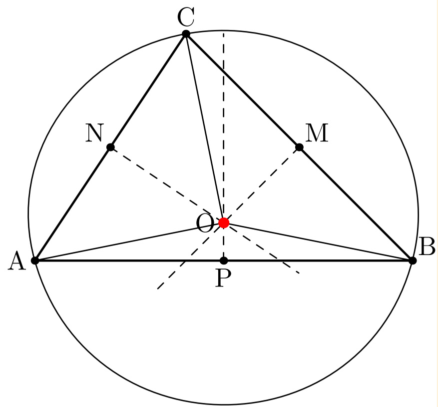
Proyecto MaTEX

Geometría

Fco Javier González Ortiz

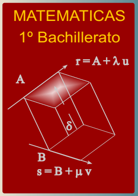


Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

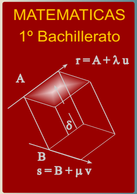
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Tabla de Contenido



1. Ecuación de la recta

Definición 1.1 *La ecuación de una recta viene determinada por un punto* $A(x_0, y_0)$ *y un vector direccional* $\vec{\mathbf{u}}(u_1, u_2)$.

$$r \equiv < A; \vec{\mathbf{u}} >$$

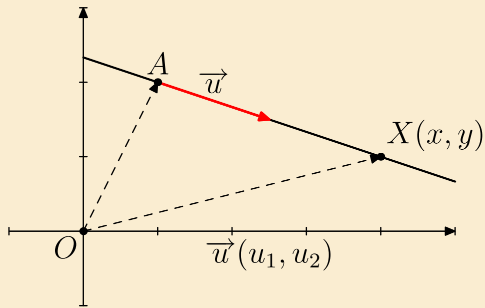
Un punto X *pertenece a la recta* r, *observar el dibujo, si el vector* $\overrightarrow{AX}$ *es proporcional al vector* $\vec{\mathbf{u}}$, *es decir*

$$\overrightarrow{AX} = \lambda\, \vec{\mathbf{u}} \text{ para algún } \lambda \in R$$

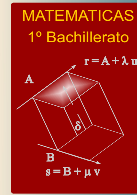
Siendo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} \\
\overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} \\
\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} &= \lambda\, \vec{\mathbf{u}} \\
X - A &= \lambda\, \vec{\mathbf{u}}
\end{aligned}$$

se obtiene la ecuación



$$\boxed{\mathbf{r} \equiv X = A + \lambda\, \vec{u}} \tag{1}$$



MaTEX

GEOMETRÍA DE LA RECTA

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

1.1. Tipos de ecuaciones de la recta

- **Ecuación Vectorial**. Expresando la ecuación 1 en coordenadas

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda\,(u_1, u_2)$$

- **Ecuaciones Paramétricas**. Separando las componentes

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda\, u_1 \\ y & = & y_0 + \lambda\, u_2 \end{array}\right\}$$

- **Ecuaciones Continua**. Despejando en la expresión anterior el parámetro λ e igualando

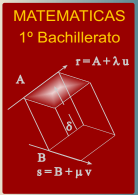
$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$$

  Observa que las tres ecuaciones anteriores muestran los mismos detalles de la recta, su punto y su vector direccional, pero escritas de forma diferente.

- **Ecuaciones Cartesianas**. Operando la igualdad anterior, resulta

$$Ax + By + C = 0$$

  también llamada ecuación cartesiana o implícita. El vector de la recta corresponde a $\vec{u}(-B, A)$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 1.1. Determinar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(0,3)$.

Solución: El vector director $\vec{u} = \vec{AB} = (-1,1)$

- **Ecuación Vectorial**. $(x,y) = (1,2) + \lambda\,(-1,1))$
- **Ecuaciones Paramétricas**. $\left.\begin{array}{rcl} x & = & 1-\lambda \\ y & = & 2+\lambda \end{array}\right\}$
- **Ecuación Continua**. $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1}$
- **Ecuación Cartesiana**. Operando la igualdad anterior y ordenando se obtiene la expresión:

$$x + y - 3 = 0$$

□

Ejercicio 1. Determinar la dirección y dos puntos de la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3}$$

Ejercicio 2. Dada la recta

$$r \equiv \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2\,\lambda \\ y & = & 3-\lambda \end{array}\right.$$

Determinar: un punto, su dirección y expresarla en forma continua.

Ejercicio 3. Hallar la ecuación continua de la recta $2\,x + \,y = 3$.

Ejercicio 4. Escribe las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por:

a) $A(6,-2)$ y $B(0,5)$ *b*) $C(0,0)$ y $D(5,0)$ *c*) $E(3,2)$ y $F(1,2)$

Ejercicio 5. Halla las ecuaciones paramétricas de cada una de las rectas siguientes:

a) $2x - y = 0$ *b*) $x - 7 = 0$ *c*) $3y - 6 = 0$

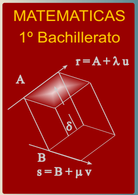
Ejercicio 6. La recta $r \equiv m\,x + 4\,y + 8 = 0$ para que el punto $C(-2,-1)$. Hallar m y todas las ecuaciones de r.

Ejercicio 7. Halla k para que el punto $C(2,k)$ pertenezca a la recta

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -1 + 3\,\lambda \\ y & = & 2\; - \lambda \end{array}\right.$$

Ejercicio 8. Escribe la ecuación continua de las rectas :

a) $2x - y = 8$ *b*) $x - 7\,y = 1$ *c*) $\begin{array}{rcr} x & = & 6 - 6\lambda \\ y & = & -2 + 7\,\lambda \end{array}$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

1.2. Pendiente de una recta. Ecuación explicita

Dados dos puntos $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$, el vector dirección es

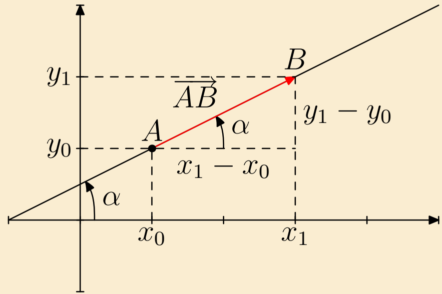
$$\overrightarrow{AB}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

La ecuación de r en forma continua

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Despejando

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$



Se define la pendiente m de r al número $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \tan\alpha$

La pendiente es una medida de la inclinación de la recta respecto a la parte positiva del eje Ox. La ecuación anterior se llama **punto-pendiente**

$$\boxed{y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}$$

Y si se opera se obtiene la **ecuación explícita**

$$\boxed{y = m\,x + n}$$

Ejemplo 1.2. Hallar la ecuación explícita y la pendiente de la recta:

$$r \equiv 4\,x - 2\,y - 5 = 0$$

Solución: Despejando y se obtiene la ecuación explícita:

$$y = 2\,x + \frac{5}{2}$$

La pendiente es $m = 2$. □

Ejemplo 1.3. Hallar la ecuación la recta que pasa por el punto $A(1, 3)$ y tiene de pendiente $m = 5$:

Solución: Por la definición anterior

$$y - 3 = 5\,(x - 1)$$

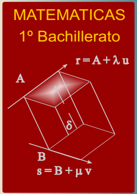
□

Ejercicio 9. Determinar la pendiente y el vector direccional de cada una de las rectas:

a) $3\,x - y = -1$ *b*) $2\,x - 3\,y = 10$

c) $x + 2\,y + 6 = 0$ *d*) $-x + 2\,y = 10$

e) $x = 0$ *f*) $y = 0$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

1.3. Rectas paralelas

Definición 1.2 *Dos rectas r y s son paralelas si sus vectores direccionales son $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ son proporcionales.*

Teorema 1.1. Dos rectas r y s son paralelas si los coeficientes de sus ecuaciones son proporcionales

$$\left.\begin{array}{rcl} A\,x + B\,y + C & = & 0 \\ A'\,x + B'\,y + C' & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{r \parallel s \Longleftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}} \tag{2}$$

Teorema 1.2. Dos rectas r y s son paralelas si tienen la misma pendiente

$$\boxed{r \parallel s \Longleftrightarrow m_r = m_s}$$

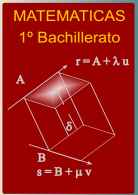
Ejercicio 10. Comprobar que las rectas r y s son paralelas:

$$r \equiv -x + 3y + 4 = 0$$
$$s \equiv 2x - 6y - 1 = 0$$

a) Con sus vectores.

b) Con sus coeficientes.

c) Con sus pendientes



MaTEX

GEOMETRÍA DE LA RECTA

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Realiza los siguientes ejercicios sobre rectas paralelas utilizando cualquiera de las condiciones anteriores, es decir, comparando los vectores, los coeficientes o las pendientes.

