Proyecto MaTEX

# Derivadas

**Fco Javier González Ortiz**

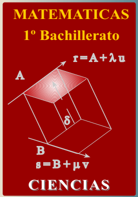
## Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo



**D.L.:SA-1415-2004**

ISBN: 84-688-8267-4




MaTEX

DERIVADAS

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

# Tabla de Contenido




MaTEX

DERIVADAS


◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

# 1. Introducción

Los científicos de los últimos años del siglo XVII dedicaron gran parte de su tiempo y energía a resolver el problema de la tangente que tiene relación en cuestiones como las siguientes:

- En óptica, el ángulo con el que un rayo de luz incide en una superficie de una lente está definida en términos de la tangente a la superficie.
- En física, la dirección de un cuerpo en movimiento en un punto de su recorrido es la de la tangente en ese punto.
- En geometría, al ángulo entre dos curvas que intersecan es el ángulo entre las tangentes en el punto de intersección.
- ¿Cómo encontraremos la ecuación de la tangente? Usaremos el método ya desarrollado por Fermat en 1629.

El concepto de derivada es el fundamento del Cálculo. La definición de derivada puede abordarse de dos formas. Una es geométrica (como la pendiente de una curva) y la otra es física (como razón de cambio).

## 1.1. Variación media

La siguiente tabla da el precio en euros[1] de un producto en 8 años sucesivos

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| precio | 10 | 18 | 24 | 28 | 30 | 30 | 28 | 24 |
| año | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Si llamamos $P(x)$ a la función precio y $x$ designa los años, podemos preguntar cuál es la variación o incremento del precio en el intervalo $[0, 1]$, y ésta sería

$$\Delta P = P(1) - P(0) = 18 - 10 = 8 \,\text{euros}.$$

De forma análoga, la variación o incremento del precio en el intervalo $[1, 3]$, es

$$\Delta P = P(3) - P(1) = 28 - 18 = 10 \,\text{euros}$$

Ahora bien, la variación media es el incremento por unidad de tiempo.

- La variación media del precio en el intervalo $[0, 1]$ es

$$V.M. = \frac{P(1) - P(0)}{1 - 0} = \frac{18 - 10}{1} = 8 \,\text{euros/año}$$

- La variación media del precio en el intervalo $[1, 3]$ es

$$V.M. = \frac{P(3) - P(1)}{3 - 1} = \frac{28 - 18}{2} = 5 \,\text{euros/año}$$

[1] Hemos cambiado los números para que sean más cómodos de usar

- La variación media del precio en el intervalo $[3, 7]$, es

$$V.M. = \frac{P(7) - P(3)}{7 - 3} = \frac{24 - 28}{4} = -1 \, \text{euros/año}$$

que indica que el precio ha disminuido a razón de un euro por año.

De forma general definimos de la variación media para una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ como

**Variación Media en [a,b]**

$$V.M. = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1}$$

En el intervalo $[a, b]$ la VM representa gráficamente la pendiente del segmento que va desde el punto $A(a, f(a))$ al punto $B(b, f(b))$.

En el gráfico siguiente se muestra como varía gráficamente la VM en distintos intervalos.

- **Interpretación geométrica**

En $[1,3]$

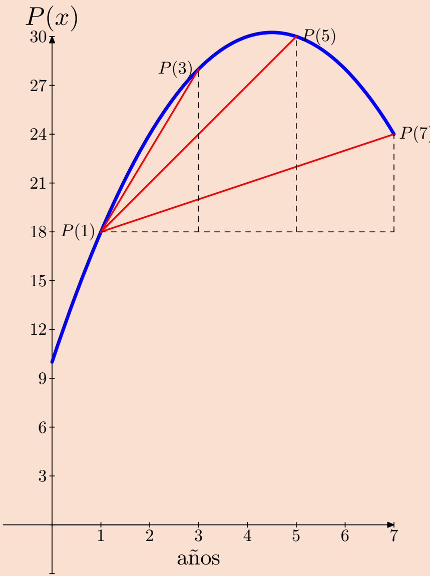
$$V.M. = \frac{P(3)-P(1)}{3-1} = \frac{28-18}{2} = 5\,\text{euros/año}$$

En $[1,5]$

$$V.M. = \frac{P(5)-P(1)}{5-1} = \frac{30-18}{4} = 3\,\text{euros/año}$$

En $[1,7]$

$$V.M. = \frac{P(7)-P(1)}{7-1} = \frac{24-18}{6} = 1\,\text{euros/año}$$




La $V.M.$ representa la pendiente del segmento que une los puntos de la curva.

MATEMATICAS 1º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DERIVADAS
Doc Doc
Volver Cerrar

## 1.2. Variación instantánea

Como el intervalo $[a, a+h]$ varía con $h$, si hacemos $h$ cada vez más pequeño, es decir hacemos tender $h$ a 0, obtenemos la variación instantánea VI.

**Variación Instantánea en a**

$$V.I.(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2}$$

La expresión anterior es muy importante en matemáticas y se relaciona con el cálculo de la recta tangente de una función en un punto, como mostraremos a continuación.

En el ejemplo anterior de los precios, la $V.I.$ significa la razón de cambio del precio en un instante de tiempo.

Gráficamente indica la pendiente de la tangente de una función en el punto $(x, f(x))$.

**Ejemplo 1.1.** Si $P(x)$ es precio de un producto y $x$ designa los años, siendo

$$P(x) = -x^2 + 9\,x + 10$$

hallar la $V.I.$ en el año $x = 1$ y en el año $x = 7$

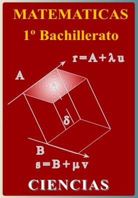
*Solución*: El precio en el año $x = 1$ es $P(1) = 18$ y la $V.I.$ es

$$\begin{aligned} VI(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{P(1+h) - P(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-(1+h)^2 + 9(1+h) + 10 - 18}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h^2 + 7h}{h} = \lim_{h\to 0} (-h + 7) = 7 \end{aligned}$$

es decir, en $x = 1$ el precio está aumentando a razón de $VI(1) = 7$ euros/año

$$\begin{aligned} VI(7) &= \lim_{h\to 0} \frac{P(7+h) - P(7)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-(7+h)^2 + 9(7+h) + 10 - 24}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h^2 - 5h}{h} = \lim_{h\to 0} (-h - 5) = -5 \end{aligned}$$

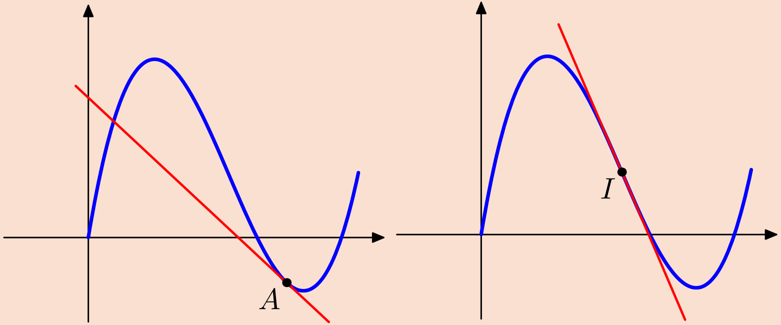
es decir, en $x = 7$ el precio está disminuyendo a razón de $VI(7) = -5$ euros/año $\square$



## 1.3. El problema de la tangente

- **Idea intuitiva de la reta tangente**

Se llama tangente a una curva en un punto, a la recta que pasa por el punto con la misma dirección que la curva.
¿Puede la recta tangente cortar a la curva en más de un punto?.
¿Puede atravesar la recta tangente a la curva por el punto de tangencia?.

