x}{a^2} - \frac{y_0\,y}{b^2} = 1}$$

Ejercicio 22.
Si el punto de tangencia es $A(x_0, y_0)$ la tangente es

$$\frac{x_0\, x}{4} - \frac{y_0\, y}{2} = 1$$

el punto $A(x_0, y_0)$ está en la hipérbola y en la tangente, luego se plantea un sistema y se resuelve:

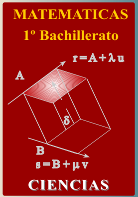
$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{x_0^2}{4} - \dfrac{y_0^2}{2} = 1 \\ \dfrac{0\, x_0}{4} - \dfrac{6\, y_0}{2} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} x_0^2 - 2\, y_0^2 = 4 \\ -3\, y_0 = 1 \end{array}\Bigg\} y_0 = -1/3$$

$$x_0^2 - 2\,(\frac{1}{3})^2 = 4 \Longrightarrow x_0 = \pm\frac{\sqrt{38}}{3} \quad y_0 = -\frac{1}{3}$$

hay dos tangentes :

$$\pm\sqrt{38}\,\frac{x}{12} + \frac{y}{6} = 1$$

Ejercicio 22



Ejercicio 23.
El punto P de ordenada 4 y abcisa positiva es:

$$4x^2 - (4)^2 = 20 \Longrightarrow x = \pm 3 \quad P(3,4)$$

La ecuación de la tangente en un punto cualquiera $P(x_0, y_0)$ de la hipérbola es:

$$4\,x_0\,x - y_0\,y = 20$$

luego la tangente en $P(3,4)$,

$$12\,x - 4\,y = 20$$

Ejercicio 23

Prueba del Teorema 5.1.

$$
\begin{aligned}
d(M,\mathbf{d}) &= d(M,F) \\
x+\frac{p}{2} &= \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} \\
\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2
\end{aligned}
$$

Operando y ordenando

$$y^2 = 2\,p\,x$$

Ejercicio 24.

Sustituyendo el vértice $V(1,-2)$ y el punto $P(4,1)$ en la ecuación de la parábola

$$(y-y_0)^2 = 2\,p\,(x-x_0)$$

se tiene

$$(1-(-2))^2 = 2\,p\,(4-1) \Longrightarrow p = \frac{3}{2}$$

luego la parábola es

$$(y+2)^2 = 3\,(x-1)$$

Ejercicio 24

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 25.
La ecuación de la parábola

$$y^2 = -9\,x = 2\,p\,x \Longrightarrow p = -\frac{9}{2}$$

luego el foco es

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right) = F\left(-\frac{9}{4}, 0\right)$$

y la directriz

$$d \equiv x = -\frac{p}{2} = \frac{9}{4}$$

Ejercicio 25

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 26.
La ecuación de la parábola con vértice $V(0;0)$, que tiene al eje y como eje de simetría es

$$y^2 = 2\,p\,x$$

como pasa por el punto $P(-3,3)$

$$3^2 = 2\,p\,(-3) \Longrightarrow p = -1$$

y

$$y^2 = -2\,x$$

Ejercicio 26

Ejercicio 27.
Parábolas de eje horizontal

	Vértice	Foco	directriz
	$V(u,v)$	$F(u+\dfrac{p}{2},v)$	$x=u-\dfrac{p}{2}$
$y^2=2x$	$V(0,0)$	$F(\dfrac{1}{2},0)$	$x=-\dfrac{1}{2}$
$y^2=-9(x-4)$	$V(4,0)$	$F(\dfrac{7}{4},0)$	$x=\dfrac{25}{4}$
$(y+5)^2=\dfrac{4}{3}(x-6)$	$V(6,-5)$	$F(\dfrac{19}{3},-5)$	$x=\dfrac{17}{3}$