Ejercicio 11. Hallar una recta paralela a $r \equiv x - 3y + 4 = 0$ que pase por el punto $P(3, 1)$.

Ejercicio 12. Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$a)\quad \begin{array}{c} -x + 3y + 4 = 0 \\ 3x - 9y - 12 = 0 \end{array} \qquad\qquad b)\quad \begin{array}{c} 5x + y + 3 = 0 \\ x - 2y + 16 = 0 \end{array}$$

Ejercicio 13. En los siguientes pares de rectas, hallar el parámetro k para que sean paralelas:

$$a)\quad \begin{array}{c} r \equiv -k\,x + 3y + 4 = 0 \\ s \equiv 3x - 5\,y - 12 = 0 \end{array} \qquad\qquad b)\quad \begin{array}{c} r \equiv 5x + k\,y + 3 = 0 \\ s \equiv x - 2y + 16 = 0 \end{array}$$

Ejercicio 14. En los siguientes pares de rectas, hallar el parámetro a para que sean paralelas:

$$a)\quad \begin{array}{c} r \equiv y = a\,x + 5 \\ s \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{2} \end{array} \qquad\qquad b)\quad \begin{array}{c} r \equiv \dfrac{x-5}{a} = \dfrac{y-3}{5} \\ s \equiv y = 2\,a\,x + 1 \end{array}$$

Ejercicio 15. Los puntos $A(0, -2)$, $B(6, 0)$ y $C(3, 4)$ son los vértices de un paralelogramo. Calcular el cuarto vértice D y la ecuación de las diagonales.

1.4. Rectas perpendiculares

Definición 1.3 *Dos rectas r y s son perpendiculares si sus vectores direccionales $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son ortogonales o perpendiculares, es decir cuando el producto escalar es cero.*

$$\boxed{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0} \tag{3}$$

Teorema 1.3. Dos rectas r y s

$$\left.\begin{array}{rcl} A\,x + B\,y + C & = & 0 \\ A'\,x + B'\,y + C' & = & 0 \end{array}\right\}$$

son perpendiculares si los coeficientes de sus ecuaciones verifican

$$\boxed{r \perp s \Leftrightarrow A \cdot A' + B \cdot B' = 0} \tag{4}$$

Teorema 1.4. Dos rectas r y s son perpendiculares si sus pendientes verifican la relación

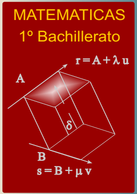
$$\boxed{r \perp s \Longleftrightarrow m_r \cdot m_s = -1} \tag{5}$$

Ejemplo 1.4. Comprobar que las rectas r y s son perpendiculares:

$$\begin{array}{c} r \equiv -x + 3y + 4 = 0 \\ s \equiv 6x + 2y - 1 = 0 \end{array}$$

Solución: Los vectores direccionales de las rectas r y s son $\vec{\mathbf{u}}(-3,-1)$ y $\vec{\mathbf{v}}(-2,6)$, como

$$\vec{\mathbf{u}}(-3,-1) \cdot \vec{\mathbf{v}}(-2,6) = (-3)(-2) + (-1)(6) = 0$$



MaTEX
Geometría de la Recta
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

las rectas son perpendiculares □

Realiza los siguientes ejercicios sobre rectas perpendiculares utilizando cualquiera de las condiciones anteriores, es decir, comparando los vectores, los coeficientes o las pendientes.

Ejercicio 16. Hallar una recta perpendicular a $r \equiv x - 3y + 4 = 0$ que pase por el punto $P(3, 1)$.

Ejercicio 17. Dadas las rectas r y s :

$$r \equiv c\,x + y - 1 = 0 \qquad s \equiv 2\,x - 3\,y = 0$$

hallar c para que sean perpendiculares y en ese caso el punto de intersección de ambas.

Ejercicio 18. Dadas las rectas r y s :

$$r \equiv x + b\,y - 1 = 0 \qquad s \equiv x = 3\,y$$

hallar b para que sean perpendiculares y y en ese caso el punto de intersección de ambas.

Ejercicio 19. Dadas las rectas r y s :

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -m\lambda \\ y & = & 2 + 2\,\lambda \end{array} \right. \qquad s \equiv 4x - y + 2 = 0$$

hallar m para que sean perpendiculares.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 20. Dadas las rectas r y s :

$$r \equiv a\,x - 2\,y + 7 = 0 \qquad s \equiv \frac{x+1}{b} = \frac{y}{2}$$

hallar a y b sabiendo que son perpendiculares y que r pasa por el punto $P(1,2)$.

Ejercicio 21. Dada la recta $4x + 3y - 6 = 0$, escribe la ecuación de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas.

Ejercicio 22. Calcula m y n en las rectas de ecuaciones:

$$r : mx - 2y + 5 = 0 \qquad s : nx + 6y - 8 = 0$$

sabiendo que son perpendiculares y que r pasa por el punto $P(1,4)$.

Ejercicio 23. Dadas las rectas de ecuaciones:

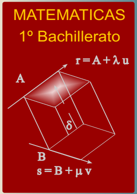
$$r : 5\,x - y + 4 = 0 \qquad s : \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -3 + m\,\lambda \\ y & = & 4 - \lambda \end{array} \right.$$

determinar el valor de m para que las rectas r y s:

a) Paralelas

b) Perpendiculares

c) Coincidentes



• Mediatriz de un segmento

Definición 1.4 *Dados los puntos $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ definimos la mediatriz m_{AB} del segmento AB como la recta perpendicular a la recta AB que pasa por el punto medio de A y B.*

Dados los puntos $A(0,0)$ y $B(4,2)$, su vector es

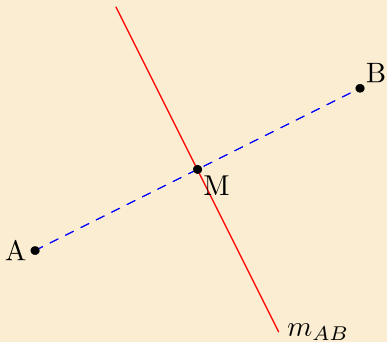
$$\overrightarrow{AB}(4,2) \sim (2,1)$$

luego la dirección perpendicular es $\vec{v}(-1,2)$.
El punto medio M es

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (2,1)$$

la ecuación de la mediatriz es:

$$m_{AB} \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2}$$



- **Punto simétrico de un punto a una recta**

Dado un punto $P(x_0, y_0)$, indicamos por P' el punto simétrico de P respecto de una recta r e indicamos por H el pie de la perpendicular que pasa por P. Se cumple que H es el punto medio de P y P'.