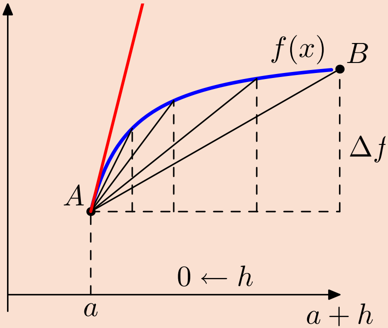



Las figuras muestran la respuesta afirmativa a ambas preguntas.

A continuación veremos como se determina la pendiente de la recta tangente.

## • Ecuación de la reta tangente

Dada una función $y = f(x)$ y un punto $A(a, f(a))$ del grafo de la función se trata de determinar la pendiente de la recta tangente al grafo de la función en el punto $A$. Consideremos la recta secante desde $A$ a $B$. Siendo los puntos $A(a, f(a))$ y $B(a+h, f(a+h))$,




la secante $AB$ tiene pendiente

$$m = \frac{\triangle f}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A medida que $h \to 0$, $B \to A$, y definimos la pendiente de la tangente $m_{tan}$ como

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esta pendiente la escribiremos como $f'(a)$ quedando la ecuación de la tangente de la forma

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \tag{3}$$

## 2. Definición de derivada en un punto

**Definición 2.1** *Sea $f$ una función y $a \in Dom(f)$. Definimos derivada de $f$ en $x = a$ al siguiente límite cuando existe y es finito*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{4}$$

Observaciones:

- Cuando dicho límite sea infinito se dice que la función no es derivable, aunque tiene derivada infinita. (Gráficamente significa que la recta tangente en ese punto es vertical).
- Para que la derivada exista, la función tiene que estar definida en un entorno del punto.
- Observar que la definición de derivada coincide con la definición de pendiente de la recta tangente y, con la definición de variación instantánea
- No olvidar que la derivada es un límite, aunque buscaremos reglas para calcular derivadas sin tener que hacer dicho límite.



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejemplo 2.1.** Hallar en $x = 2$ la tangente a la curva $f(x) = x^2$.

*Solución*: El punto de la curva en $x = 2 \Longrightarrow f(2) = 2^2 = 4,\ A(2, 4)$. La pendiente de la tangente es

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h\to 0} (4 + h) = 4 \end{aligned}$$

Siendo la recta tangente

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

$\square$

**Ejemplo 2.2.** Hallar en $x = 1$ la tangente a la curva $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

*Solución*: El punto de la curva en $x = 1 \Longrightarrow f(1) = \dfrac{1}{1} = 1,\ A(1, 1)$. La pendiente de la tangente es

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{(1+h)\,h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{1+h} = -1 \end{aligned}$$

Siendo la recta tangente

$$y - 1 = -(x - 1)$$

$\square$

**Ejercicio 1.** Hallar la pendiente de la tangente en $x = 1$ de las funciones:

*a*) $f(x) = 1 - 3x$ *b*) $g(x) = 2 + 5x$

**Ejercicio 2.** El coste de extraer $T$ toneladas de cobre de una mina es $C(T)$ en miles de euros. A partir de los siguientes datos

$$C(10) = 200 \qquad C(20) = 300 \qquad C'(10) = 8$$

dar las unidades y explicar en palabras el significado de las siguientes expresiones:

*a*) $C(20) - C(10)$ *b*) $\dfrac{C(20) - C(10)}{20 - 10}$ *c*) $C'(10) = 8$

En las páginas anteriores hemos obtenido la expresión

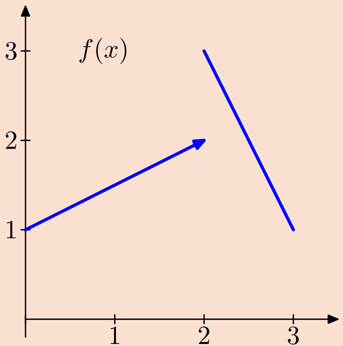
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

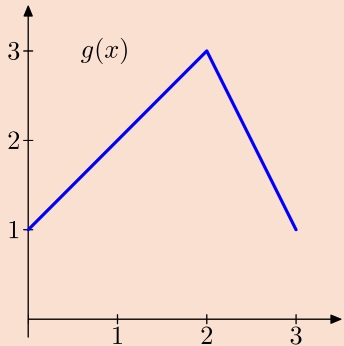
como definición de razón de cambio o de V.I. (variación instantánea) y como la pendiente de la recta tangente a una función. De una forma general la llamamos **derivada** de la función en el punto $a$ y la denotamos por $f'(a)$.

A continuación estudiaremos la relación que hay entre una función que es continua en un punto y que tenga derivada en el mismo.
Posteriormente con la definición anterior aprenderemos a calcular las derivadas de las funciones más habituales sin necesidad de realizar el límite.

- **Derivabilidad y continuidad**

En el capítulo anterior se estudió la continuidad de las funciones. La derivabilidad de una función es una propiedad más «fuerte» que la continuidad, ya que no todas las funciones continuas tienen tangente en un punto.
En al figura se representan dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. En el punto $x = 2$ dichas funciones no son derivables y no tienen tangente en dicho punto. En $f(x)$ por no ser continua y en $g(x)$ porque cambia la pendiente «bruscamente» en dicho punto.




**Teorema 2.1.** Si $f(x)$ es derivable en $x = a$ entonces es continua en $a$.

- **Derivadas laterales**

Si el límite que define la derivada lo tomamos sólamente por la derecha o por la izquierda, obtenemos las derivadas laterales.

