

Proyecto MaTeX

Representación de Funciones

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)

© 2004 javier.gonzalez@unican.es
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTeX

GRÁFICAS

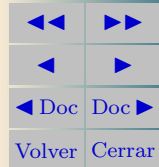


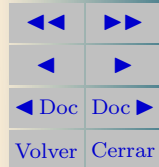
Tabla de Contenido

1. Introducción
 2. Dominio
 - De funciones racionales
 3. Asíntotas
 - 3.1. Asíntota Vertical
 - 3.2. Asíntota Horizontal
 - 3.3. Asíntota Oblicua
 - Caso general
 4. Crecimiento y Decrecimiento
 5. Concavidad y convexidad
 - 5.1. Punto de Inflexión
 6. Funciones exponenciales
 7. Funciones logarítmicas
- Soluciones a los Ejercicios



MaTeX

GRÁFICAS



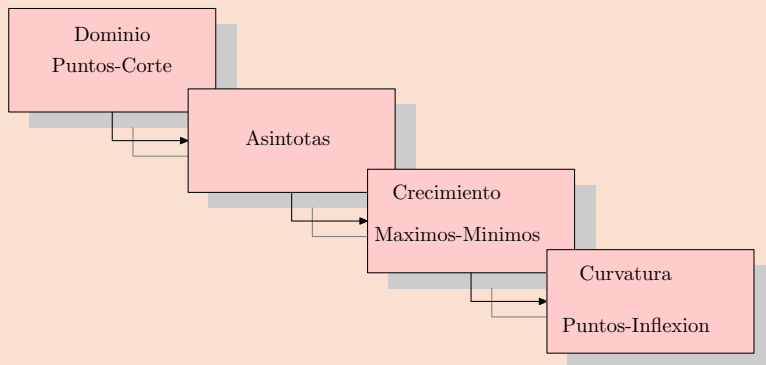


1. Introducción

En este capítulo vamos a aplicar las características ya estudiadas en capítulos anteriores para representar gráficamente una función real $f(x)$.

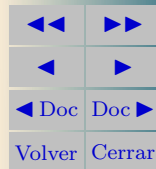
Es habitual seguir los siguientes pasos para realizar un gráfico:

- el dominio y puntos de corte con los ejes.
- las ramas del infinito para las asíntotas.
- el crecimiento, decrecimiento y extremos locales con la primera derivada.
- la concavidad y puntos de inflexión con la segunda derivada.



MaTeX

GRÁFICAS





2. Dominio

El dominio de una función $y = f(x)$ es el conjunto de números reales en los que la función está definida.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \exists f(x)\}$$

• De funciones racionales

Dada una función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, el dominio de $f(x)$ viene dado por todos los números reales salvo las raíces del denominador. Es decir

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$$

Ejercicio 1. Determinar el dominio de las funciones.

$$a) f(x) = \frac{2}{3x}$$

$$b) g(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$c) h(x) = \frac{x}{1 + x}$$

Ejercicio 2. Determinar el dominio de las funciones.

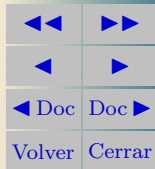
$$a) f(x) = \frac{3x}{5}$$

$$b) g(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$c) h(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x}$$

MaTEX

GRÁFICAS





3. Asíntotas

En este apartado usaremos el concepto de límite para mostrar el aspecto gráfico de las funciones.

Cuando una función en la proximidad de un punto $x = \mathbf{a}$ o en el **infinito** se aproxima a una recta tanto como queramos decimos que tiene una **asíntota** o que la función tiene una rama asintótica. En caso contrario decimos que tiene una rama **parabólica**.

- Las funciones polinómicas $y = P(x)$ no tienen asíntotas, solo ramas parabólicas.
- Las funciones racionales $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios puede tener asíntotas de tres tipos:
 - a) asíntota horizontal
 - b) asíntota vertical
 - c) o asíntota oblicua

Vamos a analizar con detalle estos tres tipos para las funciones racionales.

MaTeX

GRÁFICAS





3.1. Asíntota Vertical

Asíntota Vertical

Cuando en un punto $x = a$ se tiene

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

decimos que la función presenta una rama infinita o asíntota Vertical

Ejemplo 3.1. Halla y representa la asíntota vertical de $y = \frac{1}{x}$

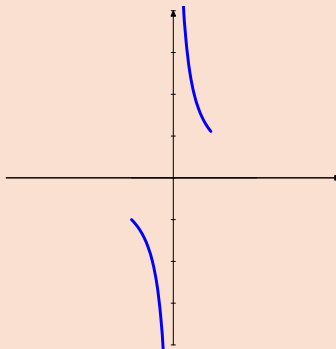
Solución:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

tiene como asíntota vertical el eje OY , $x = 0$.

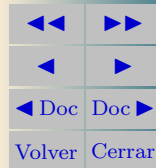
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



MaTEX

GRÁFICAS



□



Ejemplo 3.2. Halla la asíntotas de $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

Solución:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \text{ tiene } x = 1.$$

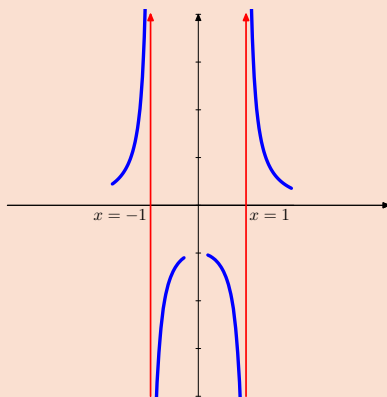
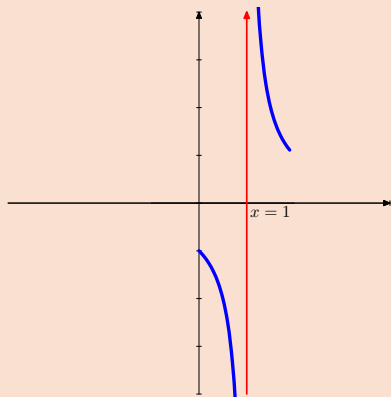
$$g(x) = \frac{1}{x^2-1} \text{ tiene } x = \pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2-1} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$$

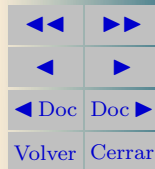
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$$



MaTEX

GRÁFICAS



Ejemplo 3.3. Halla y representa la asíntota vertical de $y = \frac{1}{x^2 - 2x}$

Solución:

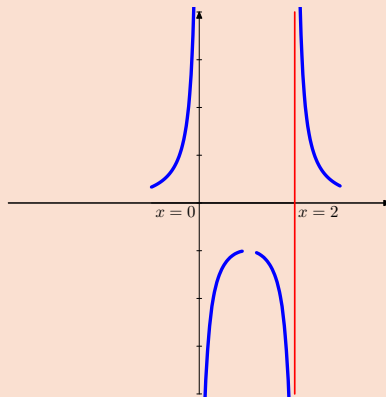
$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$ dos asíntotas
verticales $x = 0$ y $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 - x} = +\infty$$



□

Ejercicio 3. Hallar y representar, si las hay, las asíntotas verticales de las funciones:

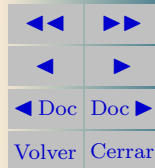
a) $f(x) = \frac{2+x}{3-x}$

b) $g(x) = \frac{x^2}{x+1}$



MaTeX

GRÁFICAS





3.2. Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal

Cuando se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

decimos que la función tiene la asíntota horizontal $y = L$

Ejemplo 3.4. Halla y representa la asíntota horizontal de $y = \frac{1}{x}$

Solución:

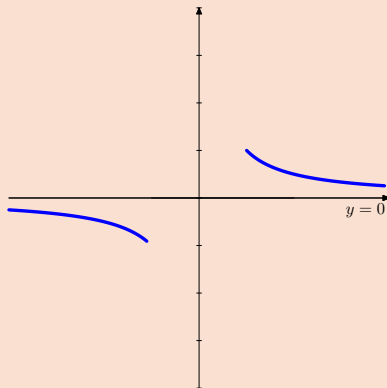
$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ tiene } y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Para dibujarla, lo más cómodo es dar valores grandes a x .

$$\text{Si } x > 0 \implies \frac{1}{x} > 0$$

$$\text{Si } x < 0 \implies \frac{1}{x} < 0$$



□

MaTEX

GRÁFICAS



Ejemplo 3.5. Halla y representa la asíntota horizontal de $y = \frac{x+1}{x}$

Solución:

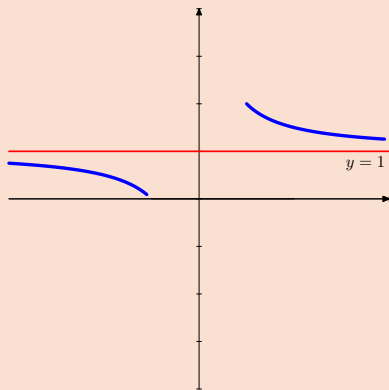
Asíntotas horizontal $y = 1$
pues

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

Para dibujarla, lo más cómodo es dar valores «grandes» a x .

$$\text{Si } x = 10 \implies \frac{10+1}{10} > 1$$

$$\text{Si } x = -10 \implies \frac{(-10)+1}{-10} < 1$$



□

Ejercicio 4. Hallar y representar, si las hay, las asíntotas horizontales de las funciones:

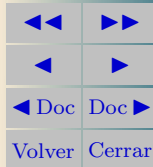
$$a) f(x) = \frac{2+x}{3-x}$$

$$b) g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$



MaTEX

GRÁFICAS



3.3. Asíntota Oblicua

Una función $f(x)$ en la proximidad del infinito $x \rightarrow \infty$ decimos que tiene como **asíntota oblicua**, cuando se aproxima a una recta

$$y = mx + n$$

Primero explicamos como calcularlas para las funciones racionales y después damos una expresión más general. Sea la función

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Si dividimos, la podemos expresar como

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

y para valores de x tan grandes como queramos, cuando $x \rightarrow \infty$, como $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ tenemos que

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \approx \boxed{x}$$

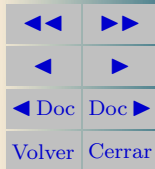
es decir para valores de x “grandes” la función toma valores cercanos a x , y por tanto su gráfica se aproxima a la recta $y = x$. Decimos que la asíntota oblicua es

$$y_o = x$$



MaTEX

GRÁFICAS

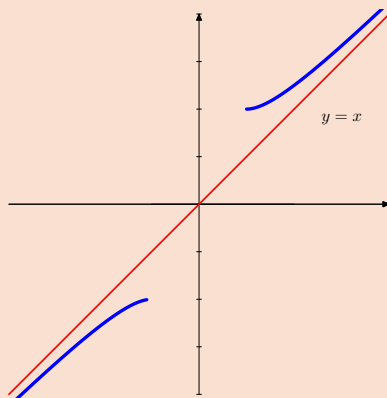


$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

Aíntota oblicua $y = x$

$$x \rightarrow +\infty \quad f(x) > x$$

$$x \rightarrow -\infty \quad f(x) < x$$



En general, la asíntota oblicua para las racionales

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

es el cociente de la división, siempre y cuando el grado del numerador sea una **unidad mayor** que el grado del denominador.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

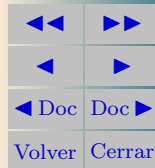
Asíntota oblicua $y_o = C(x)$

Así pues para determinar la asíntota oblicua se dividen los polinomios y



MaTeX

GRÁFICAS



se toma el cociente cuando es de grado uno, es decir una recta. En el siguiente ejemplo se muestra como se calcula.

Ejemplo 3.6. Veamos algunos ejemplos:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1} = \boxed{x - 1} + \frac{3}{x - 1} \quad y_o = x - 1$$

$$g(x) = \frac{3x^2 - 1}{x + 1} = \boxed{3x - 3} + \frac{2}{x + 1} \quad y_o = 3x - 3$$

$$h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{1 - x} = \boxed{-x - 2} + \frac{3}{1 - x} \quad y_o = -x - 2$$

$$j(x) = \frac{x^3 + 1}{x} = \boxed{x^2} + \frac{1}{x} \quad \text{No hay oblicua}$$

$$k(x) = \frac{x + 1}{x} = \boxed{1} + \frac{1}{x} \quad y = 1 \text{ horizontal}$$

$$h(x) = \frac{2 - x^2}{x} = \boxed{-x} + \frac{2}{x} \quad y_o = -x$$

Ejercicio 5. Hallar y representar, si las hay, las asíntotas oblicuas de las funciones:

$$a) f(x) = \frac{2 + x^2}{2 + x}$$

$$b) g(x) = \frac{x^2 - 2}{1 - x}$$



MaTEX

GRÁFICAS



Ejemplo 3.7. Hallar y representar la oblicua de $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

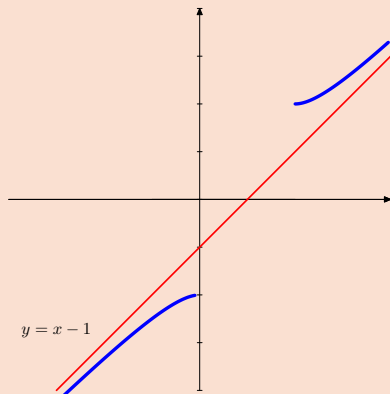
Solución:

Dividimos y

$$\frac{x^2}{x+1} = \boxed{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$y_o = x - 1$$

$$\bullet \underbrace{f(x) > x - 1}_{x \rightarrow +\infty} \quad \underbrace{f(x) < x - 1}_{x \rightarrow -\infty}$$



Para explicar la posición \bullet de la curva respecto a la asíntota, lo más fácil, es dar un valor a x lo suficientemente grande, y comparar el valor de la función y de la asíntota. Por ejemplo en $x = 10$ y $x = -10$.

$$f(10) = 9,09 \quad y_o(10) = 9 \implies f(x) > y_o$$

$$f(-10) = -11,11 \quad y_o(-10) = -11 \implies f(x) < y_o$$

□



MaTeX

GRÁFICAS



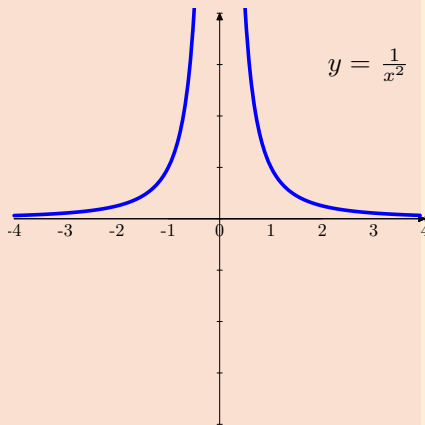


Ejemplo 3.8. Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{1}{x^2}$$

Solución:

Ramas del Infinito de $\frac{1}{x^2}$	
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$	0
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$	0



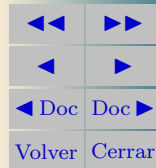
MaTeX

GRÁFICAS

La función presenta:

- una asíntota vertical en $x = 0$
- una asíntota horizontal $y = 0$

□



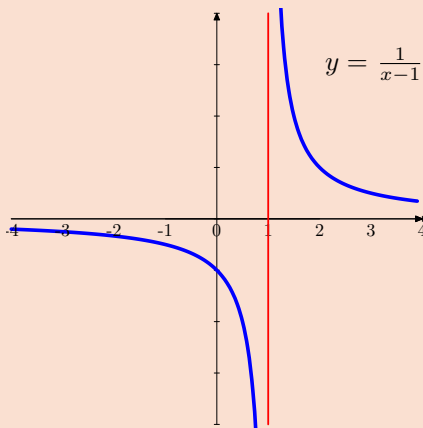


Ejemplo 3.9. Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{1}{x-1}$$

Solución:

Ramas del Infinito de $\frac{1}{x-1}$	
$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1}$	0
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1}$	0



La función presenta:

- una asíntota vertical en $x = 1$
- una asíntota horizontal $y = 0$

□

MaTEX

GRÁFICAS





Ejercicio 6. Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{x}{x-1}$$

Ejercicio 7. Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Ejercicio 8. Estudia y representa con las asíntotas la función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Ejercicio 9. Estudia y representa con las asíntotas la función:

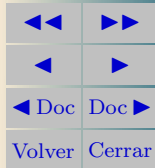
$$y = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

Ejercicio 10. Estudia y representa con las asíntotas la función:

$$y = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$$

MaTEX

GRÁFICAS





• Caso general

Para el caso general, queremos ver cuando la función se aproxima a la recta $y = mx + n$ en el infinito, es decir,

$$f(x) \simeq mx + n \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

Dividiendo por x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{mx + n}{x} = \mathbf{m}$$

y

$$\mathbf{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \mathbf{m}x)$$

Así la asíntota oblicua para el caso general se determina con la expresión:

$$y_o = mx + n \quad \begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \end{cases} \quad (1)$$

Ejemplo 3.10. Hallar la asíntota oblicua de $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

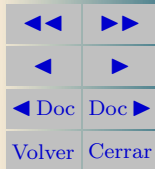
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x}{x + 1} = -1$$

La asíntota oblicua cuando $x \rightarrow \pm\infty$, es $\boxed{y_o = x - 1}$.