Parábolas de eje vertical

	$V(u,v)$	$F(u,v+\dfrac{p}{2})$	$y=v-\dfrac{p}{2}$
$x^2=-4y$	$V(0,0)$	$F(0,-1)$	$y=1$
$x^2=-4(y-2)$	$V(0,2)$	$F(0,1)$	$y=3$
$(x+1)^2=12(y-4)$	$V(-1,4)$	$F(-1,7)$	$y=1$

Ejercicio 27

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Prueba del Teorema 5.2.
Hallamos la derivada de $y^2 = 2\,p\,x$ en el punto $P(x_0, y_0)$

$$2\,y\,y' = 2\,p \Longrightarrow y' = \frac{p}{y_0}$$

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= m\,(x - x_0) && [m = y'(x_0)] \\
y - y_0 &= \frac{p}{y_0}\,(x - x_0) && [\text{operando}] \\
y\,y_0 - y_0^2 &= p\,(x - x_0) && [y_0^2 = 2\,p\,x_0] \\
y\,y_0 &= p\,x + p\,x_0
\end{aligned}$$

ecuación de la tangente

$$\boxed{y\,y_0 = p\,x + p\,x_0}$$

Ejercicio 28.
Como el punto $P(10,10)$ está en la parábola, la tangente es

$$10\,y = 5\,x + 5\,(10) \Longrightarrow \boxed{2\,y = x + 10}$$

Ejercicio 28

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 29(a) Para conseguir la ecuación reducida de la cónica

$$9\,x^2 + 16\,y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$$

se agrupan cuadrados de la siguiente forma

- $9\,x^2 - 36\,x = 9(x^2 - 4x) = 9(x^2 - 4x + 4 - 4) = 9[(x-2)^2 - 4]$
- $16\,y^2 + 96\,y = 16(y^2 + 6y) = 16(y^2 + 6y + 9 - 9) = 16[(y+3)^2 - 9]$

sustituyendo y operando en la expresión dada se obtiene

$$9(x-2)^2 + 16(y+3)^2 = 144$$

dividiendo por 144, se obtiene la ecuación reducida de la elipse

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

$$0(2,-3) \quad a = 4 \quad b = 3 \quad c = \sqrt{7} \quad e = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$\square$

Ejercicio 29(b) Para conseguir la ecuación reducida de la cónica

$$x^2 - 4\,y^2 - 2\,x - 3 = 0$$

se agrupan cuadrados de la siguiente forma

- $x^2 - 2\,x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$

  sustituyendo y operando en la expresión dada se obtiene

$$(x-1)^2 - 4\,y^2 = 4$$

dividiendo por 4, se obtiene la ecuación reducida de la hipérbola

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$$

$$0(1,0) \quad a = 2 \quad b = 1 \quad c = \sqrt{5} \quad e = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$\square$

Ejercicio 29(c) Para conseguir la ecuación reducida de la cónica

$$x^2 + 9\,y^2 - 36\,y + 27 = 0$$

se agrupan cuadrados de la siguiente forma

- $9\,y^2 - 36\,y = 9(y^2 - 4y) = 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = 9[(y-2)^2 - 4]$

  sustituyendo y operando en la expresión dada se obtiene

$$x^2 + 9(y-2)^2 = 9$$

dividiendo por 9, se obtiene la ecuación reducida de la elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$

$$0(0,2) \quad a = 3 \quad b = 1 \quad c = \sqrt{8} \quad e = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$\square$

Ejercicio 29(d) Para conseguir la ecuación reducida de la cónica

$$y^2 - 12\,y - 8\,x + 20 = 0$$

se agrupan cuadrados de la siguiente forma

- $y^2 - 12\,y = y^2 - 12y + 36 - 36 = (y-6)^2 - 36$

sustituyendo y operando en la expresión dada se obtiene la ecuación reducida de la parábola

$$(y-6)^2 = 8(x+2)$$

$$V(6,-2) \qquad p = 4$$

Foco

$$F(u + \frac{p}{2}, v) = F(8,-2)$$

y directriz

$$\delta \equiv x = u + \frac{p}{2} = 2$$

$\square$