**Definición 2.2** *Se llaman derivada por la derecha y derivada por la izquierda, respectivamente, a los siguientes límites, si existen y son finitos:*

1. *Definimos la derivada por la izquierda de $f$ en $a$ cuando*

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{existe} \tag{5}$$

2. *Definimos la derivada por la derecha de $f$ en $a$ cuando*

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{existe} \tag{6}$$

**Teorema 2.2.** Sea $f$ una función definida en un intervalo abierto conteniendo a $x$, entonces $f'(x)$ existe si y solo si existen las derivadas laterales $f'(x^-)$ y $f'(x^+)$ y son iguales. En este caso

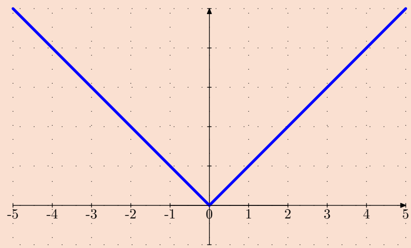
$$f'(x) = f'(x^-) = f'(x^+)$$

*Demostración*: Se deduce de la propia definición de límite, ya que para que un límite exista deben existir los límites laterales y ser iguales. □

**Ejemplo 2.3.** Demostrar que $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.

*Solución*: Siendo $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \leq 0 \\ x & > 0 \end{cases}$

$y = |x|$



$$
\begin{aligned}
f'(0^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \\
f'(0^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1
\end{aligned}
$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ la función no es derivable en $x = 0$

$\square$

**Ejercicio 3.** Estudiar la derivabilidad de $f(x) = x - |1 - x|$ en $x = 1$.

**Ejercicio 4.** Probar que $f(x)$ es derivable en $x = 1$

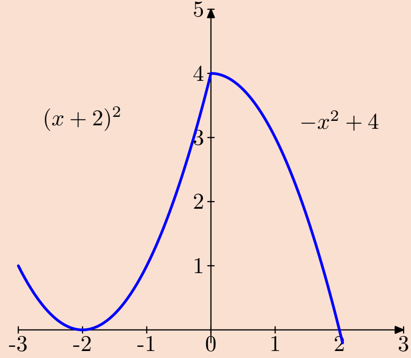
$$
f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1+x}{2} & 1 \leq x \end{cases}
$$

**Ejemplo 2.4.** Analizar gráfica y analíticamente la derivada en $x = 0$ de $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x < 0 \\ -x^2 + 4 & 0 \leq x \end{cases}$$

*Solución*: Hallamos las derivadas laterales $f'(0^-)$y $f'(0^+)$

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(h+2)^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 + 4h}{h} = \mathbf{4} \\ f'(0^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(-h^2+4) - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} (-h) = \mathbf{0} \end{aligned}$$




Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ la función no es derivable en $x = 0$.
En el gráfico se aprecia que la función es continua pero no es derivable.. En el punto $x = 0$ presenta un «pico» o cambio de dirección. □

◀ Pulsa y elige el botón Derivadas y realiza la siguiente práctica sobre los ejemplos anteriores.

**Práctica 2.1.**

*a*) Sea la función: $f(x) = |x|$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `abs(x)` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón controlador y observa que la función no es derivable en $x = 0$.

*b*) Sea la función: $f(x) = 1 - |1 - x|$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `1-abs(1-x)` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón controlador y observa que la función no es derivable en $x = 1$.

*c*) Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1+x}{2} & 1 \leq x \end{cases}$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `x<1 ? sqrt(x):(1+x)/2` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón controlador y observa que la función es derivable en $x = 1$.

*d*) Sea la función: $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x \leq 0 \\ -x^2 + 4 & 0 < x \end{cases}$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `x<0 ? (x+2)^2:-x^2+4` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón controlador y observa que la función no es derivable en $x = 0$.

◀

Test. Si $f(x)$ es continua en $x = a$ entonces es derivable.

(a) Si (b) No

## 3. Función Derivada

**Definición 3.1** *Sea $f$ una función. Si calculamos la derivada de $f$ en cualquier $x$ que se cumpla*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \textit{existe}$$

*hemos definido la función derivada $f'(x)$ de la función $f$.*

En general se tiene que $Dom(f') \subseteqq Dom(f)$

**Ejercicio 5.** Sea la función $f(x) = \sqrt{x}$. Demuestra con la definición de derivada que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

y comprobar que $Dom(f') \subsetneqq Dom(f)$.

A continuación vamos a obtener las reglas de derivación de las funciones elementales

## 4. Reglas de Derivación

### • Derivada de una constante

**Teorema 4.1.** Sea $f$ una función constante $f(x) = c \quad \forall x \in R$, siendo $c$ un número real, entonces

$$f'(x) = [c]' = 0 \quad \forall x \in R$$

### • Derivada de la potencia

**Teorema 4.2.** (Regla de la potencia)

$$\boxed{f(x) = x^n \Longrightarrow \quad f'(x) = [x^n]' = n\, x^{n-1} \qquad x \in R} \qquad (7)$$

*Nota al Teorema.* La regla anterior se extiende y funciona cuando el exponente es cualquier **número real**.

**Ejemplo 4.1.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = x^6 \qquad g(x) = x^{-5} \qquad h(x) = x^{5/3}$$

*Solución*: $f'(x) = 6x^5 \qquad g'(x) = -5x^{-6} \qquad h'(x) = \dfrac{5}{3}x^{2/3}$ □

**Ejercicio 6.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = 2x^{13}$ *b*) $f(x) = \sqrt{x^3}$

*c*) $f(x) = \sqrt[5]{x^7}$ *d*) $f(x) = 2\,x^{-30}$

## • Regla de la suma

**Teorema 4.3.** (Derivada de la suma) Sean las funciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) \tag{8}$$

$$\boxed{y = u + v \Longrightarrow \quad y' = [u + v]' = u' + v' \qquad (9)}$$

**Ejemplo 4.2.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = x^3 + x^4 \qquad g(x) = x^2 - x^{-3}$$

*Solución*:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x^3 \qquad g'(x) = 2x + 3x^{-4}$$

$\square$

**Ejercicio 7.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = 3\,x^2 - 5\,x^{-3}$ *b*) $f(x) = x^2 - 3,\, x^5$

*c*) $f(x) = x^{10} + x^{-10}$ *d*) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^5}$

*e*) $f(x) = x^8 + x^{8,003}$ *f*) $f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[5]{x}$

## • Regla del producto

**Teorema 4.4.** (Derivada del producto) Sean las funciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{10}$$

$$\boxed{y = u \cdot v \Longrightarrow \quad y' = [u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'} \tag{11}$$

**Ejemplo 4.3.** Hallar la derivada del producto

$$f(x) = (x^3 + x^4)(x^2 - x^{-3})$$

*Solución*:

$$f'(x) = (3x^2 + 4x^3) \cdot (x^2 - x^{-3}) + (x^3 + x^4) \cdot (2x + 3x^{-4})$$