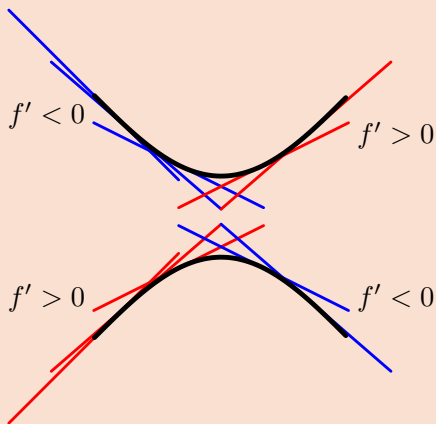
MaTEX

GRÁFICAS



4. Crecimiento y Decrecimiento

En las funciones del gráfico se observa que donde la curva es creciente las tangentes en rojo tienen pendiente positiva, es decir, la derivada es $f' > 0$, y donde la curva es decreciente las tangentes en azul tienen pendiente negativa, es decir, la derivada es $f' < 0$. La tangente amarilla tiene pendiente nula, $f' = 0$.

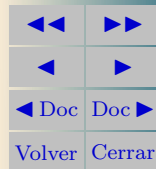


	Mínimo relativo			Máximo relativo		
	$x = a$			$x = a$		
f'	-	0	+	+	0	-
f	↘	$\exists f(a)$	↗	↗	$\exists f(a)$	↘



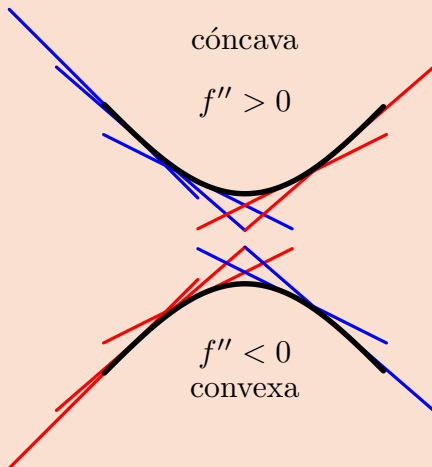
MaTEX

GRÁFICAS



5. Concavidad y convexidad

A partir del gráfico se observa que donde la curva es **cóncava** \cup , las tangentes están por debajo de la función, y, donde la curva es **convexa** \cap , las tangentes están por encima de la función. Por otra parte en la gráfica superior las pendientes van aumentando, es decir $f'(x)$ es creciente y por tanto su derivada es positiva $f''(x) > 0$

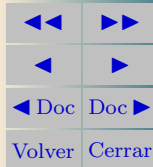


	Mínimo relativo			Máximo relativo		
	$x = a$			$x = a$		
f'	-	0	+	+	0	-
f	\searrow	$\exists f(a)$	\nearrow	\nearrow	$\exists f(a)$	\searrow



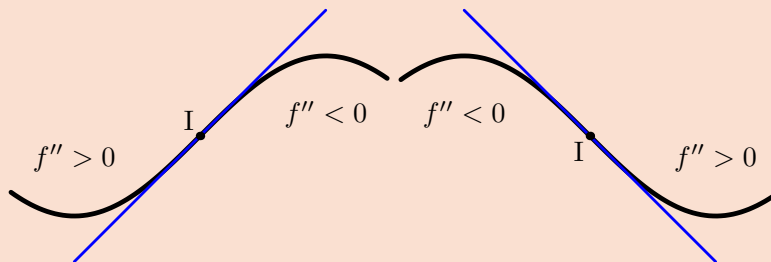
MaTeX

GRÁFICAS





5.1. Punto de Inflexión



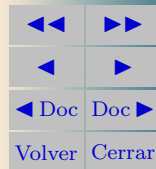
	Punto Inflexión		
	$x = a$		
f''	+	0	-
f	∪	$\exists f(a)$	∩

	Punto Inflexión		
	$x = a$		
f''	-	0	+
f	∩	$\exists f(a)$	∪

Cuando en un punto $(a, f(a))$ la función cambia de concavidad se tiene un punto de inflexión, y la tangente en el punto, si existe, atraviesa la función.

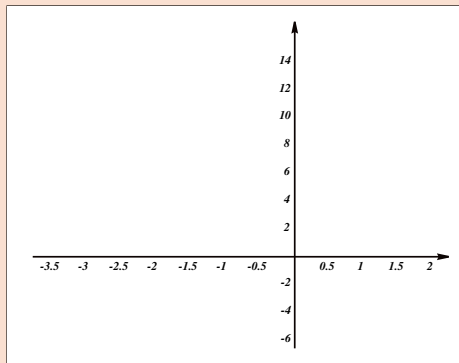
MaTeX

GRÁFICAS



Ejemplo 5.1. $f(x) = x^3 + 3x^2$

Puntos de corte



MaTeX

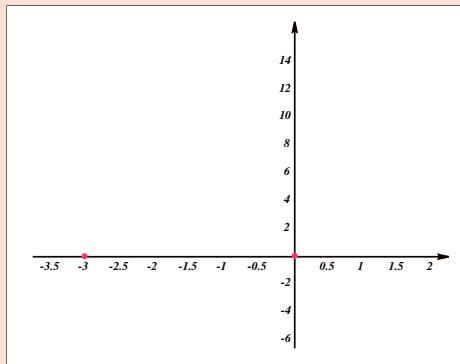
GRÁFICAS



Ejemplo 5.1. $f(x) = x^3 + 3x^2$

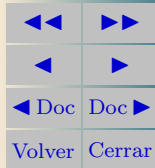
Puntos de corte

$$y = 0 = x^3 + 3x^2 \implies x = 0; -3$$



MaTEX

GRÁFICAS



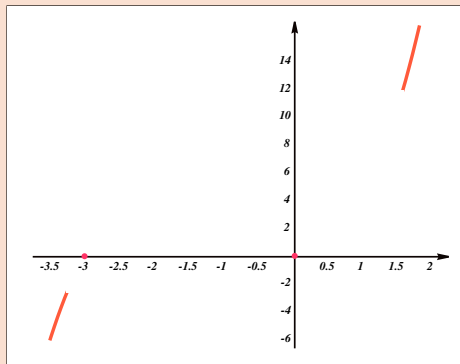
Ejemplo 5.1. $f(x) = x^3 + 3x^2$

Puntos de corte

$$y = 0 = x^3 + 3x^2 \implies x = 0; -3$$

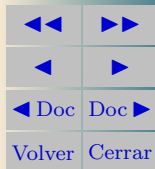
Ramas del infinito.

$$f(-\infty) = -\infty \quad f(\infty) = \infty$$



MaTeX

GRÁFICAS



Ejemplo 5.1. $f(x) = x^3 + 3x^2$

Puntos de corte

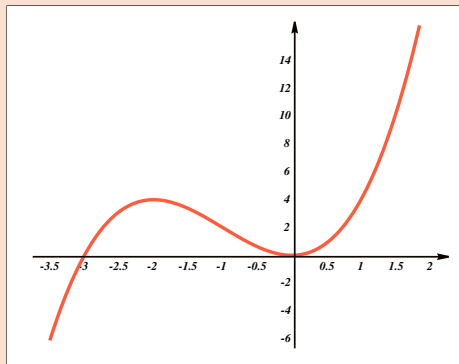
$$y = 0 = x^3 + 3x^2 \implies x = 0; -3$$

Ramas del infinito.

$$f(-\infty) = -\infty \quad f(\infty) = \infty$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$



	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	\nearrow	4	\searrow	0	\nearrow



MaTeX

GRÁFICAS



Ejemplo 5.1. $f(x) = x^3 + 3x^2$

Puntos de corte

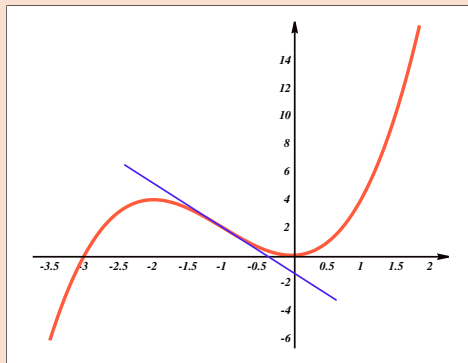
$$y = 0 = x^3 + 3x^2 \implies x = 0; -3$$

Ramas del infinito.

$$f(-\infty) = -\infty \quad f(\infty) = \infty$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$



	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	\nearrow	4	\searrow	0	\nearrow

Concavidad.