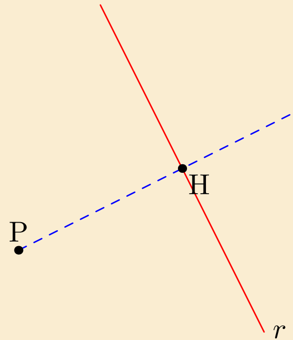
Sea $P(0,0)$ y $r \equiv 2\,x + y - 5 = 0$. La perpendicular a r por P es la recta s

$$s \equiv \frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{1} \quad x - 2\,y = 0$$

H es la intersección de $r \cap s$.

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv 2\,x + y - 5 = 0 \\ s \equiv x - 2\,y = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow H(2,1)$$

Sea $P'(x,y)$, como H es el punto medio de P y P'.

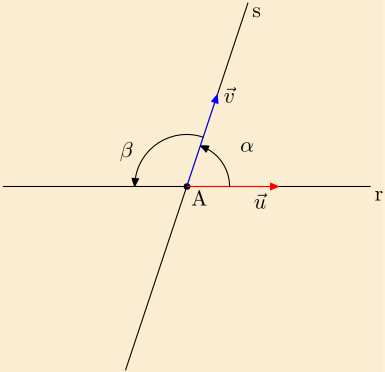


$$H = \frac{P+P'}{2} = \left(\frac{0+x}{2}, \frac{0+y}{2}\right) = (2,1) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = 2 \\ \dfrac{y}{2} = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow P'(4,2)$$

MATEMATICAS 1º Bachillerato
MaTEX
Geometría de la Recta
Doc Doc
Volver Cerrar

1.5. Ángulo de dos rectas

Definición 1.5 *El ángulo determinado por dos rectas r y s es le ángulo α que determinan sus vectores direccionales $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, su suplementario β.*



Ejemplo 1.5. Hallar el ángulo formado por las rectas:

$$r \equiv x + y - 5 = 0 \qquad s \equiv 3\,x - y + 1 = 0$$

Hallamos el ángulo formado por sus vectores direccionales con el producto escalar

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}} = |\overrightarrow{\mathbf{u}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{v}}| \cdot \cos\alpha$$

$$\begin{aligned}(1,-1)\cdot(1,3) =& \sqrt{1^1+1^2}\cdot\sqrt{1^1+3^2}\cdot\cos\alpha\\ -2 =& \sqrt{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\alpha\\ \cos\alpha =& \frac{2}{\sqrt{20}}\end{aligned}$$

Ejercicio 24. Hallar los ángulos del triángulo $A(0,0)$, $B(4,0)$ y $C(1,3)$.

2. Distancias

2.1. Distancia de dos puntos

Definición 2.1

Dados los puntos $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ definimos la distancia de A a B como el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

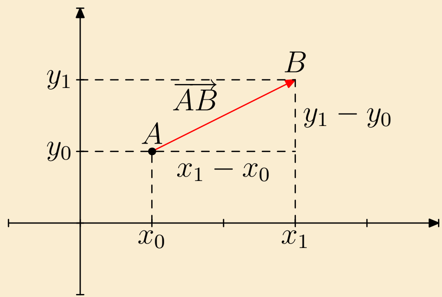
En el gráfico se aprecia que el módulo del vector

$$\overrightarrow{AB}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

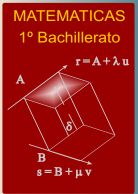
es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos $x_1 - x_0$ e $y_1 - y_0$, luego

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (x_1 - x_0)^2 + (x_1 - x_0)^2$$

tomando la raíz cuadrada se obtiene la fórmula de la distancia de dos puntos



$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (x_1 - x_0)^2} \tag{6}$$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

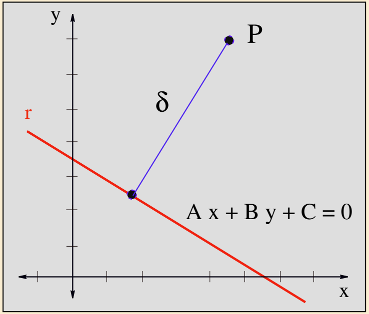
2.2. Distancia de punto a recta

Teorema 2.1. Dada la recta

$$r \equiv A\,x + B\,y + C = 0$$

y el punto $P(x_0, y_0)$ la distancia de $P(x_0, y_0)$ a r viene dada por la expresión

$$d(P; r) = \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



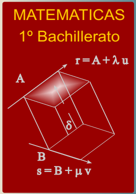
Ejemplo 2.1. Halla la distancia del punto $P(3, 2)$ a la recta de ecuación

$$r \equiv 2\,x + 3\,y + 5 = 0$$

Solución: Se sustituye el punto en la ecuación de la recta y se divide por el módulo del vector direccional

$$d(P, r) = \frac{|2\,x_0 + 3\,y_0 + 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|2(3) + 3\,(2) + 5|}{\sqrt{13}} = \frac{17}{\sqrt{13}}$$

□



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 25. Halla la distancia del punto $P(2,-3)$ a las siguientes rectas:

$a)$ $\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \end{array}$ $\qquad$ $b)$ $2x + 3 = 0$

Ejercicio 26. Dadas las rectas r y s :

$$\begin{array}{c} r \equiv -x + 3y + 4 = 0 \\ s \equiv 2x - 6y - 1 = 0 \end{array}$$

$a)$ Comprobar que son paralelas.

$b)$ Hallar la distancia entre ellas.

Ejercicio 27. Halla la longitud del segmento que determina la recta $r \equiv x - 2y + 5 = 0$ al cortar a los ejes de coordenadas.

Ejercicio 28. Hallar la ecuación de una recta que forma con el eje Ox un ángulo de 45^{o} y que dista 15 unidades del origen de coordenadas.

Ejercicio 29. Calcula un punto que equidista de los puntos $A(7,1)$ y $B(1,3)$. Además, la distancia de dicho punto al eje de ordenadas es el doble que al eje de abscisas.

Ejercicio 30. Determina las rectas que distan 7 unidades del punto $P(3,5)$ y son perpendiculares a la recta $3\,x - 4\,y + 6 = 0$.

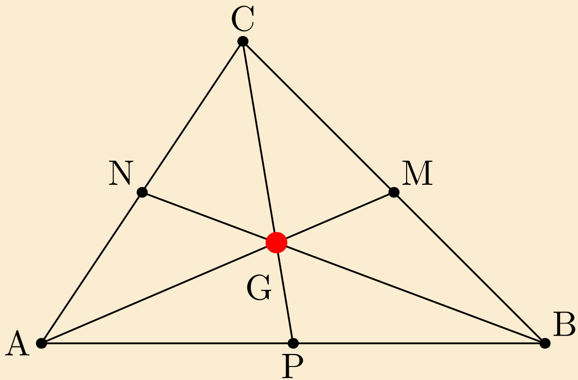
3. Geometría del triángulo

3.1. Medianas. Baricentro

Definición 3.1 *Llamamos mediana en un triángulo a la recta que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto.*

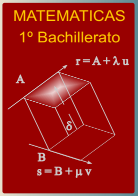
Teorema 3.1. En cualquier triángulo $\triangle ABC$ las tres medianas med_A, med_B y med_C, se cortan en un punto G, que llamamos baricentro.

$$med_A \cap med_B \cap med_C = \{G\}$$



Una propiedad del baricentro G es que se puede calcular con al fórmula

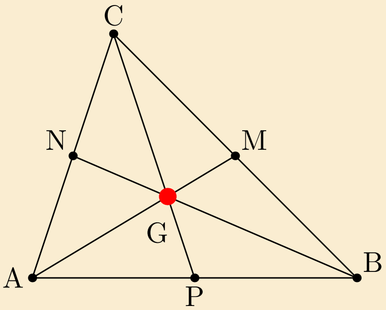
$$G = \frac{1}{3}(A + B + C)$$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 3.1. Hallar el baricentro del triángulo $A(0,0)$, $B(4,0)$ y $C(1,3)$.