□

**Ejercicio 8.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = (x^2 + 10)(1 - x^2)$

*b*) $f(x) = (x + x^2 + 1) \cdot (1 + x)$

*c*) $f(x) = (x^{10} + 1)(1 - x)$

*d*) $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot (1 - x^2)$

*e*) $f(x) = (x^2 + x^3) \cdot (3 + x)$

*f*) $f(x) = (\sqrt{x^3} + x) \cdot (x - \sqrt[5]{x})$

MATEMATICAS 1º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
DERIVADAS
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

- **Regla del cociente**

**Teorema 4.5.** (Derivada del cociente) Sean $u = f(x)$ y $v = g(x)$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{12}$$

$$y = \frac{u}{v} \Longrightarrow \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \tag{13}$$

**Ejemplo 4.4.** Hallar la derivada del cociente $f(x) = \dfrac{x^3 + x^4}{x^2 - x^{-3}}$

*Solución*:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x^3)(x^2 - x^{-3}) - (x^3 + x^4)(2x + 3x^{-4})}{(x^2 - x^{-3})^2}$$

□

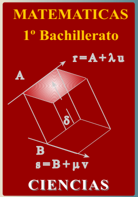
**Ejercicio 9.** Calcular las derivadas.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^{10} + 1}{1 - x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x + 3}$



## • Regla de la cadena

**Teorema 4.6.** (Regla de la cadena) Sea las funciones $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Supongamos que $g$ es derivable en $x$ y $f$ es derivable en $u$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es derivable en $x$ y su derivada es

$$\boxed{y = f(g(x)) \Longrightarrow \quad y' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad (14)}$$

**Ejemplo 4.5.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = (2x + x^2 + 5)^3 \quad g(x) = (2 - x^{12})^6$$

*Solución*:

$$f'(x) = 3(2x + x^2 + 5)^2 (2 + 2\,x)$$
$$g'(x) = 6(2 - x^{12})^5 (-12\,x^{11})$$

□

**Ejercicio 10.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = (1 + 2\,x)^3$

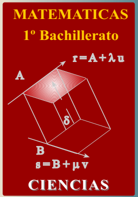
*b*) $f(x) = (x + x^2)^3$

*c*) $f(x) = (x^{10} + 1)^2$

*d*) $f(x) = (2x^3 + x)^3$

*e*) $f(x) = x^2 (2x^3 + x)^3$

*f*) $f(x) = (1 - x^2)^3 (5 + x)^5$



## 5. Derivadas de las funciones trascendentes

- **Trigonométricas**

**Teorema 5.1.** Las derivadas trigonométricas elementales son:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\operatorname{sen} x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{15}$$

**Ejemplo 5.1.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = \operatorname{sen} 6x \qquad g(x) = \cos(1 + x^2) \qquad h(x) = \tan x^3$$

*Solución*: Del teorema y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = 6 \cos 6x \qquad g'(x) = -2x \operatorname{sen}(1 + x^2) \qquad h'(x) = \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}$$

□

**Ejercicio 11.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = \operatorname{sen}(3x + 1)$

*b*) $f(x) = \operatorname{sen}(x^3 + 1)$

*c*) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2 + 1)$

*d*) $f(x) = \cos(\dfrac{x}{1 - x})$

*e*) $f(x) = \tan(1 + 2x^2 + x^3)$

*f*) $f(x) = \sec(1 - x^2)$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

- **Exponenciales**

**Teorema 5.2.** Las derivadas de la función exponencial son:

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a \quad (0 < a \neq 1) \tag{16}$$

**Ejemplo 5.2.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = e^{6x} \qquad g(x) = e^{1+x^2} \qquad h(x) = 6^{\operatorname{sen} x}$$

*Solución*: Del teorema y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = 6\, e^{6x} \qquad g'(x) = 2x\, e^{1+x^2} \qquad h'(x) = 6^{\operatorname{sen} x} \ln 6 \cos x$$

$\square$

**Ejercicio 12.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = e^{-5x+4x^2}$

*b*) $f(x) = e^{x \operatorname{sen} x}$

*c*) $f(x) = e^{1-\operatorname{sen}^2 x}$

*d*) $f(x) = 2^{\tan 3x}$

*e*) $f(x) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^2+3x}$

*f*) $f(x) = a^{\operatorname{sen} x + \cos x}$

- **Logarítmos**

**Teorema 5.3.** Las derivadas de la función logarítmica son:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x\,\ln a} \quad (0 < a \neq 1) \tag{17}$$

**Ejemplo 5.3.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = \ln(5x - x^2) \qquad g(x) = \ln(5 - \operatorname{sen} x) \qquad h(x) = \log_3(x^2 + e^x)$$

*Solución*: Del teorema y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = \frac{5 - 2x}{5x - x^2} \qquad g'(x) = \frac{-\cos x}{5 - \operatorname{sen} x} \qquad h'(x) = \frac{1}{\ln 3}\,\frac{2x + e^x}{x^2 + e^x}$$

□

**Ejercicio 13.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x} + 1)$

*b*) $f(x) = \ln(x^2 + \operatorname{sen} x)$

*c*) $f(x) = \ln(x^2\,\operatorname{sen} x)$

*d*) $f(x) = \ln^2(1 + e^x)$

*e*) $f(x) = \ln^2(1 + \ln x)$

*f*) $f(x) = \log_5(\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x})$

## • Derivadas Logarítmicas

Dada una función $y = f(x)$, la derivación logarítmica consiste en tomar logaritmos en los dos miembros de la igualdad y derivar, después de simplificar. La derivación logarítmica se aplica:

- Para derivar funciones del tipo $y = f(x)^{g(x)}$.
- Para simplificar la derivación de productos y cocientes.

**Ejemplo 5.4.** Derivar $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

*Solución*: Tomando ln y derivando en ambos miembros resulta:

$$\ln y = \ln x^{\operatorname{sen} x} \Longrightarrow \ln y = \operatorname{sen} x \cdot \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

y se despeja $y'$,

$$y' = x^{\operatorname{sen} x} \left( \cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)$$

□

**Ejemplo 5.5.** Derivar $y = \cos x^x$.

*Solución*: $\ln y = \ln \cos x^x \Longrightarrow \ln y = x \cdot \ln \cos x$

$$y' = \cos x^x \left( \ln \cos x - x \, \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)$$

□







◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

## 5.1. Regla de la inversa

**Teorema 5.4.** (Regla de la inversa) Sea la función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$.

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \tag{18}$$

**Ejemplo 5.6.** Siendo $f(x) = x^2$ y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ su inversa para $x \geq 0$, hallar $(\sqrt{x})'$

*Solución*: De la ecuación (18),

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

□

**Ejemplo 5.7.** Siendo $f(x) = e^x$ y $f^{-1}(x) = \ln x$, deducir $(\ln x)'$

*Solución*:

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

□

## • Derivadas de Arcos trigonométricos

**Teorema 13.** Las derivadas de los arcos trigonométricos son:

(a) $(\operatorname{arc\,sen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(b) $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(c) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

**Ejemplo 5.8.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = \operatorname{arc\,sen} 6x \qquad g(x) = \arctan x^3$$

*Solución*:

$$f'(x) = \frac{6}{\sqrt{1-(6x)^2}} \qquad g'(x) = \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}$$

$\square$

**Ejercicio 14.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(-x)$

*b*) $f(x) = \arctan(x^2)$

*c*) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\ln x + x)$

*d*) $f(x) = \arccos(1-x)$

*e*) $f(x) = \arctan(\operatorname{sen} x)$

*f*) $f(x) = \arctan(\ln x)$

## 6. Ejercicios

**Ejercicio 15.** Un economista está interesado en ver cómo afecta el precio de un libro $p$ en miles de euros en las unidades vendidas $V(p)$. A partir de los siguientes datos

$$V(5) = 2000 \qquad V(10) = 500 \qquad V'(5) = -25$$

dar las unidades y explicar en palabras el significado de las siguientes expresiones:

*a*) $V(10) - V(5)$ *b*) $\dfrac{V(10) - V(5)}{10 - 5}$ *c*) $V'(5) = -25$

**Ejercicio 16.** Una pelota cae desde lo alto de un edificio y su altura en metros cuando varía el tiempo $t$ en segundos sigue la función

$$f(t) = 125 - 2\,t^2$$

*a*) ¿Cuál es la altura en el instante $t = 0$?

*b*) La velocidad de caída corresponde a $f'(t)$. ¿Qué velocidad lleva la pelota en el momento $t = 2$? y ¿cuál es su significado?

**Ejercicio 17.** Hallar $a$ y $b$ para que $f(x)$ sea una función derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \leq 1 \\ a\,x + b & 1 < x \end{cases}$$

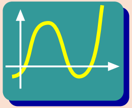
**Ejercicio 18.** Hallar $a$ y $b$ para que $f(x)$ sea una función derivable en $x=0$

$$f(x)=\begin{cases} x^3+1 & x\leq 0 \\ a\,x+b & 0<x \end{cases}$$

**Ejercicio 19.** Hallar $a$ y $b$ para que $f(x)$ sea una función derivable en $x=1$

$$f(x)=\begin{cases} a\,x^2+b\,x-1 & x\leq 1 \\ 2\,b\,x-2 & 1<x \end{cases}$$

---



◀ Pulsa y elige el botón Funciones a Trozos y realiza la siguiente práctica con las funciones anteriores.

**Práctica 6.2.**

*a*) Sea la función: $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & x\leq 0 \\ a\,x+b & 0<x \end{cases}$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `x<0 ? x^3+1:a*x+b` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza los controladores de $a$ y $b$ y observa que la función es derivable en $x=0$ cuando $a=0$ y $b=1$.

*b*) Sea la función: $f(x)=\begin{cases} a\,x^2+b\,x-1 & x\leq 1 \\ 2\,b\,x-2 & 1<x \end{cases}$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `x<1 ? a*x^2+b*x-1:2*b*x-2` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza los controladores de $a$ y $b$ y observa que la función es derivable en $x=1$ cuando $a=1$ y $b=2$.



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 20.** Calcular las derivadas.

a) $f(x) = \ln^2(1+\cos x)^3$ b) $f(x) = \operatorname{sen} x(1+\cos x)^3$

c) $f(x) = e^{1-\operatorname{sen} x}$ d) $f(x) = 8^{x-\ln x}$

**Ejercicio 21.** Calcular las derivadas.

a) $f(x) = \ln(1-\sqrt{x})^2$ b) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}$

**Ejercicio 22.** Calcular las derivadas.

a) $f(x) = x^2 \cdot \arctan x^{-1/2}$ b) $f(x) = x^x$

**Ejercicio 23.** Calcular las derivadas.

a) $f(x) = (\tan x)^{\operatorname{sen} x}$ b) $f(x) = e^x \cdot \sqrt[x]{x}$

## Soluciones a los Ejercicios

### Ejercicio 1.

*a*) Siendo $f(x) = 1 - 3x$,

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - 3(1+h) - (-2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-3\,h}{h} = \mathbf{-3} \end{aligned}$$

*b*) Siendo $g(x) = 2 + 5x$,

$$\begin{aligned} g'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2 + 5(1+h) - (7)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{5\,h}{h} = \mathbf{5} \end{aligned}$$

En este caso $f(x)$ y $g(x)$ son lineales o rectas y se puede observar que la derivadas respectivas coinciden con la pendientes de las rectas dadas.

Ejercicio 1

**Ejercicio 2.**

*a*) $C(20) - C(10) = 300 - 200 = 100$ miles de euros, es el incremento en el coste de pasar de extraer 10 toneladas a extraer 20 toneladas.

*b*) $\dfrac{C(20) - C(10)}{20 - 10} = \dfrac{300 - 200}{20 - 10} = 10$ miles de euros/tonelada, es el incremento medio en el coste de pasar de extraer 10 toneladas a extraer 20 toneladas, es decir por cada tonelada de más que se extrae aumentamos el coste en 10 mil euros.

*c*) $C'(10) = 8$ miles de euros/tonelada, es la variación instantánea en el coste cuando se extraen 10 toneladas , es decir cuando se están extrayendo 10 toneladas, el coste está aumentando a razón de 8 mil euros por tonelada extraída.

Ejercicio 2



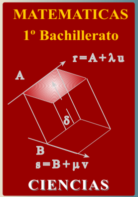
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

**Prueba del Teorema 2.1.** Veamos que la derivabilidad implica la continuidad.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe}$$

multiplicando por $h$

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} h \cdot f'(a) &= \lim_{h \to 0} h \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
\lim_{h \to 0} h \cdot f'(a) &= \lim_{h \to 0} (f(a+h) - f(a)) \\
0 &= \lim_{h \to 0} (f(a+h) - f(a)) \\
\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) &\Longrightarrow f(x) \text{ continua en } x = a
\end{aligned}$$



**Ejercicio 3.** Siendo $f(x) = x - |1-x| = \begin{cases} 2x-1 & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$

$$\begin{aligned}
f'(1^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{2(1+h)-1-1}{h} = 2 \\
f'(1^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1-1}{h} = 0
\end{aligned}$$

Como $f'(1^-) \neq f'(1^+)$ la función no es derivable en $x=1$. Ejercicio 3

**Ejercicio 4.**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1+x}{2} & 1 \leq x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \\ &\overset{(1)}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{(\sqrt{1+h}+1)h} = \boxed{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{2+h}{2} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{2h} = \boxed{1/2} \end{aligned}$$

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Longrightarrow \text{ es derivable en } x = 1$$

(1) Por el conjugado. Ejercicio 4



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 5.**

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{0}{0} \\
&\overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h\,\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

luego

$$f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Se tiene que $Dom(f) = [0, +\infty)$ y $f'(0)$ no existe, luego el $Dom(f') = (0, +\infty) \subsetneqq Dom(f) = [0, +\infty)$

(1) Por el conjugado.