$$f''(x) = 6x + 6$$

	$-\infty$	-1	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	\cap	2	\cup



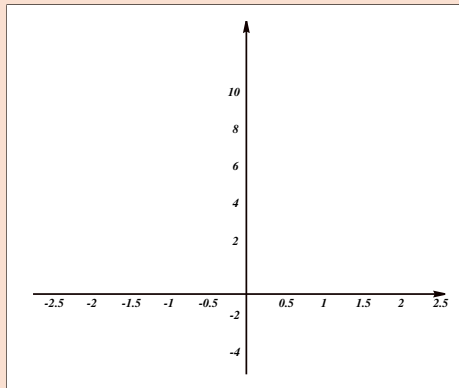
MaTeX

GRÁFICAS



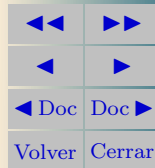
Ejemplo 5.2. $f(x) = y = x^4 - 4x^2$

Puntos de corte



MaT_EX

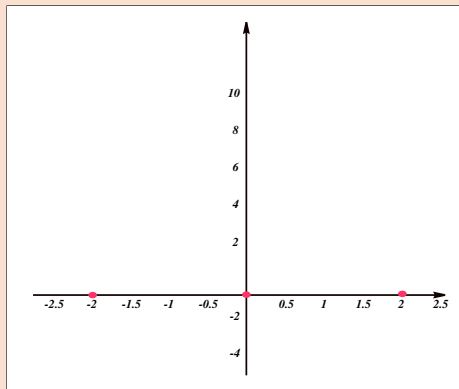
GRÁFICAS



Ejemplo 5.2. $f(x) = y = x^4 - 4x^2$

Puntos de corte

$$y = 0 = x^2(x^2 - 4) \implies x = -2; 0; 2$$



MaTEX

GRÁFICAS



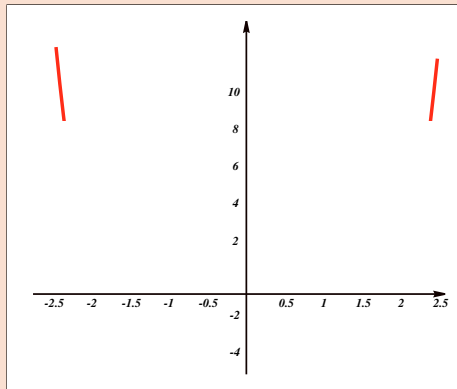
Ejemplo 5.2. $f(x) = y = x^4 - 4x^2$

Puntos de corte

$$y = 0 = x^2(x^2 - 4) \implies x = -2; 0; 2$$

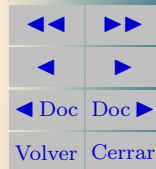
Ramas del infinito

$$f(-\infty) = \infty \quad f(\infty) = \infty$$



MaTeX

GRÁFICAS



Ejemplo 5.2. $f(x) = y = x^4 - 4x^2$

Puntos de corte

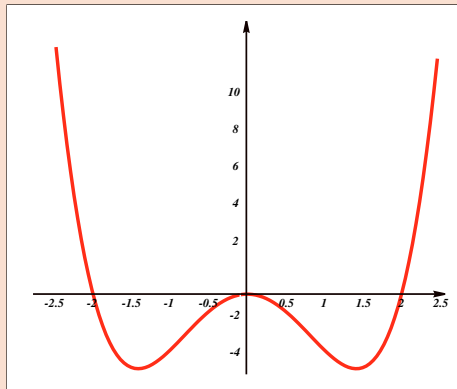
$$y = 0 = x^2(x^2 - 4) \implies x = -2; 0; 2$$

Ramas del infinito

$$f(-\infty) = \infty \quad f(\infty) = \infty$$

**Crecimiento y
decrecimiento.**

$$f'(x) = 4x^3 - 8x \implies x = 0; \pm\sqrt{2}$$

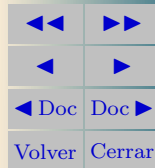


	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	\searrow	-4	\nearrow	0	\searrow



MaTeX

GRÁFICAS



Ejemplo 5.2. $f(x) = y = x^4 - 4x^2$

Puntos de corte

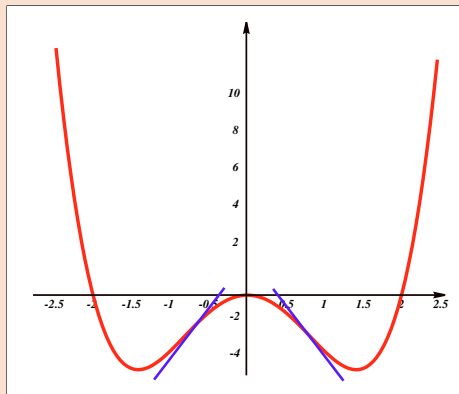
$$y = 0 = x^2(x^2 - 4) \implies x = -2; 0; 2$$

Ramas del infinito

$$f(-\infty) = \infty \quad f(\infty) = \infty$$

**Crecimiento y
decrecimiento.**

$$f'(x) = 4x^3 - 8x \implies x = 0; \pm\sqrt{2}$$



	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	\searrow	-4	\nearrow	0	\searrow

Concavidad.

$$f''(x) = 12x^2 - 8$$

	$-\infty$	$-\sqrt{2/3}$	$\sqrt{2/3}$	$+\infty$
y''	+	0	-	+
y	U	-20/9	\cap	-20/9



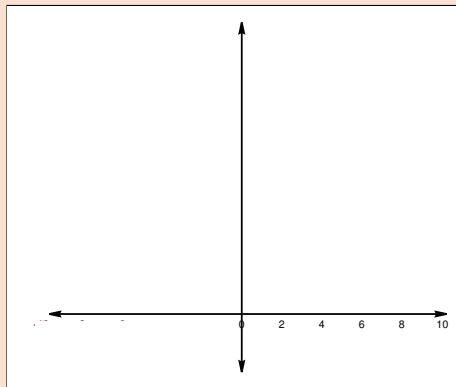
MaTeX

GRÁFICAS



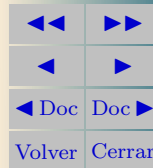
Ejemplo 5.3. $y = \frac{x + 1}{x^2}$

Puntos de corte



MaT_EX

GRÁFICAS

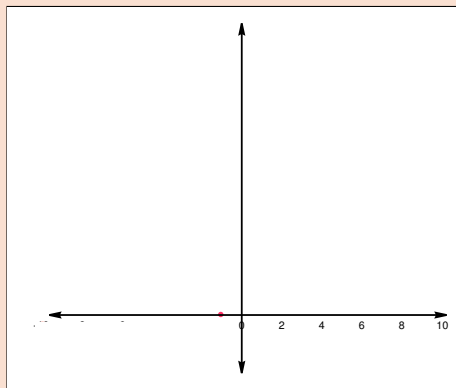


Ejemplo 5.3. $y = \frac{x+1}{x^2}$

Puntos de corte

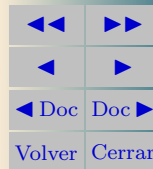
$$y = 0 = \frac{x+1}{x^2} \implies x = -1$$

Ramas del infinito



MaT_EX

GRÁFICAS



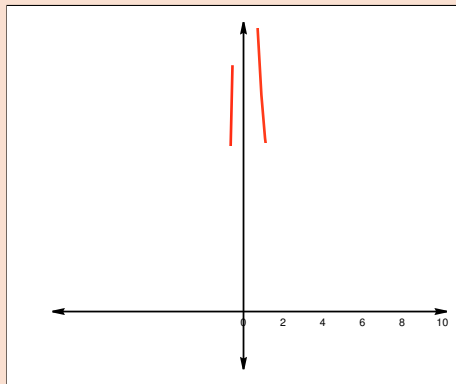
Ejemplo 5.3. $y = \frac{x+1}{x^2}$

Puntos de corte

$$y = 0 = \frac{x+1}{x^2} \implies x = -1$$

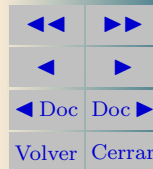
Ramas del infinito

$$f(0^-) = +\infty \quad f(0^+) = +\infty$$



MaTeX

GRÁFICAS



Ejemplo 5.3. $y = \frac{x+1}{x^2}$

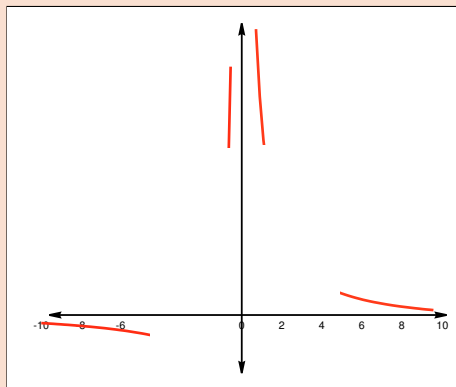
Puntos de corte

$$y = 0 = \frac{x+1}{x^2} \implies x = -1$$

Ramas del infinito

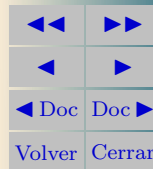
$$f(0^-) = +\infty \quad f(0^+) = +\infty$$

$$f(-\infty) = 0 \quad f(+\infty) = 0$$



MaT_EX

GRÁFICAS



Ejemplo 5.3. $y = \frac{x+1}{x^2}$

Puntos de corte

$$y = 0 = \frac{x+1}{x^2} \implies x = -1$$

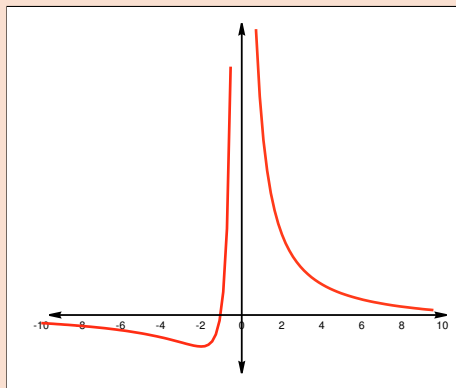
Ramas del infinito

$$f(0^-) = +\infty \quad f(0^+) = +\infty$$

$$f(+\infty) = 0 \quad f(-\infty) = 0$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = \frac{-(x+2)}{x^3} \implies x = -2$$