Solución:



$$M = \left(\frac{4+1}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$P = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (2,0)$$

- Mediana AM, $\vec{u}(5,3)$

$$AM \equiv \frac{x-0}{5} = \frac{y-0}{3} \Rightarrow 3\,x - 5\,y = 0$$

- Mediana CP, $\vec{v}(1,3)$

$$CP \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow 3\,x + y - 6 = 0$$

G es la intersección de AM con CP, resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{c} 3\,x - 5\,y = 0 \\ 3\,x + y - 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6y - 6 = 0 \Longrightarrow y = 1 \quad x = \frac{5}{3}$$

$$\boxed{G\left(\frac{5}{3}, 1\right)} \equiv \left(\frac{0+4+1}{3}, \frac{0+0+3}{3}\right)$$

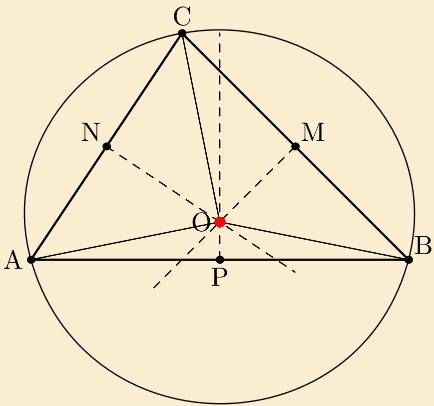
$\square$

3.2. Mediatrices. Circuncentro

Definición 3.2 *Llamamos mediatriz en un triángulo a la recta perpendicular a un lado por su punto medio*

Teorema 3.2. En cualquier triángulo $\triangle ABC$ las tres mediatrices $triz_{AB}$, $triz_{AC}$ y $triz_{BC}$, se cortan en un punto O que llamamos circuncentro.

$$triz_{AB} \cap triz_{AC} \cap triz_{BC} = \{O\}$$



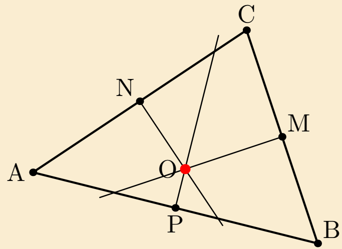
Al estar O en las mediatrices equidista de los tres vértices, luego es el centro de la circunferencia circunscrita que pasa por A, B y C. Por ello a O se le llama circuncentro.

Ejemplo 3.2. Hallar el circuncentro del triángulo $A(0,1)$, $B(4,0)$ y $C(3,3)$.

Solución:

$$M = \left(\frac{4+3}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$P = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(2, \frac{1}{2}\right)$$



- Mediatriz $triz_{BC}$,

$$\vec{u} \perp \overrightarrow{BC}(-1,3) \Longrightarrow \vec{u}(3,1)$$

$$triz_{BC} \equiv \frac{x - \frac{7}{2}}{3} = \frac{y - \frac{3}{2}}{1} \Longrightarrow x - 3\,y + 1 = 0$$

- Mediatriz $triz_{AB}$, $\vec{v} \perp \overrightarrow{AB}(4,-1) \Longrightarrow \vec{v}(1,4)$

$$triz_{AB} \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y - \frac{1}{2}}{4} \Rightarrow 8\,x - 2\,y - 15 = 0$$

G es la intersección de $triz_{CB}$ con $triz_{AB}$, resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x - 3\,y + 1 = 0 \\ 8\,x - 2\,y - 15 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{47}{22} \quad y = \frac{23}{22} \quad \boxed{O\left(\frac{47}{22}, \frac{23}{22}\right)}$$

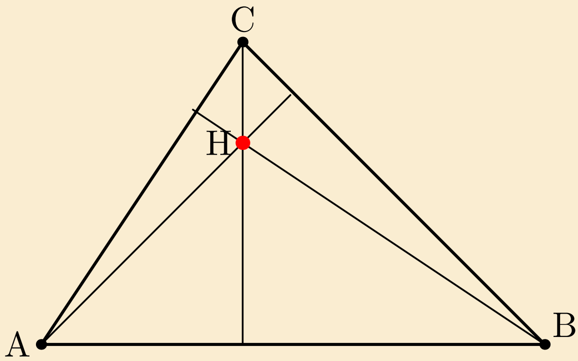
□

3.3. Alturas. Ortocentro

Definición 3.3 *Llamamos altura en un triángulo a la recta perpendicular a un lado por su vértice opuesto.*

Teorema 3.3. En cualquier triángulo $\triangle ABC$ las tres alturas h_A, h_B y h_C, se cortan en un punto H que llamamos ortocentro.

$$h_A \cap h_B \cap h_C = \{H\}$$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 3.3. Hallar el ortocentro del triángulo $A(0,0)$, $B(4,0)$ y $C(1,3)$.

Solución:

- Altura por C es perpendicular a AB

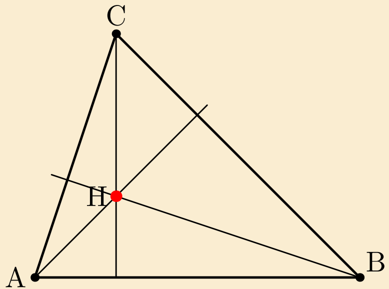
$$\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}(4,0) \Longrightarrow \vec{u}(0,1)$$

$$h_C \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow x = 1$$

- Altura por A es perpendicular a BC

$$\vec{v} \perp \overrightarrow{BC}(-3,3) \Longrightarrow \vec{v}(1,1)$$

$$h_A \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} \Rightarrow y = x$$



H es la intersección de h_A con h_C, resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 1 \quad y = 1$$

$$\boxed{H\,(1,1)}$$

□

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

3.4. Área del triángulo

Definición 3.4 *El* *área* *en la mitad de cualquier base por la altura correspondiente*

$$A = \frac{1}{2} AB \cdot h_C = \frac{1}{2} AC \cdot h_B = \frac{1}{2} CB \cdot h_A$$

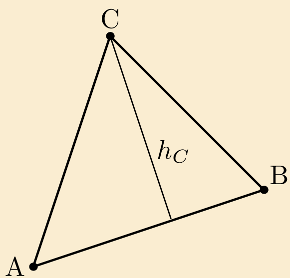
Ejemplo 3.4. Hallar el área del triángulo $A(0,0)$, $B(3,1)$ y $C(1,3)$.

Solución:

Tomamos como base AB

$$b = d(A,B) = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$$

La altura es la distancia de C a la recta AB de vector $\overrightarrow{AB}(3,1)$



$$AB \equiv \frac{x-0}{3} = \frac{y-0}{1} \equiv x - 3\,y = 0$$

$$h_C = d(C, AB) = \frac{|(1) - 3\,(3)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}}$$

$$\text{área } ABC = \frac{1}{2} b\, h_C = \frac{1}{2} \sqrt{10}\, \frac{8}{\sqrt{10}} = 8$$

□

Ejercicio 31. Halla el área del triángulo de vértices:

$$A(-4,3) \quad B(0,5) \quad C(4,-2)$$

Ejercicio 32. Halla el área del cuadrilátero de vértices:

$$A(-4,3) \quad B(0,5) \quad C(4,-2) \quad D(-3,-2)$$

Ejercicio 33. Sea $P(5,2)$ y $r \equiv x + 2\,y + 3 = 0$. Hallar

a) El punto H proyección de P sobre r.

b) El punto P' simétrico de P respecto de r.

Test.

1. En un triángulo pueden coincidir el baricentro, el circuncentro, el incentro y el ortocentro.

(a) Si (b) No

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. La dirección viene dada por $\vec{u} = (2, 3)$. Un punto es $A(1, -1)$. Para hallar otro punto usamos la expresión vectorial

$$r \equiv X = A + \lambda\,\vec{u}$$

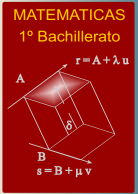
Haciendo $\lambda = 2$ obtenemos

$$X_1 = (1, -1) + 2\,(2, 3) = (5, 5)$$

Haciendo $\lambda = 3$ obtenemos

$$X_2 = (1, -1) + 3\,(2, 3) = (7, 8)$$

y así sucesivamente para obtener más puntos. Ejercicio 1



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 2. La recta

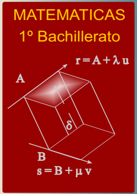
$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2\,\lambda \\ y & = & 3 - \lambda \end{array} \right.$$

pasa por el punto $A(1,3)$. Su vector dirección es $\vec{u} = (2,-1)$.

Su expresión en forma continua es inmediata

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1}$$

Ejercicio 2



Ejercicio 3. De la ecuación cartesiana $2\,x + y = 3$, obtenemos un punto dando un valor, por ejemplo $x = 0$, luego $y = 3$. Un punto es $A(0, 3)$. El vector direccional es $\vec{u}(-B, A) = (-1, 2)$, luego su expresión en forma continua, como tenemos un punto y su vector es:

$$\frac{x-0}{-1} = \frac{y-3}{2}$$

Ejercicio 3

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 4.

a) Si $A(6,-2)$ y $B(0,5)$, $\overrightarrow{AB}(-6,7)$ luego su expresión en paramétricas es

$$\begin{aligned} x &= 6-6\lambda \\ y &= -2+7\,\lambda \end{aligned}$$

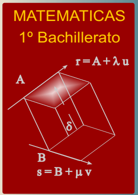
b) Si $C(0,0)$ y $D(5,0)$, $\overrightarrow{CD}(5,0)\sim(1,0)$ luego su expresión en paramétricas es

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= 0 \end{aligned}$$

c) Si $E(3,2)$ y $F(1,2)$, $\overrightarrow{EF}(-2,0)$ luego su expresión en paramétricas es

$$\begin{aligned} x &= 3-2\lambda \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Ejercicio 4



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 5.

a) Sea la recta $2x - y = 0$. Para $x = 0 \Rightarrow y = 0$, obtenemos el punto $A(0,0)$ y su vector es $\vec{u}(1,2)$, luego su expresión en paramétricas es

$$\begin{array}{rcr} x & = & \lambda \\ y & = & 2\,\lambda \end{array}$$

b) Sea la recta $x - 7 = 0$. Como $x = 7$ tomamos cualquier $y = 0$, obtenemos el punto $A(7,0)$ y su vector es $\vec{u}(0,1)$, luego su expresión en paramétricas es

$$\begin{array}{rcl} x & = & 7 \\ y & = & \lambda \end{array}$$

c) Sea la recta $3y - 6 = 0$. Como $y = 2$ tomamos cualquier $x = 0$, obtenemos el punto $A(0,2)$ y su vector es $\vec{u}(-3,0) \sim (-1,0)$, luego su expresión en paramétricas es

$$\begin{array}{rcr} x & = & -\lambda \\ y & = & 2 \end{array}$$

Ejercicio 5

Ejercicio 6. Si pasa por $C(-2,-1)$ se cumplirá

$$r \equiv m\,(-2) + 4\,(-1) + 8 = 0 \Longrightarrow m = 2$$

Teniendo un punto $C(-2,-1)$ y el vector director $\vec{u} = \vec{AB} = (4,2) \sim (2,1)$, las ecuaciones son:

- Ecuación Vectorial.

$$(x,y) = (-2,-1) + \lambda\,(2,1)$$

- Ecuaciones Paramétricas.

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & -2 + 2\,\lambda \\ y & = & -1 + \lambda \end{array}\right\}$$

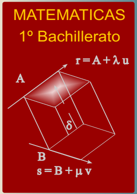
- Ecuación Continua.

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{1}$$

- Ecuación Cartesiana. Operando la igualdad anterior y ordenando:

$$x - 2\,y = 0$$

Ejercicio 6

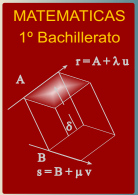


◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 7. Sustituyendo $C(2,k)$ en r

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2 & = & -1+3\,\lambda \\ k & = & 2\,-\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \lambda & =1 \\ k & =1 \end{array}\right.$$

Ejercicio 7



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8.

a) Sea $2x - y = 8$. Necesitamos un punto y su vector.
Sea $y = 0 \Longrightarrow x = 4$ luego un punto es $A(4, 0)$ y su vector es $\vec{u}(1, 2)$, luego su ecuación continua es

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-0}{2}$$

b) Sea $x - 7\,y = 1$. Necesitamos un punto y su vector.
Sea $y = 0 \Longrightarrow x = 1$ luego un punto es $A(1, 0)$ y su vector es $\vec{u}(7, 1)$, luego su ecuación continua es

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-0}{1}$$

c) Sea $\begin{array}{rcr} x & = & 6 - 6\lambda \\ y & = & -2 + 7\,\lambda \end{array}$. Necesitamos un punto y su vector.
Un punto es $A(6, -2)$ y su vector es $\vec{u}(-6, 7)$, luego su ecuación continua es

$$\frac{x-6}{-6} = \frac{y+2}{7}$$

Ejercicio 8

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 9.

a) Sea $3\,x - y = -1$. vector $\vec{\mathbf{u}}(1,3)$ $\qquad m = \dfrac{3}{1} = 3$

b) Sea $2\,x - 3\,y = 10$. vector $\vec{\mathbf{u}}(3,2)$ $\qquad m = \dfrac{2}{3}$

c) Sea $,x + 2\,y + 6 = 0$. vector $\vec{\mathbf{u}}(-2,1)$ $\qquad m = -\dfrac{1}{2}$

d) Sea $-x + 2\,y = 10$. vector $\vec{\mathbf{u}}(-2,-1)$ $\qquad m = \dfrac{1}{2}$

e) Sea $x = 0$, que corresponde al eje Oy

$$\text{vector } \vec{\mathbf{u}}(0,-1) \qquad m = -\frac{1}{0}\ \infty$$

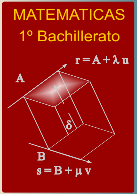
el eje Oy y sus paralelas no tienen pendiente o son de pendiente infinita

f) Sea $y = 0$, que corresponde al eje Ox

$$\text{vector } \vec{\mathbf{u}}(-1,0) \qquad m = 0$$

el eje OX y sus paralelas tienen pendiente nula.

Ejercicio 9



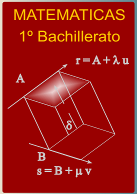
MaTEX
Geometría de la Recta
Doc Doc
Volver Cerrar

Prueba del Teorema 1.1.
Sean las rectas paralelas r y s

$$\left.\begin{array}{rcl} A\,x + B\,y + C & = & 0 \\ A'\,x + B'\,y + C' & = & 0 \end{array}\right\}$$

entonces sus vectores direccionales son proporcionales

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}(-B, A) \sim \overrightarrow{\mathbf{v}}(-B', A') \Longrightarrow \frac{-B}{-B'} = \frac{A}{A'} \Longrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$



Prueba del Teorema 1.2.
Sean las rectas paralelas r y s

$$\left.\begin{array}{rcl} r \equiv A\,x + B\,y + C & = & 0 \\ s \equiv A'\,x + B'\,y + C' & = & 0 \end{array}\right\}$$

entonces sus coeficientes son proporcionales

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \Longrightarrow \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$$

Como $m_r = -\dfrac{A}{B}$ y $m_s = -\dfrac{A'}{B'}$, se obtiene que tienen la misma pendiente

$$m_r = m_s$$

◀

Ejercicio 10. Los vectores direccionales de las rectas r y s:

$$\begin{gathered} r \equiv -x + 3y + 4 = 0 \\ s \equiv 2x - 6y - 1 = 0 \end{gathered}$$

son $\overrightarrow{\mathbf{u}}(-3,-1)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}(6,2)$,

a) Como

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = -2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}}$$

las rectas son paralelas

b) Con sus coeficientes:

$$\frac{-1}{2} = \frac{3}{-6} \Longrightarrow r \parallel s$$

c) Con sus pendientes. Como

$$m_r = \frac{1}{3} = m_s = \frac{2}{6} \Longrightarrow r \parallel s$$

Ejercicio 10

Ejercicio 11. El vector direccional de $r \equiv x - 3y + 4 = 0$, es $\overrightarrow{\mathbf{u}}(3, 1)$, luego una paralela a ella por el punto $P(3, 1)$ con la misma dirección es

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{1}$$

Ejercicio 11

Ejercicio 12.

a)

$$\left.\begin{array}{r} -x+3y+4=0 \\ 3x-9y-12=0 \end{array}\right\} \frac{-1}{3}=\frac{3}{-9}=\frac{4}{-1}$$

Las rectas son coincidentes

b)

$$\left.\begin{array}{r} 5x+y+3=0 \\ x-2y+16=0 \end{array}\right\} \frac{5}{1}\neq\frac{1}{-12}$$

Las rectas no son paralelas y se cortan en un punto.

Ejercicio 12

Ejercicio 13.

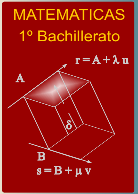
a) Para que $r \parallel s$

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv -k\,x + 3y + 4 = 0 \\ s \equiv 3x - 5\,y - 12 = 0 \end{array}\right\} \frac{-k}{3} = \frac{3}{-5} \Longrightarrow k = \frac{9}{5}$$

b) Para que $r \parallel s$

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv 5x + k\,y + 3 = 0 \\ s \equiv x - 2y + 16 = 0 \end{array}\right\} \frac{5}{1} = \frac{k}{-2} \Longrightarrow k = -10$$

Ejercicio 13



Ejercicio 14.

a) Para que $r \parallel s$, por las pendientes se tiene

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv y = a\,x + 5 \\ s \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow m_r = a \qquad m_s = \frac{2}{3}$$

luego $a = \dfrac{2}{3}$

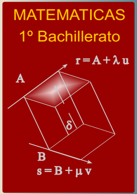
b) Para que $r \parallel s$

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv \dfrac{x-5}{a} = \dfrac{y-3}{5} \\ s \equiv y = 2\,a\,x + 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow m_r = \frac{5}{a} \qquad m_s = 2\,a$$

luego

$$\frac{5}{a} = 2\,a \Longrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Ejercicio 14



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 15. Tenemos los vértices $A(0,-2)$, $B(6,0)$ y $C(3,4)$

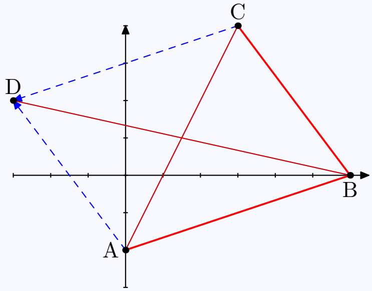
Como es un paralelogramo se tiene que

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

Llamando $D(x_0, y_0)$

$$\overrightarrow{AD}(x_0 - 0, y_0 + 2) = \overrightarrow{BC}(-3, 4)$$

$$x_0 = -3 \quad y_0 = 2 \quad \boxed{D(-3,2)}$$



- Diagonal AC

$$\overrightarrow{AC}(3,6) \Longrightarrow AC \equiv \frac{x-0}{3} = \frac{y+2}{6}$$

- Diagonal BD

$$\overrightarrow{BD}(-9,2) \Longrightarrow BD \equiv \frac{x-6}{-9} = \frac{y-0}{2}$$

Ejercicio 15

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Prueba del Teorema 1.3.

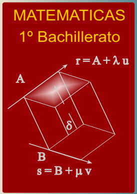
Sean las rectas perpendiculares r y s

$$\left.\begin{array}{rcl} A\,x + B\,y + C & = & 0 \\ A'\,x + B'\,y + C' & = & 0 \end{array}\right\}$$

entonces sus vectores direccionales son perpendiculares

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{u}}(-B, A) \perp \overrightarrow{\mathbf{v}}(-B', A') &\Longrightarrow \overrightarrow{\mathbf{u}}(-B, A) \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}(-B', A') = 0 \\ &\Longrightarrow A \cdot A' + B \cdot B' = 0 \end{aligned}$$

◀



Prueba del Teorema 1.4.
Sean las rectas perpendiculares r y s

$$\left.\begin{array}{rcl} r \equiv A\,x + B\,y + C & = & 0 \\ s \equiv A'\,x + B'\,y + C' & = & 0 \end{array}\right\}$$

entonces los coeficientes de sus ecuaciones verifican

$$A \cdot A' + B \cdot B' = 0 \Longrightarrow \frac{A}{B} \cdot \frac{A'}{B'} = -1$$

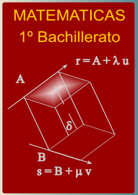
Como $m_r = -\dfrac{A}{B}$ y $m_s = -\dfrac{A'}{B'}$, se obtiene la relación

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Ejercicio 16. El vector direccional de $r \equiv x - 3y + 4 = 0$, es $\overrightarrow{\mathbf{u}}(3,1)$, luego una perpendicular a ella tendrá como vector $\overrightarrow{\mathbf{v}}(-1,3)$ y con el punto $P(3,1)$, su ecuación en continua es

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{3}$$

Ejercicio 16



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 17. Los vectores direccionales de las rectas r y s:

$$r \equiv c\,x + y - 1 = 0 \qquad s \equiv 2\,x - 3\,y = 0$$

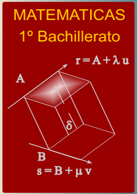
son $\overrightarrow{\mathbf{u}}(-1, c)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}(3, 2)$, para que $r \perp s$

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}(-1, c) \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}(3, 2) = -3 + 2\,c = 0 \Longrightarrow \boxed{c = \frac{3}{2}}$$

Para hallar el punto de intersección de ambas. se resuelve el sistema

$$\left.\begin{array}{r} \frac{3}{2}\,x + y - 1 = 0 \\ 2\,x - 3\,y = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{6}{13} \quad y = \frac{12}{39}$$

Ejercicio 17



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 18. Los vectores direccionales de las rectas r y s:

$$r \equiv x + b\,y - 1 = 0 \qquad s \equiv x = 3\,y$$

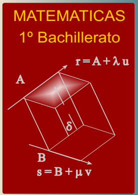
son $\overrightarrow{\mathbf{u}}(-b, 1)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}(3, 1)$, para que $r \perp s$

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}(-b, 1) \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}(3, 1) = -3\,b + 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{b = \frac{1}{3}}$$

Para hallar el punto de intersección de ambas. se resuelve el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x + \dfrac{1}{3}\,y - 1 = 0 \\ x = 3\,y \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{9}{10} \quad y = \frac{3}{10}$$

Ejercicio 18



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

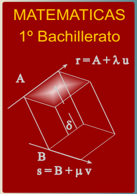
Ejercicio 19. Los vectores direccionales de las rectas r y s:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -m\lambda \\ y & = & 2 + 2\,\lambda \end{array} \right. \qquad s \equiv 4x - y + 2 = 0$$

son $\overrightarrow{\mathbf{u}}(-m, 2)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}(1, 4)$, para que $r \perp s$

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}(-m, 2) \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}(1, 4) = -m + 8 = 0 \Longrightarrow \boxed{m = 8}$$

Ejercicio 19



Ejercicio 20. La recta r pasa por $P(1,2)$, luego

$$a\,(1) - 2\,(2) + 7 = 0 \Longrightarrow \boxed{a = -3}$$

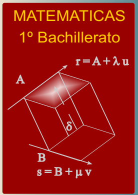
Los vectores direccionales de las rectas r y s:

$$r \equiv a\,x - 2\,y + 7 = 0 \qquad s \equiv \frac{x+1}{b} = \frac{y}{2}$$

son $\overrightarrow{\mathbf{u}}(2,-3)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}(b,2)$, para que $r \perp s$

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}(2,-3) \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}(b,2) = 2\,b - 6 = 0 \Longrightarrow \boxed{b = 3}$$

Ejercicio 20



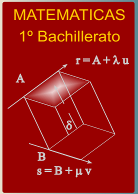
Ejercicio 21. Hallamos el punto de corte de $r \equiv 4x + 3y - 6 = 0$ con el eje de ordenadas.

$$x = 0 \implies y = 2 \quad A(0, 2)$$

Como el vector de r es $\vec{u}(-3, 4)$, el vector de una perpendicular es $\vec{v}(4, 3)$, luego la perpendicular es

$$\frac{x - 0}{4} = \frac{y - 2}{3}$$

Ejercicio 21



Ejercicio 22. Sean

$$r : mx - 2y + 5 = 0 \qquad s : nx + 6y - 8 = 0$$

Como $r : mx - 2y + 5 = 0$ pasa por el punto $P(1, 4)$

$$m\,(1) - 2\,(4) + 5 = 0 \Longrightarrow m = 3$$

Para que sean perpendiculares el producto de sus vectores es cero

$$(2, 3) \cdot (-6, n) = -12 + 3n = 0 \Longrightarrow n = 4$$

Ejercicio 22

Ejercicio 23. Las rectas de ecuaciones:

$$r : 5\,x - y + 4 = 0 \qquad s : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -3 + m\,\lambda \\ y & = & 4 - \lambda \end{array} \right.$$

tienen de vectores direccionales $\vec{u}(1, 5)$ y $\vec{v}(m, -1)$. Luego

a) Para que sean paralelas

$$\frac{1}{m} = \frac{5}{-1} \Longrightarrow \boxed{m = -\frac{1}{5}}$$

b) Para que sean perpendiculares

$$(1, 5) \cdot (m, -1) = m - 5 = 0 \Longrightarrow \boxed{m = 5}$$

c) Para que sean coincidentes, deben ser paralelas y tener un punto en común. Luego $m = -\dfrac{1}{5}$ y comprobamos si $S(-3, 4) \in s$ pertenece a r. Como

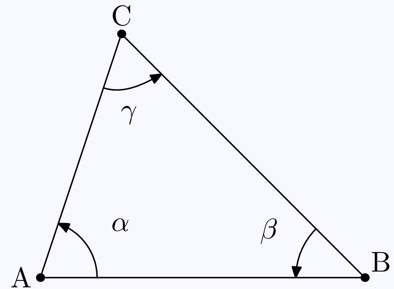
$$5\,(-3) - (4) + 4 = -15 \neq 0 \Longrightarrow S \notin r$$

las rectas son paralelas pero no coincidentes.

Ejercicio 23

Ejercicio 24.

El ángulo α formado por los vectores $\overrightarrow{AB}(4,0)$ y $\overline{AC}(1,3)$



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =&|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\alpha \\
(4,0)\cdot(1,3) =&4\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\alpha \\
4 =&4\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\alpha \\
\cos\alpha =&\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \boxed{\alpha = 71.56^o}
\end{aligned}$$

El ángulo β está formado por los vectores $\overrightarrow{BA}(-4,0)$ y $\overline{BC}(-3,3)$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} =&|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\alpha \\
(-4,0)\cdot(-3,3) =&4\cdot\sqrt{18}\cdot\cos\alpha \\
12 =&4\cdot\sqrt{18}\cdot\cos\alpha \\
\cos\alpha =&\frac{3}{\sqrt{18}} \quad \boxed{\beta = 45^o}
\end{aligned}$$

Como

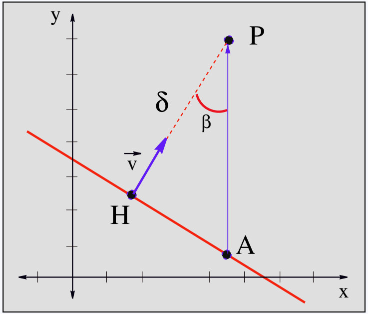
$$\alpha+\beta+\gamma = 180 \Longrightarrow \boxed{\gamma = 63,44^o}$$

Ejercicio 24

Prueba del Teorema 2.1.

Distancia de P a r es la distancia de P al pie H de la perpendicular a r.

$$d(P;r) = d(P;H) = \delta$$



En el triángulo se tiene que

$$\delta = |\overrightarrow{PA}| \cdot \cos\beta$$

Siendo $\vec{v}(A,B) \perp r$ se tiene que

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{PA} = |\vec{v}| \cdot \overbrace{|\overrightarrow{PA}| \cdot \cos\beta}^{\delta} \Longrightarrow \delta = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{PA}}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{v}(A,B) \cdot \overrightarrow{PA}(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = |\vec{v}| \cdot \overbrace{|\overrightarrow{PA}| \cdot \cos\beta}^{\delta} \Longrightarrow \delta = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{PA}}{|\vec{v}|}$$

Ejercicio 25.

a) Ponemos la recta en forma general

$$\left.\begin{array}{r} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \end{array}\right\} \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} \Longrightarrow x + 2y = 0$$

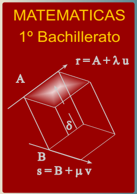
Calculamos la distancia

$$d(P, r) = \frac{|x_0 + 2\,y_0|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|(2) + 2\,(-3)|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

b) Calculamos la distancia

$$d(P, r) = \frac{|2\,x_0 + 3|}{\sqrt{2^2 + 0^2}} = \frac{|2\,(2) + 3|}{2} = \frac{7}{2}$$

Ejercicio 25



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 26.

a) Los vectores direccionales de las rectas r y s:

$$r \equiv -x + 3y + 4 = 0$$
$$s \equiv 2x - 6y - 1 = 0$$

son $\overrightarrow{\mathbf{u}}(-3,-1)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}(6,2)$, Como

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = -2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}}$$

las rectas son paralelas

b) Para hallar la distancia entre ellas $d(r,s)$ basta tomar un punto P cualquiera de r y hallar la distancia $d(P;s)$. Haciendo en r, $y = 0$ se obtiene el punto $P(4,0)$, luego

$$d(P,s) = \frac{|2\,x_0 - 6\,y_0 - 1|}{\sqrt{2^2+6^2}} = \frac{|2\,(4) - 6\,(0) - 1|}{\sqrt{40}} = \frac{7}{\sqrt{40}}$$

Ejercicio 26

Ejercicio 27. Hallamos los puntos de corte de r con los ejes de coordenadas.

$$\left.\begin{array}{llll} x=0 & \Longrightarrow & y=\dfrac{5}{2} & A(0,\dfrac{5}{2}) \\ y=0 & \Longrightarrow & x=-5 & B(-5,0) \end{array}\right\}$$

Calculamos la distancia $d(A,B)$

$$d(A,B)=\sqrt{(-5-0)^2+\left(0-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{125}{4}}$$

Ejercicio 27

Ejercicio 28. Si forma con el eje Ox un ángulo de 45^o, su pendiente es la tangente de 45^o, luego su pendiente es $m = \tan 45 = 1$ y la recta en forma explícita se puede escribir como

$$r \equiv y = x + n \qquad x - y + n = 0$$

Hallamos n con la condición de que dista 15 unidades del origen de coordenadas. De al fórmula de la distancia

$$\begin{aligned} d(O; r) =& \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ 15 =& \frac{|(0) - (0) + n|}{\sqrt{2}} \\ 15 =& \frac{|n|}{\sqrt{2}} \\ |n| =& 15\,\sqrt{2} \\ n =& \pm\, 15\,\sqrt{2} \end{aligned}$$

Luego hay dos soluciones

$$r \equiv y = x + \pm 15\,\sqrt{2}$$

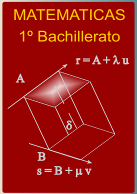
Ejercicio 28

Ejercicio 29. Sea $P(x_0, y_o)$ el punto buscado. Tiene que cumplir que:

- Equidista de los puntos $A(7,1)$ y $B(1,3)$, luego está en la mediatriz de A y B, $triz_{AB}$. Punto medio M de A, B, $M(4,2)$.El vector de la directriz
$$\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}(-6,2) \Longrightarrow \vec{u}(1,3)$$
$$triz_{AB} \equiv \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{3} \Longrightarrow 3\,x_0 - y_0 - 10 = 0$$
- la distancia de dicho punto al eje de ordenadas es el doble que al eje de abscisas, luego $y_0 = 2\,x_0$

Resolvemos el sistema:
$$3\,x_0 - (2\,x_0) - 10 = 0 \Longrightarrow x_0 = 10 \quad y_0 = 20$$

Ejercicio 29



MaTEX

GEOMETRÍA DE LA RECTA

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 30. Como son perpendiculares a la recta $3\,x-4\,y+6=0$ de vector $\vec{u}(4,3)$, la dirección $\vec{v}$ y la pendiente de la recta buscada son

$$\vec{v}\perp\vec{u}(4,3)\Longrightarrow\vec{v}(-3,4)\quad m=-\frac{4}{3}$$

luego la recta es de la forma

$$r\equiv y=-\frac{4}{3}\,x+n \qquad 4\,x+3\,y-3\,n=0$$

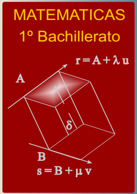
Hallamos n con la condición de que dista 7 unidades del punto $P(3,5)$.

$$\begin{aligned}
d(P;r)=&\frac{|A\,x_0+B\,y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\
15=&\frac{|4\,(3)+3\,(5)-3\,n|}{\sqrt{25}}\\
15=&\frac{|27-3\,n|}{5}\\
|27-3\,n|=&75 \qquad 27-3\,n=\pm 75\\
n=&\pm\,16
\end{aligned}$$

Luego hay dos soluciones

$$r\equiv 4\,x+3\,y\pm 48=0$$

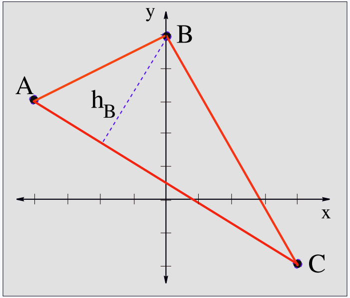
Ejercicio 30



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 31. Vértices: $A(-4,3) \quad B(0,5) \quad C(4,-2)$

Tomamos como base AC



$$\begin{aligned} b = d(A,C) =& \sqrt{(4+4)^2+(-2-3)^2} \\ =& \sqrt{89} \end{aligned}$$

Recta AC de vector $\overrightarrow{AC}(8,-5)$

$$AC \equiv \frac{x+4}{8} = \frac{y-3}{-5} \equiv 5x+8y-4=0$$

$$h_B = d(B,AC) = \frac{|5(0)+8(5)-4|}{\sqrt{5^2+8^2}} = \frac{36}{\sqrt{89}}$$

$$\text{área } ABC = \frac{1}{2} b\, h_B = \frac{1}{2}\sqrt{89}\,\frac{36}{\sqrt{89}} = 36$$

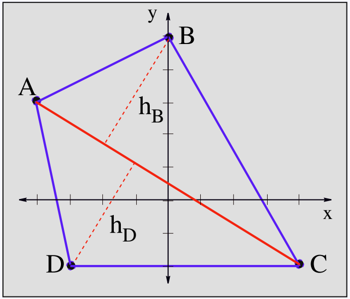
Ejercicio 31

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 32. Vértices: $A(-4,3)$ $\quad B(0,5)$ $\quad C(4,-2)$ $\quad D(-3,-2)$

Con la diagonal AC se forma dos triángulos con base común

$$b = d(A,C) = \sqrt{(4+4)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{89}$$



Recta AC de vector $\overrightarrow{AC}(8,-5)$

$$AC \equiv \frac{x+4}{8} = \frac{y-3}{-5} \equiv 5x + 8y - 4 = 0$$

$$h_B = d(B, AC) = \frac{|5(0) + 8(5) - 4|}{\sqrt{5^2 + 8^2}} = \frac{36}{\sqrt{89}} \quad \text{área } ABC = \frac{1}{2} b\, h_B = 36$$

$$h_D = d(D, AC) = \frac{|5(-3) + 8(-2) - 4|}{\sqrt{5^2 + 8^2}} = \frac{35}{\sqrt{89}} \quad \text{área } ACD = \frac{1}{2} b\, h_D = 35$$

$$\text{área } ABCD = \text{área } ABC + \text{área } ACD = 35 + 36 = 71$$

Ejercicio 32

Ejercicio 33.

a) Siendo $P(5,2)$ y $r \equiv x+2\,y+3=0$, el punto H proyección de P sobre r es la intersección de $r\cap s$, donde s es la perpendicular a r por P:

$$s \equiv \frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{2} \qquad s\equiv 2\,x-\,y-8=0$$

$$\left.\begin{array}{l} r\equiv\; x+2\,y+3=0\\ s\equiv 2\,x-\,y-8=0\end{array}\right\}\Longrightarrow H\left(\frac{13}{5},-\frac{14}{5}\right)$$

b) Sea $P'(x,y)$, como H es el punto medio de P y P'.

$$H=\frac{P+P'}{2}=\left(\frac{5+x}{2},\frac{2+y}{2}\right)=\left(\frac{13}{5},-\frac{14}{5}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{5+x}{2}=\dfrac{13}{5}\\[2mm] \dfrac{2+y}{2}=-\dfrac{14}{5}\end{array}\right.\Longrightarrow \boxed{P'\left(\frac{1}{5},-\frac{38}{5}\right)}$$

Ejercicio 33

Soluciones a los Tests

Solución al Test: La respuesta es afirmativa, en un triángulo equilátero coinciden todos los puntos notables del triángulo. Final del Test

Index