Ejercicio 5

**Prueba del Teorema 4.1.** Sea $f$ una función constante $f(x) = c \quad \forall x \in R$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0 \end{aligned}$$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Prueba del Teorema 4.2.** Sea $f(x) = x^n$ con $n \in N$. Se tiene que

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h)^n = \\ &= x^n + nx^{n-1}h + h^2\{ \text{ polinomio en } h\} \end{aligned}$$

En la diferencia de $f(x+h) - f(x)$ se elimina $x^n$ y queda

$$f(x+h) - f(x) = nx^{n-1}h + h^2\{ \text{ polinomio en } h\}$$

luego en la expresión

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + h\{ \text{ polinomio en } h\}$$

al ser la derivada $f'(x)$ el límite de esta expresión cuando $h \to 0$, como el segundo sumando

$$\lim_{h \to 0} h\{ \text{ polinomio en } h\} = 0$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

◀

**Ejercicio 6.**

*a*) Si $f(x) = 2x^{13}$,

$$f'(x) = 26\,x^{12}$$

*b*) $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$. Luego

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

*c*) $f(x) = \sqrt[5]{x^7} = x^{7/5}$. Luego

$$f'(x) = \frac{7}{5}x^{2/5}$$

*d*) $f(x) = 2\,x^{-30}$. Luego

$$f'(x) = -60\,x^{-31}$$

Ejercicio 6

**Prueba del Teorema 4.3.** Siendo $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \\ &= \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{(1)} + \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{(2)} \end{aligned}$$

Al pasar al límite cuando $h \to 0$,

$$(1) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \longrightarrow f'(x)$$

$$(2) \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \longrightarrow g'(x)$$

obteniéndose

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

**Ejercicio 7.**

*a)* Si $f(x) = 3\,x^2 - 5\,x^{-3}$,
$$f'(x) = 6\,x + 15\,x^{-4}$$

*b)* Siendo $f(x) = x^2 - 3\,x^5$,
$$f'(x) = 2\,x - 15\,x^4$$

*c)* Si $f(x) = x^{10} + x^{-10}$,
$$f'(x) = 10\,x^9 - 10\,x^{-11}$$

*d)* Siendo $f(x) = x - \sqrt[3]{x^5}$,
$$f'(x) = 1 - \frac{5}{3}x^{2/3}$$

*e)* Siendo $f(x) = x^8 + x^{8{,}003}$,
$$f'(x) = 8x^7 + 8{,}003x^{7{,}003}$$

*f)* Siendo $f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[5]{x}$,
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{1}{5}x^{-4/5}$$

Ejercicio 7

**Prueba del Teorema 4.4.** Siendo $(fg)(x) = f(x)g(x)$, se tiene que

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \text{ introduciendo } g(x+h)f(x)$$

$$= \frac{f(x+h)g(x+h) - g(x+h)f(x) + g(x+h)f(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h)}_{(1)} + \underbrace{f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{(2)}$$

Al pasar al límite cuando $h \to 0$,

$$(1) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) \longrightarrow f'(x)g(x)$$

$$(2) \quad f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \longrightarrow f(x)g'(x)$$

obteniéndose

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

**Ejercicio 8.**

*a*) Si $f(x) = (x^2 + 10)(1 - x^2)$,

$$f'(x) = (2\,x) \cdot (1 - x^2) + (x^2 + 10) \cdot (-2\,x)$$

*b*) Siendo $f(x) = (x + x^2 + 1) \cdot (1 + x)$,

$$f'(x) = (1 + 2\,x) \cdot (-2\,x) + (x + x^2 + 1) \cdot (-2)$$

*c*) Si $f(x) = (x^{10} + 1)(1 - x)$,

$$f'(x) = (10x^9) \cdot (1 - x) + (x^{10} + 1) \cdot (-1)$$

*d*) Siendo $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot (1 - x^2)$,

$$f'(x) = (2x - 2) \cdot (1 - x^2) + (x^2 - 2x) \cdot (-2x)$$

*e*) Siendo $f(x) = (x^2 + x^3) \cdot (3 + x)$,

$$f'(x) = (2x + 3x^2) \cdot (3 + x) + (x^2 + x^3) \cdot (1)$$

*f*) Siendo $f(x) = (\sqrt{x^3} + x) \cdot (x - \sqrt[5]{x})$.

$$f'(x) = (\frac{3}{2}x^{1/2} + 1) \cdot (x - \sqrt[5]{x}) + (\sqrt{x^3} + x) \cdot (1 - \frac{1}{5}x^{-4/5})$$

Ejercicio 8

**Prueba del Teorema 4.5.** Siendo $(fg)(x) = f(x)g(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = & \qquad\qquad (\lhd \text{ operando}) \\
= & \frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{hg(x+h)g(x)} \qquad (\lhd \text{ introduciendo } f(x)g(x)) \\
= & \frac{f(x+h)g(x) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - g(x+h)f(x)}{hg(x+h)g(x)} \\
= & \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,\frac{g(x)}{g(x+h)g(x)}}_{(1)} - \underbrace{\frac{f(x)}{g(x+h)g(x)}\,\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{(2)}
\end{aligned}$$

Al pasar al límite cuando $h \to 0$,

$$\begin{array}{ll}
(1) & \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\,\dfrac{g(x)}{g(x+h)g(x)} \longrightarrow f'(x)\dfrac{g(x)}{g(x)^2} \\
(2) & \dfrac{f(x)}{g(x+h)g(x)}\,\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} \longrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)^2}g'(x)
\end{array}$$

obteniéndose la fórmula para la derivada del cociente.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

**Ejercicio 9.**

*a*) Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

$$f'(x) = \frac{(0)(x) - (1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

*b*) Si $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$,

$$f'(x) = \frac{(2x)(x) - (x^2+1)(1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

*c*) Si $f(x) = \dfrac{x^{10}+1}{1-x}$,

$$f'(x) = \frac{(10x^9)(1-x) - (x^{10}+1)(-1)}{(1-x)^2}$$

*d*) Siendo $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x+3}$,

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+3) - (x^2+x)(1)}{(x+3)^2}$$