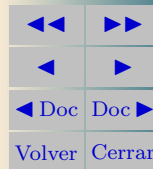


	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$-$
y	\searrow	$-1/4$	\nearrow	\searrow



MaTeX

GRÁFICAS



Ejemplo 5.3. $y = \frac{x+1}{x^2}$

Puntos de corte

$$y = 0 = \frac{x+1}{x^2} \implies x = -1$$

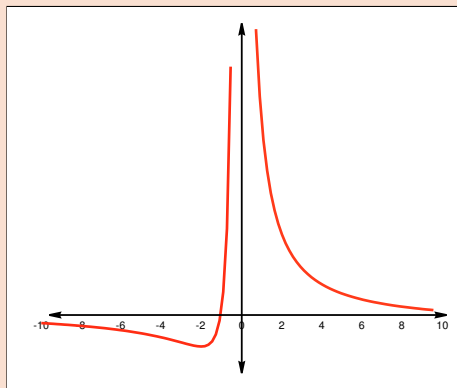
Ramas del infinito

$$f(0^-) = +\infty \quad f(0^+) = +\infty$$

$$f(+\infty) = 0 \quad f(-\infty) = 0$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = \frac{-(x+2)}{x^3} \implies x = -2$$



	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$-$
y	\searrow	$-1/4$	\nearrow	\searrow

Concavidad

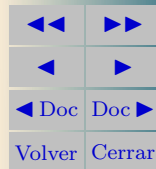
$$f''(x) = \frac{2(x+3)}{x^4} \implies x = -3$$

	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$	$-$
y	\cap	$-2/9$	\cup	\cup



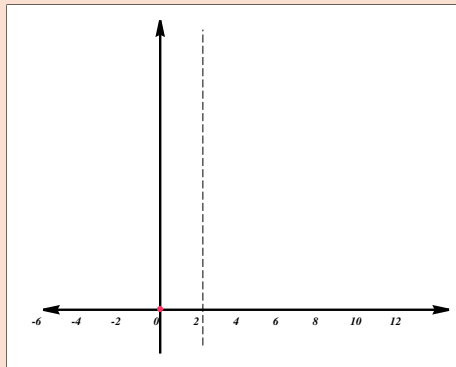
MaTeX

GRÁFICAS



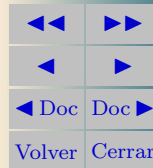
Ejemplo 5.4. $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

Puntos de corte



MaTeX

GRÁFICAS

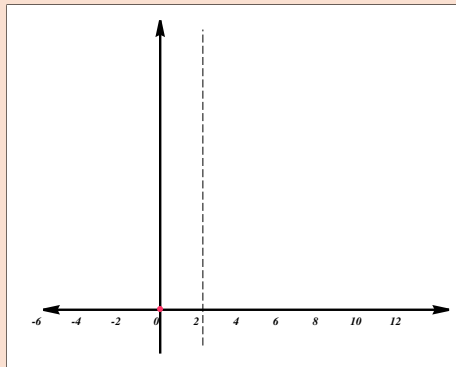


Ejemplo 5.4. $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

Puntos de corte

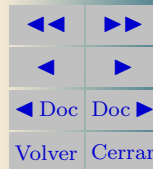
$$f(x) = 0 = \frac{x^3}{(x-2)^2} \implies x = 0$$

Ramas del infinito:



MaTeX

GRÁFICAS



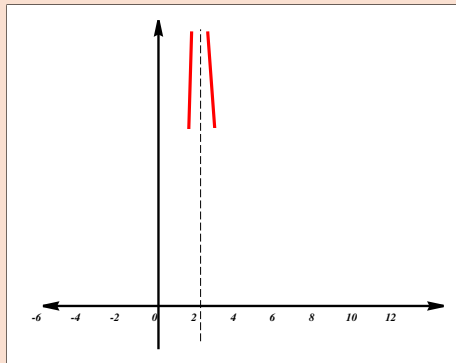
Ejemplo 5.4. $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

Puntos de corte

$$f(x) = 0 = \frac{x^3}{(x-2)^2} \implies x = 0$$

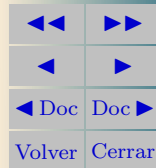
Ramas del infinito:

$$f(2^-) = +\infty \quad f(2^+) = +\infty$$



MaTeX

GRÁFICAS



Ejemplo 5.4. $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

Puntos de corte

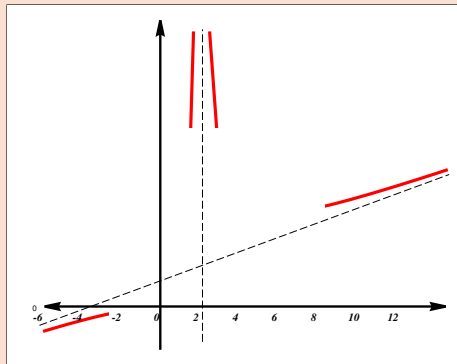
$$f(x) = 0 = \frac{x^3}{(x-2)^2} \implies x = 0$$

Ramas del infinito:

$$f(2^-) = +\infty \quad f(2^+) = +\infty$$

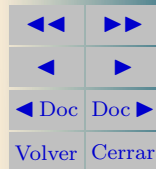
A. Oblicua

$$\frac{x^3}{(x-2)^2} = \boxed{x+4} + \frac{12x-16}{(x-2)^2}$$



MaTeX

GRÁFICAS



Ejemplo 5.4. $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

Puntos de corte

$$f(x) = 0 = \frac{x^3}{(x-2)^2} \implies x = 0$$

Ramas del infinito:

$$f(2^-) = +\infty \quad f(2^+) = +\infty$$

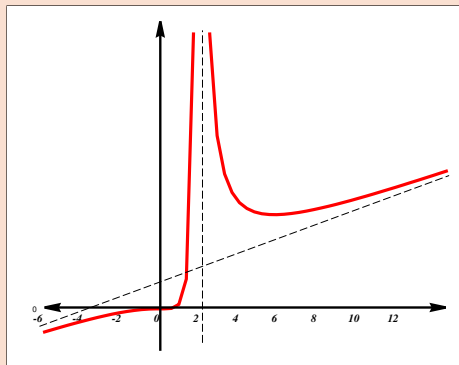
A. Oblicua

$$\frac{x^3}{(x-2)^2} = \boxed{x+4} + \frac{12x-16}{(x-2)^2}$$

Crecimiento

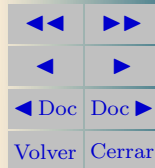
$$f'(x) = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3} \implies x = 0; 6$$

	$-\infty$	0	2	6	$+\infty$			
y'		+	0	+	#	-	0	+
y		\nearrow	0	\nearrow	#	\searrow	13,5	\nearrow



MaTeX

GRÁFICAS



Ejemplo 5.4. $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

Puntos de corte

$$f(x) = 0 = \frac{x^3}{(x-2)^2} \implies x = 0$$

Ramas del infinito:

$$f(2^-) = +\infty \quad f(2^+) = +\infty$$

A. Oblicua

$$\frac{x^3}{(x-2)^2} = \boxed{x+4} + \frac{12x-16}{(x-2)^2}$$

Crecimiento

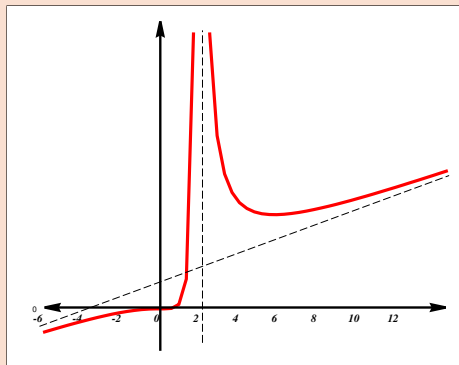
$$f'(x) = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3} \implies x = 0; 6$$

	$-\infty$	0	2	6	$+\infty$			
y'		+	0	+	\neq	-	0	+
y		\nearrow	0	\nearrow	\neq	\searrow	13,5	\nearrow

Concavidad

$$f''(x) = \frac{24x}{(x-2)^4} \implies x = 0$$

	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y''		-	0	+	\neq	+
y		\cap	0	\cup	\neq	\cup



MaTeX

GRÁFICAS



6. Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales son las que tienen la variable como exponente. Para hacernos una idea clara vamos a analizar por ejemplo, la función

$$y = 2^x$$

La exponencial está bien definida para cualquier valor de x . Recuerda que $2^0 = 1$ y como funcionan los exponentes negativos.

$$x > 0$$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^5 = 32$$

$$2^{10} = 1024$$

$$x < 0$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$2^{-5} = \frac{1}{32}$$

$$2^{-10} = \frac{1}{1024}$$

Observa que cualquier potencia de 2 es siempre positiva. A continuación realizamos una tabla de valores y mostramos la gráfica de $y = 2^x$.

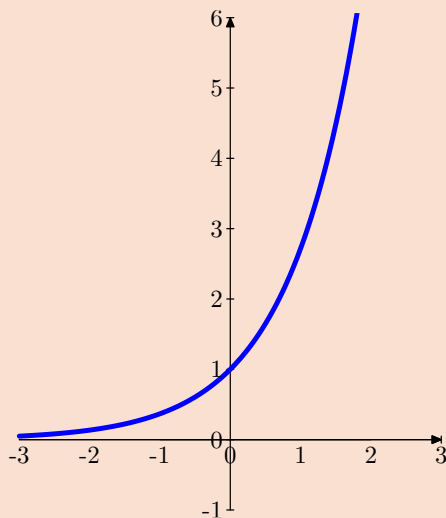


MaTEX

GRÁFICAS



x	$y = 2^x$
-20	0,00000095367
-10	0,0009765625
-5	0,03125
-3	0,125
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
5	32
10	1024
20	1048576
30	1073741824



- $D = \mathcal{R}$
- $x \rightarrow -\infty \implies 2^x \rightarrow 0$
- $x \rightarrow +\infty \implies 2^x \rightarrow +\infty$



MaTeX

GRÁFICAS

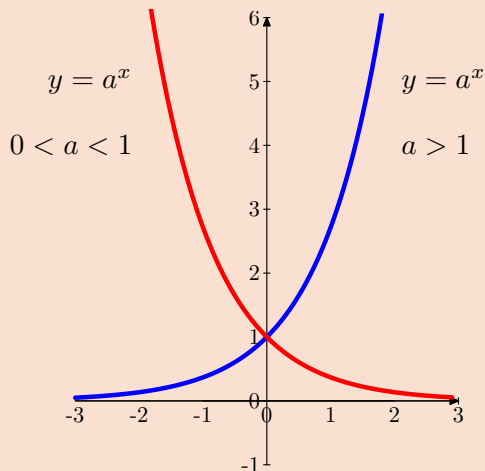


Podemos generalizar a cualquier base a que sea positiva, distinguiendo según el valor de a sea menor o mayor que 1.

Ejemplo 6.1. Estudiar y representar la función

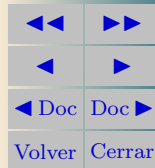
$$y = a^x$$

Solución:

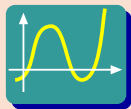


MaTeX

GRÁFICAS



□



Ejercicio 11.

◀ Pulsa y elige el botón **Exponenciales $y = a^x$** y realiza la siguiente práctica:

Desplaza el botón de los valores de a y verás representadas las funciones exponenciales en base a cuando a varía desde 0 y hasta 4.

Test. Responde a las siguientes cuestiones

1. Para cualquier base a , todas las funciones $y = a^x$ tienen como dominio:

- (a) R (b) $(0, \infty)$ (c) otro

2. Cuando la base $a > 1$, la función $y = a^x$ es:

- (a) Creciente (b) Decreciente

3. Cuando la base $0 < a < 1$, la función $y = a^x$ es:

- (a) Creciente (b) Decreciente

4. Cuando la base $a > 1$, y x se tiende a $-\infty$, la función a^x tiende a:

- (a) $-\infty$ (b) 0 (c) ∞

5. Cuando la base $a < 1$, y x se tiende a $-\infty$, la función a^x tiende a:

- (a) $-\infty$ (b) 0 (c) ∞

6. Para cualquier base a , los valores de la función a^x son siempre:

- (a) Negativos (b) Positivos



MaTeX

GRÁFICAS



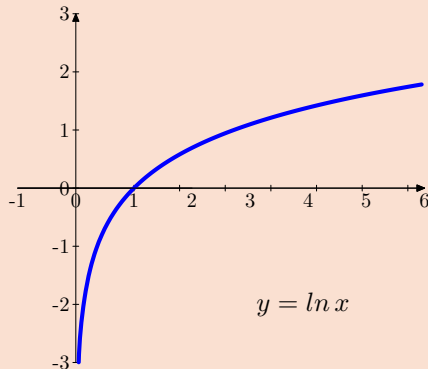


7. Funciones logarítmicas

Estudiar y representar la función

$$y = \log_{10} x$$

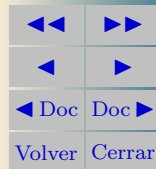
x	$y = \log_{10} x$
10^{-100}	-100
10^{-10}	-10
10^{-1}	-1
1	0
10^1	1
10^2	2
10^5	5
10^{100}	100
10^{1000}	1000



- $\mathcal{D} = (0; +\infty)$
- $x \rightarrow 0^+ \implies \log_{10} x \rightarrow -\infty$
- $x \rightarrow +\infty \implies \log_{10} x \rightarrow +\infty$

MaTeX

GRÁFICAS

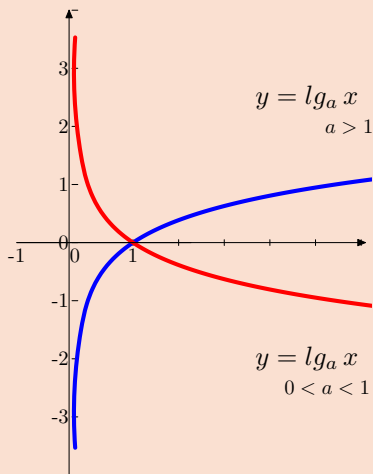


Podemos generalizar a cualquier base a que sea positiva, distinguiendo según el valor de a sea menor o mayor que 1.

Ejemplo 7.1. Estudiar y representar la función

$$y = \log_a x$$

Solución:

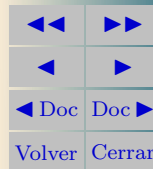


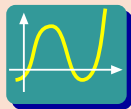
□



MaTeX

GRÁFICAS





Práctica 7.1.

◀ Pulsa y elige el botón **Logaritmos $\log_a(x)$** y realiza la siguiente práctica:

Desplaza el botón de los valores de a y verás representadas las funciones logarítmicas en base a cuando a varía desde 0.1 hasta 4.

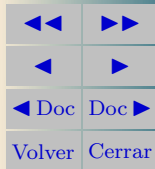
Test. Responde a las siguientes cuestiones

- Para cualquier base a , todas las funciones $\log_a x$ tienen como dominio:
 - R
 - $(0, \infty)$
 - $[0, \infty)$
- Cuando la base $a > 1$, la función $\log_a x$ es:
 - Creciente
 - Decreciente
- Cuando la base $a < 1$, la función $\log_a x$ es:
 - Creciente
 - Decreciente
- Cuando la base $a > 1$, y x se aproxima a 0, $x \rightarrow 0$, la función $\log_a x$ tiende a:
 - 0
 - $-\infty$
 - ∞
- Cuando la base $a < 1$, y x se aproxima a 0, $x \rightarrow 0$, la función $\log_a x$ tiende a:
 - 0
 - $-\infty$
 - ∞
- Para cualquier base a , todas las funciones $\log_a x$ cortan al eje OX en el punto:
 - 0
 - 1



MaTEX

GRÁFICAS



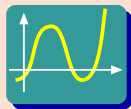
Ejercicio 12. Representar la función: $y = x^3 - 3x^2 + 3$

Ejercicio 13. Representar la función: $y = 3x^4 + 4x^3$

Ejercicio 14. Representar la función: $y = \sqrt{x}$

Ejercicio 15. Representar la función: $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

Ejercicio 16. Representar la función: $y = \frac{x}{x^2 - 1}$



◀ Pulsa y elige el botón **Dibujar $y = f(x)$** y realiza la siguiente práctica. Puedes representar las funciones de los ejercicios anteriores.

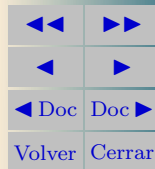
Práctica 7.2.

- Introduce en $f(x)$ la expresión $x^3 - 3x^2 + 3$, y pulsa en *Nueva Función*.
- Introduce en $f(x)$ la expresión $3x^4 + 4x^3$, y pulsa en *Nueva Función*.
- Introduce en $f(x)$ la expresión $\text{sqrt}(x)$, y pulsa en *Nueva Función*.
- Introduce en $f(x)$ la expresión $1/(x^2 + 1)$, y pulsa en *Nueva Función*.
- Introduce en $f(x)$ la expresión $1/(x^2 - 1)$, y pulsa en *Nueva Función*.



MaTEX

GRÁFICAS



Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

$$a) f(x) = \frac{2}{3x} \implies D_f = \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$b) g(x) = \frac{2}{x^2 - 1} \implies D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}.$$

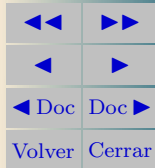
$$c) h(x) = \frac{x}{1+x} \implies D_h = \mathbb{R} - \{-1\}.$$



MaTEX

Ejercicio 1

GRÁFICAS



Ejercicio 2.

$$a) f(x) = \frac{3x}{5} \implies D_f = R.$$

$$b) g(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \implies D_g = R - \{2; 3\}.$$

$$c) h(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x} \implies D_h = R - \{0; 3\}.$$



MaTEX

Ejercicio 2

GRÁFICAS

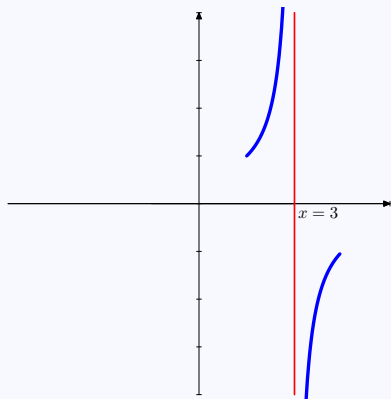


**Ejercicio 3.**

$$f(x) = \frac{2+x}{3-x} \text{ en } x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2+x}{3-x} = -\infty$$

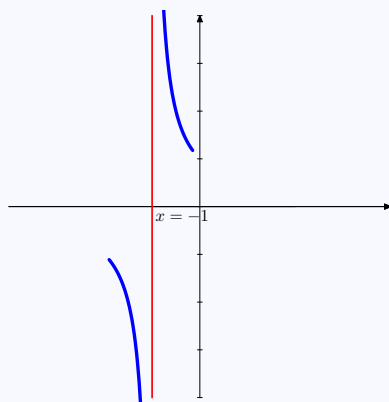
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2+x}{3-x} = +\infty$$



$$g(x) = \frac{x^2}{x+1} \text{ en } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$

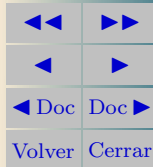
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$$



Ejercicio 3

MaTeX

GRÁFICAS





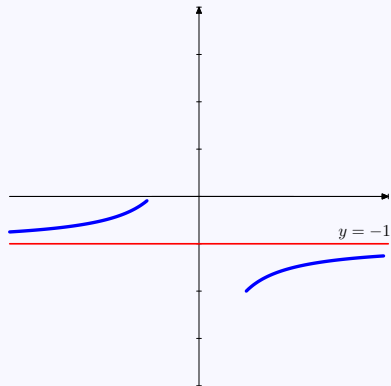
Ejercicio 4.

$$f(x) = \frac{2+x}{3-x} \text{ tiene } y = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x}{3-x} = -1$$

$$\text{Si } x = 10 \implies \frac{2+10}{3-10} < -1$$

$$\text{Si } x = -10 \implies \frac{2-10}{3+10} > -1$$

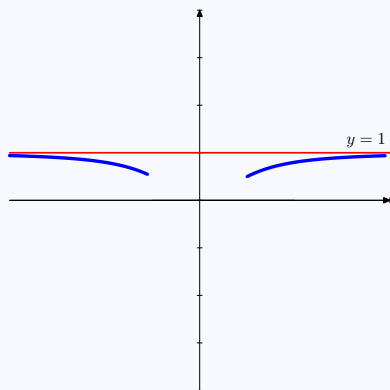


$$g(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \text{ tiene } y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

$$\text{Si } x = 10 \implies \frac{100}{100+1} < 1$$

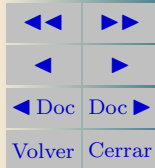
$$\text{Si } x = -10 \implies \frac{100}{100+1} < 1$$



Ejercicio 4

MaTeX

GRÁFICAS





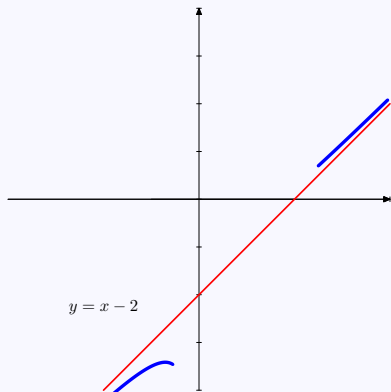
Ejercicio 5.

$$f(x) = \frac{2 + x^2}{2 + x}$$

Oblicua $y_o = x - 2$

$$f(10) = 8,5 > y_o(10) = 8$$

$$f(-10) = -12,75 < y_o(-10) = -12$$

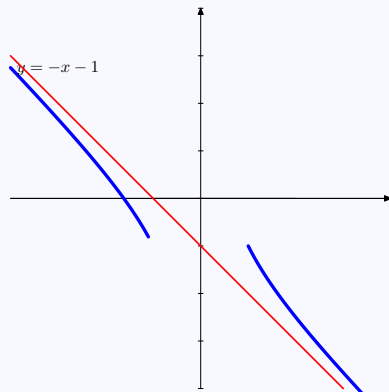


$$g(x) = \frac{x^2 - 2}{1 - x}$$

Oblicua $y_o = -x - 1$

$$h(10) = -10,8 > y_o(10) = -11$$

$$h(-10) = 8,9 < y_o(-10) = 9$$



Ejercicio 5

MaTeX

GRÁFICAS

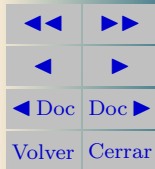


Ejercicio 6.



MaTeX

GRÁFICAS



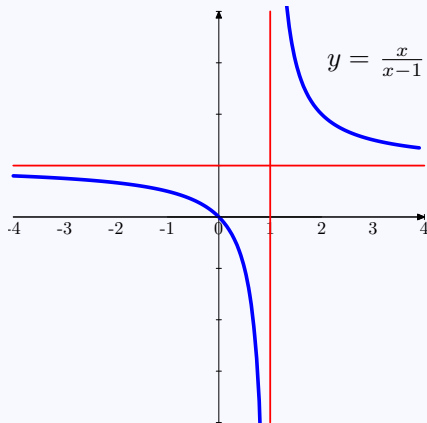
Ramas del Infinito de $\frac{x}{x-1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$



La función presenta:

- una asíntota vertical en $x = 1$
- una asíntota horizontal $y = 1$

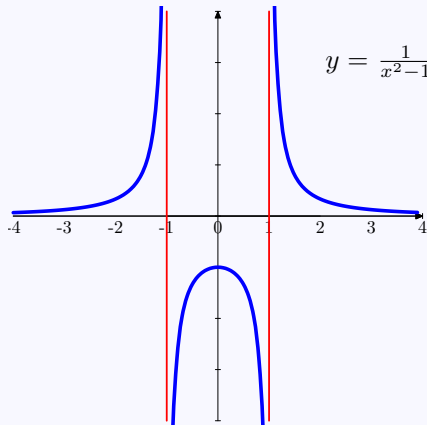
Ejercicio 6

Ejercicio 7.

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$	
$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	0
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	0

La función presenta:

- dos asíntotas verticales en $x = \pm 1$
- una asíntota horizontal $y = 0$



MaTEX

GRÁFICAS

Ejercicio 7



Ejercicio 8.

- Horizontal no tiene
- Vertical $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x} = -\infty$$

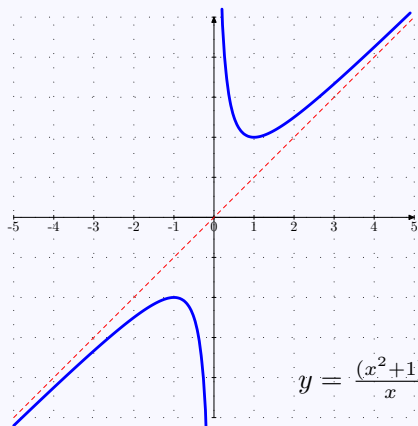
- Oblicua $y_0 = x$, pues

$$\frac{x^2 + 1}{x} = \boxed{x} + \frac{1}{x}$$

Posición:

$$f(10) = 10,1 > y_0(10) = 10$$

$$f(-10) = -10,1 < y_0(-10) = -10$$

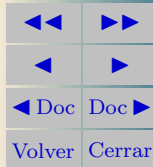


Ejercicio 8



MaTeX

GRÁFICAS



Ejercicio 9.