Ejercicio 9

**Prueba del Teorema 4.6.** Siendo $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, y llamando a

$$\triangle g = g(x+h) - g(x)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} &= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \frac{f(g(x) + \triangle g) - f(g(x))}{h} \\
&= \frac{f(g(x) + \triangle g) - f(g(x))}{\triangle g} \frac{\triangle g}{h} = \\
&= \underbrace{\frac{f(g(x) + \triangle g) - f(g(x))}{\triangle g}}_{(1)} \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{(2)}
\end{aligned}$$

$$(1) \quad \frac{f(g(x) + \triangle g) - f(g(x))}{\triangle g} \longrightarrow f'(g(x))$$

$$(2) \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \longrightarrow g'(x)$$

◀

MATEMATICAS 1º Bachillerato CIENCIAS

MaTEX

DERIVADAS

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

**Ejercicio 10.**

*a*) Si $f(x) = (1 + 2\,x)^3$,
$$f'(x) = 3(1 + 2\,x)^2\,(2)$$

*b*) Siendo $f(x) = (x + x^2)^3$,
$$f'(x) = 3(x + x^2)^2(1 + 2\,x)$$

*c*) Si $f(x) = (x^{10} + 1)^2$,
$$f'(x) = 2(x^{10} + 1)(10\,x^9)$$

*d*) Siendo $f(x) = (2x^3 + x)^3$,
$$f'(x) = 3(2x^3 + x)^2(6x^2 + 1)$$

*e*) Si $f(x) = f(x) = x^2(2x^3 + x)^3$,
$$f'(x) = 2x(2x^3 + x)^3 + x^2\,3\,(2x^3 + x)^2(6x^2 + 1)$$

*f*) Siendo $f(x) = (1 - x^2)^3(5 + x)^5$,
$$f'(x) = 3(1 - x^2)^2(-2x)(5 + x)^5 + (1 - x^2)^3\,5\,(5 + x)^4$$

Ejercicio 10

**Ejercicio 11.**

*a*) Si $f(x) = \operatorname{sen}(3x+1)$.

$$f'(x) = 3\cos(3x+1)$$

*b*) Si $f(x) = \operatorname{sen}(x^3+1)$.

$$f'(x) = 3x^2\,\cos(x^3+1)$$

*c*) Si $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2+1)$. Luego

$$f'(x) = 3\operatorname{sen}^2(x^2+1)\cos(x^2+1)\,(2x)$$

*d*) Si $f(x) = \cos(\dfrac{x}{1-x})$.

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(\frac{x}{1-x})\frac{1}{(1-x)^2}$$

*e*) Si $f(x) = \tan(1+2x^2+x^3)$,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(1+2x^2+x^3)}(4x+3x^2)$$

*f*) Si $f(x) = \sec(1-x^2) = \dfrac{1}{\cos(1-x^2)}$

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(1-x^2)\,(-2x)}{\cos^2(1-x^2)}$$

Ejercicio 11

**Ejercicio 12.**

*a*) Si $f(x) = e^{-5x+4x^2}$.

$$f'(x) = e^{-5x+4x^2}\,(-5+8x)$$

*b*) Si $f(x) = e^{x\ \mathrm{sen}\, x}$.

$$f'(x) = e^{x\ \mathrm{sen}\, x}(\mathrm{sen}\, x + x\cos x)$$

*c*) Si $f(x) = e^{1-\mathrm{sen}^2 x}$. Luego

$$f'(x) = e^{1-\mathrm{sen}^2 x}(-2\,\mathrm{sen}\, x\ \cos x)$$

*d*) Si $f(x) = 2^{\tan 3x}$.

$$f'(x) = 2^{\tan 3x}\ln 2\,\frac{3}{\cos^2 3x}$$

*e*) Si $f(x) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^2+3x}$,

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x}(2x+3)\ \ln\frac{3}{5}$$

*f*) Si $f(x) = a^{\mathrm{sen}\, x+\cos x}$

$$f'(x) = a^{\mathrm{sen}\, x+\cos x}\ln a\,(\cos x - \mathrm{sen}\, x)$$

Ejercicio 12

MATEMATICAS
1º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DERIVADAS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 13.**

*a*) Si $f(x) = \ln(x + \sqrt{x} + 1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x} + 1}(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$$

*b*) Si $f(x) = \ln(x^2 + \operatorname{sen} x)$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + \operatorname{sen} x}(2x + \cos x)$

*c*) Si $f(x) = \ln(x^2 \operatorname{sen} x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 \operatorname{sen} x}(2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x)$$

*d*) Si $f(x) = \ln^2(1 + \ln x)$.

$$f'(x) = 2\ln(1 + e^x)\frac{1}{1 + e^x}e^x$$

*e*) Si $f(x) = \ln^2(1 + \ln x)$.

$$f'(x) = 2\ln(1 + \ln x)\frac{1}{1 + \ln x}\frac{1}{x}$$

*f*) Si $f(x) = \log_5(\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x})$.

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 5}\frac{1}{\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}}\frac{-\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} = -\frac{1}{\ln 5}\frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

Ejercicio 13

**Prueba del Teorema 5.4.** Sea la función $f(x)$ y su inversa $g(x) = f^{-1}(x)$. Teniendo en cuenta la identidad

$$(f \circ g)(x) = x$$

derivando con la regla de la cadena se tiene

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$

despejando $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

luego

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

◀



◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

**Teorema 13(a)** Teniendo en cuenta la identidad

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x$$

derivando con la regla de la cadena se tiene

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} x) \cdot (\operatorname{arc\,sen} x)' = 1 \tag{19}$$

Teniendo en cuenta que

$$\cos(f) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 f}$$

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

y despejando en (19),

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$\square$

**Teorema 13(b)** Teniendo en cuenta la identidad

$$\cos(\arccos x) = x$$

derivando con la regla de la cadena se tiene

$$-\operatorname{sen}(\arccos x) \cdot (\arccos x)' = 1 \tag{20}$$

Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen}(f) = \sqrt{1 - \cos^2 f}$$

$$\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

y despejando en (20),

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$\square$

**Teorema 13(c)** Teniendo en cuenta la identidad

$$\tan(\arctan x) = x$$

derivando con la regla de la cadena se tiene

$$\frac{1}{\cos^2(\arctan x)} \cdot (\arctan x)' = 1 \tag{21}$$

Teniendo en cuenta que

$$\cos^2(f) = \frac{1}{1+\tan^2 f}$$

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

y despejando en (21),

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

□

**Ejercicio 14.**

*a*) Si $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(-x)$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}}$

*b*) Si $f(x) = \arctan(x^2)$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2\,x}{\sqrt{1+x^4}}$

*c*) Si $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\ln x + x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\ln x + x)^2}}\left(\frac{1}{x}+1\right)$$

*d*) Si $f(x) = \arccos(1-x)$.