- Horizontal no tiene
- Vertical $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = +\infty$$

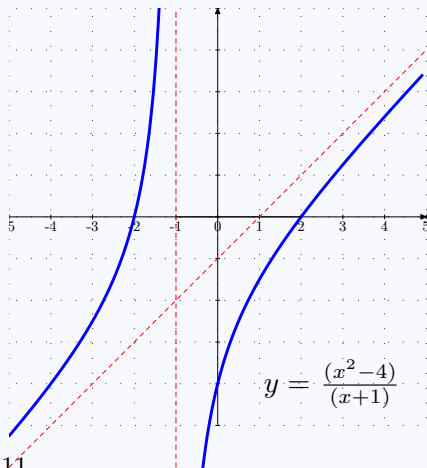
- Oblicua $y_0 = x - 1$, pues

$$\frac{x^2 - 4}{x + 1} = \boxed{x - 1} - \frac{3}{x - 1}$$

Posición:

$$f(10) = 8,72 < y_0(10) = 9$$

$$f(-10) = -10,66 > y_0(-10) = -11$$



Ejercicio 9



MaTeX

GRÁFICAS



Ejercicio 10.

- Horizontal no tiene
- Vertical $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = +\infty$$

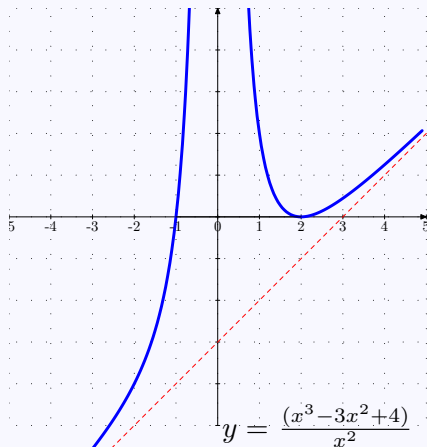
- Oblicua $y_0 = x - 3$, pues

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = \boxed{x - 3} + \frac{4}{x^2}$$

Posición:

$$f(10) = 7,04 > y_0(10) = 7$$

$$f(-10) = -12,96 > y_0(-10) = -13$$



Ejercicio 10



MaTeX

GRÁFICAS



Ejercicio 12.**Ramas del infinito:**

$$f(-\infty) = -\infty \quad f(+\infty) = \infty$$

Crecimiento y decrecimiento.

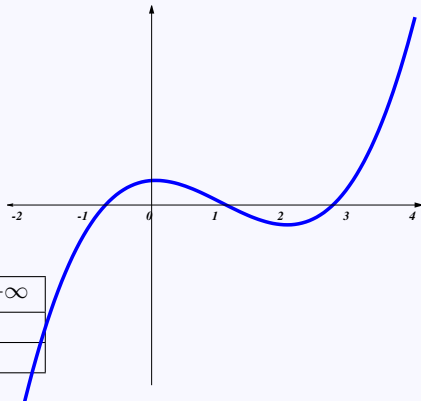
$$f'(x) = 3x(x - 2) \implies x = 0; 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'	+	0	-	0	+	
y		↗	3	↘	-1	↗

Concavidad

$$f''(x) = 6x - 6 \implies x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
y''		-	0	+
y		⌒	1	⌒



$$m(2, -1)$$

$$M(0, 3)$$

$$I(1, 1)$$

MaTEX

GRÁFICAS

Ejercicio 12



Ejercicio 13.**Puntos de corte**

$$y = 0 = 3x^4 + 4x^3 \implies x = 0; -4/3$$

Ramas del infinito:

$$f(-\infty) = \infty \quad f(+\infty) = \infty$$

Crecimiento y decrecimiento.

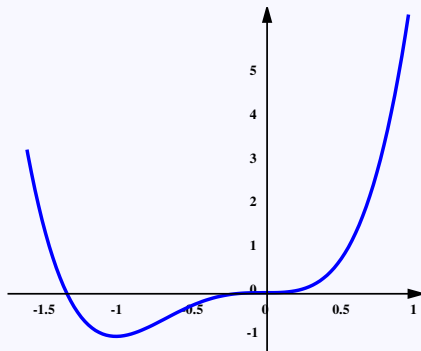
$$f'(x) = 12x^2(x+1) \implies x = 0; -1$$

x	$-\infty$	0	-1	$+\infty$		
y'		-	0	+		
y		\searrow	0	\searrow	-1	\nearrow

Concavidad

$$f''(x) = 36x^2 + 24x \implies x = 0; -2/3$$

x	$-\infty$	$-2/3$	0	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y		\smile	$-\frac{16}{27}$	\smile	0	\smile



MaTeX

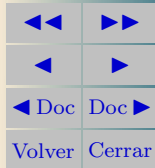
GRÁFICAS

$$m(-1, -1)$$

$$I_1(0, 0)$$

$$I_2\left(-\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$$

Ejercicio 13



Ejercicio 14.**Puntos de corte**

$$y = 0 = \sqrt{x} \implies x = 0$$

Ramas del infinito:

$$f(+\infty) = \infty$$

Crecimiento y decrecimiento.

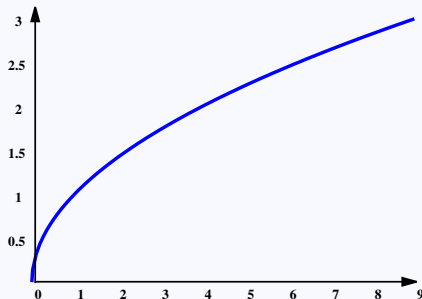
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \implies f' > 0$$

x	0	$+\infty$
y'	∞	+
y	0	\nearrow

Concavidad

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \implies f'' < 0$$

x	0	$+\infty$
y''	∞	-
y	0	\frown



MaTeX

GRÁFICAS

función creciente
función convexa

Ejercicio 14



Ejercicio 15.

$$y = 0 = \frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow y \neq 0$$

Ramas del infinito

$$f(1^-) = -\infty \quad f(1^+) = +\infty$$

$$f(-1^-) = +\infty \quad f(-1^+) = -\infty$$

$$f(-\infty) = 0 \quad f(\infty) = 0$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow x = 0$$

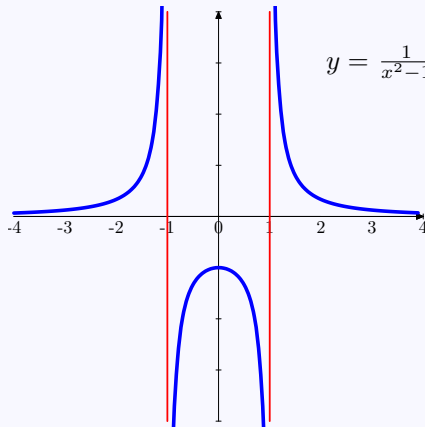
	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	-
y		↗	↘

Concavidad

$$f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3} \Rightarrow f'' \neq 0$$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y''	+	∓	- ∓	+
y	∪	∓	∩ ∓	∪

Ejercicio 15

MaTEX

GRÁFICAS



**Ejercicio 16.**

$$y = 0 = \frac{x}{x^2 - 1} \implies x = 0$$

Ramas del infinito

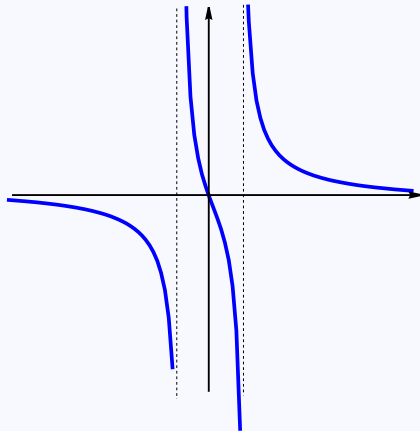
$$f(1^-) = -\infty \quad f(1^+) = +\infty$$

$$f(-1^-) = -\infty \quad f(-1^+) = +\infty$$

$$f(-\infty) = 0 \quad f(\infty) = 0$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \implies f' < 0$$



$$\text{Concavidad } f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \implies x = 0$$

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y''	$-$	\nexists	$+$	0	$-$	\nexists	$+$
y	\cap	\nexists	\cup	\nexists	\cap	\nexists	\cup

Asintotas Verticales

$$x = -1, x = 1$$

Asintota Horizontal

$$y = 0$$

$$I(0,0)$$

MaTeX

GRÁFICAS

Ejercicio 16