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}(-1)$$

*e*) Si $f(x) = \arctan(\operatorname{sen} x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\operatorname{sen} x)^2}\cos x$$

*f*) Si $f(x) = \arctan(\ln x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\ln x)^2}\,\frac{1}{x}$$

Ejercicio 14

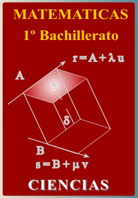
**Ejercicio 15.**

*a*) $V(10) - V(5) = 500 - 2000 = -1500$ libros, es el incremento en las ventas de libros al pasar de un precio de 5 euros a un precio de 10 euros, como es negativo se pierden 1500 libros en las ventas.

*b*) $\dfrac{V(10) - V(5)}{10 - 5} = \dfrac{500 - 2000}{10 - 5} = -300$ libros/euro, es el incremento medio en las ventas de libros al pasar de un precio de 5 euros a un precio de 10 euros, como es negativo se pierden 300 libros en las ventas por cada euro que aumenta en el precio.

*c*) $V'(5) = -25$ libros/euro, es la variación instantánea en las ventas de libros con un precio de 5 euros, como es negativo con este precio las ventas están cayendo a razón de 300 libros por euro

Ejercicio 15






◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 16.**

*a*) La altura en el instante $t = 0$, es $f(0) = 125$ metros, que corresponde a la altura desde la que se suelta la pelota.

*b*) La velocidad de caída corresponde a $f'(t)$

$$v(t) = f'(t) = -4\,t$$

En el momento $t = 2$ la velocidad es

$$v(2) = -8 \quad m/s$$

y significa al ser negativa, que en ese instante la pelota está perdiendo altura a razón de 8 m/s.

Ejercicio 16



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 17.** Siendo

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \leq 1 \\ a\,x + b & 1 < x \end{cases}$$

- Para que sea continua en $x = 1$

$$f(1^-) = 0 = f(1^+) = a + b \Longrightarrow a + b = 0$$

- Para que sea derivable en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & x < 1 \\ a & 1 < x \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 3 = f'(1^+) = a \Longrightarrow \boxed{a = 3}$$

Sustituyendo en la ecuación $a + b = 0$, se tiene $\boxed{b = -3}$

Ejercicio 17

**Ejercicio 18.** Siendo

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x \leq 0 \\ a\,x + b & 0 < x \end{cases}$$

- Para que sea continua en $x = 0$

$$f(0^-) = 1 = f(0^+) = b \Longrightarrow \boxed{b = 1}$$

- Para que sea derivable en $x = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & x < 0 \\ a & 0 < x \end{cases}$$

$$f'(0^-) = 0 = f'(0^+) = a \Longrightarrow \boxed{a = 0}$$

Ejercicio 18

**Ejercicio 19.** Siendo

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + b\,x - 1 & x \leq 1 \\ 2\,b\,x - 2 & 1 < x \end{cases}$$

- Para que sea continua en $x = 1$

$$f(1^-) = a + b - 1 = f(1^+) = 2\,b - 2 \Longrightarrow \boxed{a = b - 1}$$

- Para que sea derivable en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2\,a\,x + b & x < 1 \\ 2\,b & 1 < x \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 2\,a + b = f'(1^+) = 2\,b \Longrightarrow \boxed{2\,a = b}$$

Resolviendo el sistema con las dos condiciones se obtiene $a = 1$ y $b = 2$
.

Ejercicio 19

**Ejercicio 20.**

*a*) Si $f(x) = \ln^2(1+\cos x)^3$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,\ln(1+\cos x)^3 \frac{1}{(1+\cos x)^3} 3(1+\cos x)^2(-\operatorname{sen} x) \\ &= -6\,\ln(1+\cos x)^3 \frac{\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)} \end{aligned}$$

*b*) Si $f(x) = \operatorname{sen} x(1+\cos x)^3$.

$$f'(x) = \cos x(1+\cos x)^3 + \operatorname{sen} x\, 3(1+\cos x)^2(-\operatorname{sen} x)$$

*c*) Si $f(x) = e^{1-\operatorname{sen} x}$.

$$f'(x) = -e^{1-\operatorname{sen} x}\cos x$$

*d*) Si $f(x) = 8^{x-\ln x}$.

$$f'(x) = 8^{x-\ln x}\cdot \ln 8 \cdot (1 - \frac{1}{x})$$

Ejercicio 20

**Ejercicio 21.**

*a*) Si $f(x) = \ln(1-\sqrt{x})^2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-\sqrt{x})^2} 2(1-\sqrt{x}) \frac{-1}{2\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \end{aligned}$$

*b*) Si $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\sec^2 x(1-\tan x) + (1+\tan x)\sec^2 x}{(1-\tan x)^2} \\ &= \frac{1-\tan x}{2(1+\tan x)} \cdot \frac{2\sec^2 x}{(1-\tan x)^2} \\ &= \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)(1-\tan x)} \end{aligned}$$

Ejercicio 21

MATEMATICAS
1º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
DERIVADAS
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 22.**

*a*) Si $f(x) = x^2 \cdot \arctan x^{-1/2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2 \cdot \frac{1}{1 + (\frac{1}{\sqrt{x}})^2} \cdot \frac{-1}{2} x^{-3/2} \\ &= 2x \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{1 + (\frac{1}{\sqrt{x}})^2} \end{aligned}$$

*b*) Si $f(x) = x^x$. Aplicando logaritmos

$$\ln f(x) = x \, \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (\ln x + 1) \cdot x^x$$

Ejercicio 22

**Ejercicio 23.**

*a*) Si $f(x) = (\tan x)^{\operatorname{sen} x}$. Aplicando logaritmos

$$\ln f(x) = \operatorname{sen} x \, \ln \tan x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \, \ln \tan x + \operatorname{sen} x \, \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \, \ln \tan x + \frac{1}{\cos x}$$

$$f'(x) = (\cos x \, \ln \tan x + \frac{1}{\cos x}) \cdot (\tan x)^{\operatorname{sen} x}$$

*b*) Si $f(x) = e^x \cdot \sqrt[x]{x}$. Aplicando logaritmos

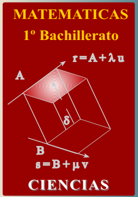
$$\ln f(x) = x + \frac{1}{x} \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x^2} \, \ln x + \frac{1}{x} \, \frac{1}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = (1 - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}) \cdot e^x \cdot \sqrt[x]{x}$$

Ejercicio 23






◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

## Soluciones a los Tests

**Solución al Test:** La continuidad no implica la derivabilidad. Por ejemplo

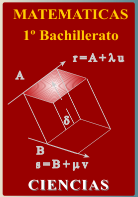
$$f(x) = |x|$$

es continua en 0, sin embargo no es derivable en 0. Final del Test

# Índice alfabético











◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar