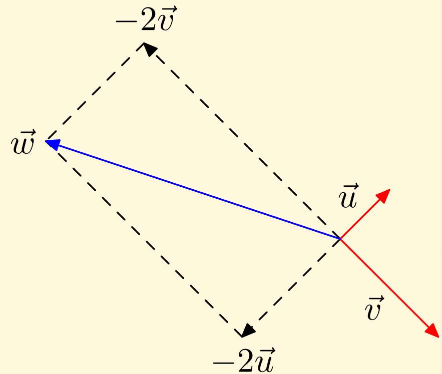
Proyecto MaTEX

Vectores en el plano

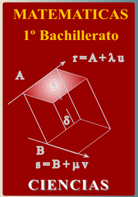
Fco Javier González Ortiz



Directorio

D.L.:SA-1415-2004

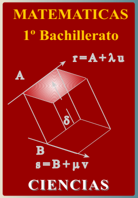
ISBN: 84-688-8267-4



MaTEX

VECTORES

Tabla de Contenido



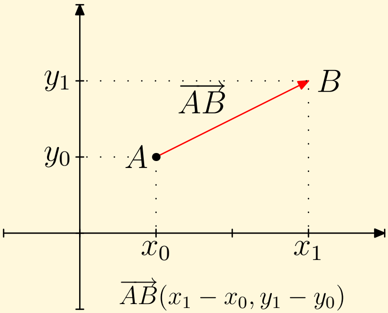
1. Vectores en el plano

1.1. Vector fijo y libre

Definición 1

Llamamos vector fijo $\overrightarrow{AB}$ *al segmento orientado que tiene su origen en el punto* A *y su extremo en el punto* B.

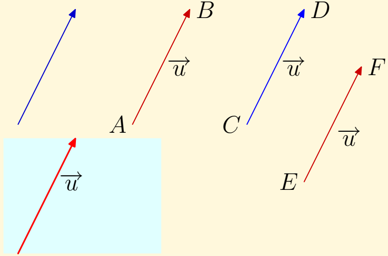
- ***Módulo**: Es la longitud del vector. Lo representamos por* $|\overrightarrow{AB}|$
- ***Dirección**: Es la dirección de la recta que lo contiene. Si dos vectores son paralelos tienen la misma dirección.*
- ***Sentido**: Es el que va del origen al extremo. Lo representamos por la punta de la flecha. Una dirección tiene dos sentidos.*



Definición 2

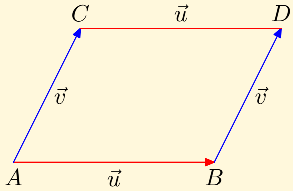
Vectores equipolentes son los vectores que tinen : mismo módulo, dirección y sentido

Todos los vectores del gráfico tienen la misma dirección, sentido y magnitud, son todos ellos equipolentes. También decimos que son representantes del vector libre $\vec{u}$.



Así, los vectores $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ son equipolentes y representantes del mismo vector libre $\vec{u}$.

En el paralelogramo $ABDC$, son equipolentes los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, y representantes de $\vec{u}$.



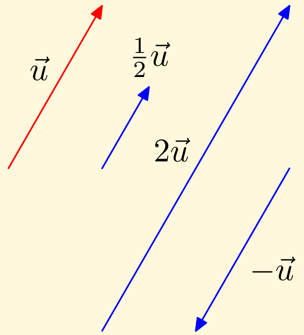
También son equipolentes los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$, y representantes de $\vec{v}$.

1.2. Operaciones con vectores

Definición 3

El producto de un número α por un vector $\vec{\mathbf{u}}$ es otro vector libre representado por $\alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}$

El vector $\alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}$ mantiene la dirección pero puede cambiar el sentido o la magnitud del vector $\vec{\mathbf{u}}$.



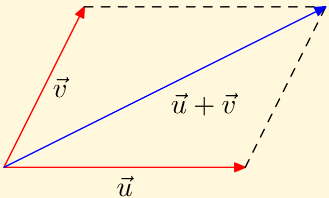
- Si $\alpha > 0$, $\alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}$ tiene el mismo sentido que $\vec{u}$, y si $\alpha < 0$ tienen sentido contrario.
- Si $\alpha > 1$, el vector $\alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}$ se dilata o alarga y si $\alpha < 1$, el vector $\alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}$ se contrae o acorta.
- El caso que $\alpha = 0$, el vector $\alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}$ corresponde al vector nulo $(0, 0)$

En el gráfico se muestran los vectores múltiplos de $\vec{\mathbf{u}}$, la mitad de $\vec{\mathbf{u}}$ con $\alpha = \dfrac{1}{2}$, el doble de $\vec{\mathbf{u}}$ con $\alpha = 2$ y el opuesto de $\vec{\mathbf{u}}$ con $\alpha = -1$.

Definición 4 *La suma de los vectores libres* $\vec{\mathbf{u}}$ *y* $\vec{\mathbf{v}}$ *es otro vector libre*

$$\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$$

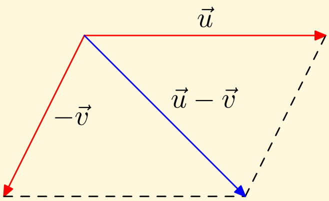
que se obtiene gráficamente, tomando representantes de $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ con el mismo origen, y trazando la diagonal del paralelogramo que determinan. También se llama la resultante.

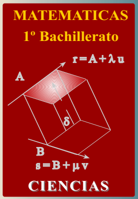


Definición 5 *La resta de los vectores libres* $\vec{u}(u_1, u_2)$ *y* $\vec{v}(v_1, v_2)$ *es otro vector libre definido por*

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

la interpretación gráfica de la resta se muestra en el dibujo. El vector resta $\vec{u}-\vec{v}$ es la diagonal del paralelogramo construido con $\vec{u}$ y $-\vec{v}$.





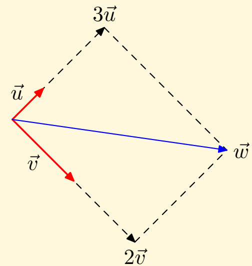
MaTEX

VECTORES

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejemplo 1.1. Dados dos vectores no dependientes $\mathbf{\vec{u}}$ y $\mathbf{\vec{v}}$ hallar $3 \cdot \mathbf{\vec{u}} + 2\,\mathbf{\vec{v}}$

Solución:



□

Ejemplo 1.2. Expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ y $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, los siguientes vectores:

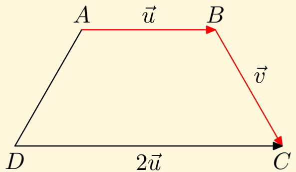
a) $\overrightarrow{BA}$ *b)* $\overrightarrow{AC}$ *c)* $\overrightarrow{DB}$

Solución:

a) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$

b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$

c) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = 2\,\vec{u} - \vec{v}$



□

MATEMATICAS 1º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
VECTORES
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejemplo 1.3.

Considera el hexágono regular de la figura. Expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ y $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, los siguientes vectores:

a) $\overrightarrow{BC}$ *b*) $\overrightarrow{AO}$ *c*) $\overrightarrow{AD}$

d) $\overrightarrow{DO}$ *e*) $\overrightarrow{CD}$ *f*) $\overrightarrow{AE}$

Solución:

a) $\overrightarrow{BC} = -\vec{u} + \vec{v}$

b) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC} = -\vec{u} + \vec{v}$

c) $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AO} = -2\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$

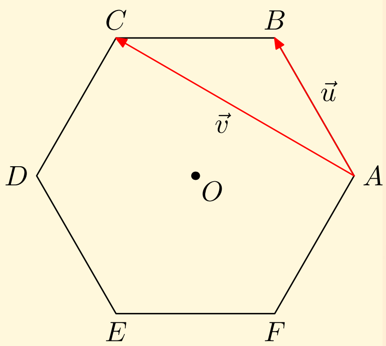
d) $\overrightarrow{DO} = -\,\overrightarrow{BC} = \vec{u} - \vec{v}$

e) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{v} + (-2\,\vec{u} + 2\,\vec{v})$

$\overrightarrow{CD} = -2\,\vec{u} + \vec{v}$

f) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = (-2\,\vec{u} + 2\,\vec{v}) - \vec{u}$

$\overrightarrow{AE} = -3\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$



□

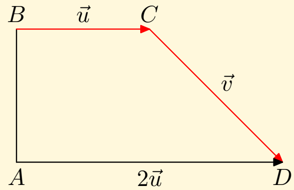
Ejercicio 1. Dados dos vectores no dependientes $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ hallar $-2\cdot\vec{\mathbf{u}} - 2\cdot\vec{\mathbf{v}}$

Ejercicio 2. Expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{BC} = \vec{u}$ y $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$, los siguientes vectores:

a) $\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AB}$

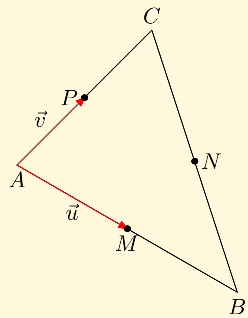


Ejercicio 3. Siendo M, N, P los puntos medios de los lados, expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ y $\overrightarrow{AP} = \vec{v}$, los siguientes vectores:

a) $\overrightarrow{MB}$ *b*) $\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{BC}$ *d*) $\overrightarrow{AN}$

e) $\overrightarrow{PM}$ *f*) $\overrightarrow{MC}$



1.3. Combinación lineal de vectores. Base

En los ejercicios anteriores, básicamente hemos hecho dos cosas con los vectores. Multiplicarlos por un número y sumarlos (restarlos). Esas dos operaciones constituyen lo que se llama una combinación lineal, bien de uno o más vectores.

Definición 6

Decimos que el vector $\vec{\mathbf{v}}$ es combinación lineal del vector $\vec{\mathbf{u}}$ si existe un escalar α con

$$\vec{\mathbf{v}} = \alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}$$

también decimos que $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son dependientes o proporcionales. Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ no son dependientes decimos que son independientes.

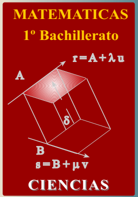
Definición 7

Decimos que el vector $\vec{\mathbf{w}}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ si existen escalares α y β con

$$\vec{\mathbf{w}} = \alpha \cdot \vec{\mathbf{u}} + \beta \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

Definición 8 (Base)

Decimos que los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ forman una base en el plano R^2 si son linealmente independientes. Esto significa que cualquier vector $\vec{\mathbf{w}} \in R^2$ se obtiene por combinación lineal de $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$.



2. Coordenada cartesianas

Tomando en el plano un punto cualquiera O como origen de referencia vamos a introducir coordenadas para trabajar con los vectores.

2.1. Base canónica

De entre todas las bases elegimos la base canónica determinada por los vectores $\vec{\mathbf{i}}(1,0)$ y $\vec{\mathbf{j}}(0,1)$. Así cualquier vector $\vec{\mathbf{u}}(u_1,u_2)$ se pude expresar como

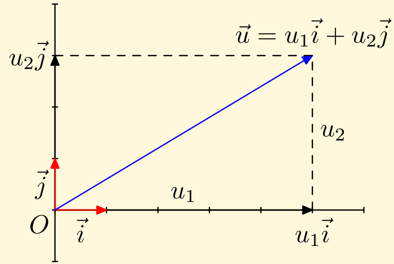
$$(u_1,u_2) = u_1 \cdot (1,0) + u_2 \cdot (0,1)$$

$$\vec{\mathbf{u}} = u_1 \cdot \vec{\mathbf{i}} + u_2 \cdot \vec{\mathbf{j}}$$

Los números u_1 y u_2 por este orden son las componentes del vector.

La magnitud o módulo del vector $\vec{\mathbf{u}}(u_1,u_2)$ por el teorema de Pitágoras corresponde a

$$|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$



Ejemplo 2.1. Expresar los vectores del gráfico en función de la base canónica $\vec{\mathbf{i}}(1,0)$ y $\vec{\mathbf{j}}(0,1)$ y determinar el módulo de de los mismos.

Solución:

- $\vec{\mathbf{v}} = 2\cdot\vec{\mathbf{i}} + 4\cdot\vec{\mathbf{j}}$

  $|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$

- $\vec{\mathbf{w}} = -3\cdot\vec{\mathbf{i}} + 2\cdot\vec{\mathbf{j}}$

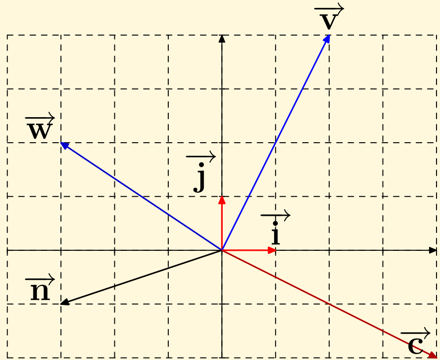
  $|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{13}$

- $\vec{\mathbf{n}} = -3\cdot\vec{\mathbf{i}} - \cdot\vec{\mathbf{j}}$

  $|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$

- $\vec{\mathbf{c}} = 4\cdot\vec{\mathbf{i}} - 2\cdot\vec{\mathbf{j}}$

  $|\vec{\mathbf{c}}| = \sqrt{(4)^2+(-2)^2} = \sqrt{20}$



$\square$

A continuación vamos a repasar los conceptos de **dependencia**, **independencia**, **bases** y **combinación lineal** de vectores utilizando coordenadas.

Ejemplo 2.2. Comprobar que el vector $\vec{\mathbf{w}}(4,8)$ es combinación lineal del vector $\vec{\mathbf{u}}(1,2)$

Solución: Comprobamos si existe un escalar α con

$$(4,8) = \alpha \cdot (1,2)$$

Igualando componentes se tiene

$$\left.\begin{array}{rcl} 4 & = & 1\,\alpha \\ 8 & = & 2\,\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 4}$$

□

Ejemplo 2.3. Dado el vector $\vec{\mathbf{v}}(8,12)$ hallar:

a) $3 \cdot \vec{\mathbf{v}}$ *b*) $-2 \cdot \vec{\mathbf{v}}$ *c*) $\dfrac{1}{4} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ *d*) $-\dfrac{1}{3} \cdot \vec{\mathbf{v}}$

Solución:

a) $3 \cdot \vec{\mathbf{v}} = 3 \cdot (8,12) = (24,36)$

b) $-2 \cdot \vec{\mathbf{v}} = -2 \cdot (8,12) = (-16,-24)$

c) $\dfrac{1}{4} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \dfrac{1}{4} \cdot (8,12) = (2,3)$

d) $-\dfrac{1}{3} \cdot \vec{\mathbf{v}} = -\dfrac{1}{3} \cdot (8,12) = (-\dfrac{8}{3}, -4)$

□

Test.

1. Los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2,2)$ y $\vec{\mathbf{v}}(3,3)$ son..?

(a) Independientes (b) Dependientes

2. Los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2,2)$ y $\vec{\mathbf{v}}(3,4)$ son..?

(a) Independientes (b) Dependientes

Ejemplo 2.4. Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2,1)$ y $\vec{\mathbf{v}}(-1,3)$ hallar:

a) $3\cdot\mathbf{u}+\vec{\mathbf{2}}\,\tilde{\mathbf{v}}$ *b*) $-2\cdot\vec{\mathbf{u}}+3\cdot\vec{\mathbf{v}}$ *c*) $-\vec{\mathbf{u}}+2\cdot\vec{\mathbf{v}}$

Solución:

a) $3\cdot\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}=3\cdot(2,1)+(-1,3)=(5,6)$

b) $-2\cdot\vec{\mathbf{u}}+3\cdot\vec{\mathbf{v}}=-2\cdot(2,1)+3\cdot(-1,3)=(-7,1)$

c) $-\vec{\mathbf{u}}+2\cdot\vec{\mathbf{v}}=-(2,1)+2\cdot(-1,3)=(-4,5)$

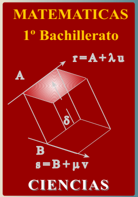
□

Ejemplo 2.5. Comprobar que el vector $\vec{\mathbf{w}}(4,7)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2,1)$ y $\vec{\mathbf{v}}(0,5)$.

Solución: Comprobamos si $(4,7)=\alpha\cdot(4,7)+\beta\cdot(0,5)$
Igualando componentes se tiene

$$\left.\begin{array}{rcl} 4 & = & 2\,\alpha+0\,\beta \\ 7 & = & 1\,\alpha+5\,\beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\alpha=2 \quad \beta=1}$$

□



MaTEX

VECTORES

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Definición 9 (Base)

Decimos que los vectores $\vec{\mathbf{u}}(u_1, u_2)$ y $\vec{\mathbf{v}}(v_1, v_2)$ forman una base en el plano R^2 si son linealmente independientes. Esto significa que cualquier vector $\vec{\mathbf{w}} \in R^2$ se obtiene por combinación lineal de $\vec{\mathbf{u}}(u_1, u_2)$ y $\vec{\mathbf{v}}(v_1, v_2)$.

Ejemplo 2.6. Comprobar que los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2, 1)$ y $\vec{\mathbf{v}}(0, 5)$ forman una base.

Solución: Los dos vectores $\vec{\mathbf{u}}(2, 1)$ y $\vec{\mathbf{v}}(0, 5)$ forman una base, pues son independientes ya que no hay ningún escalar α tal que $\vec{\mathbf{u}}(2, 1) = \alpha \cdot \vec{\mathbf{v}}(0, 5)$. Observa que las componentes no son proporcionales:

$$\frac{0}{2} \neq \frac{5}{1}$$

□

Ejemplo 2.7. ¿Forman una base los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2, 1)$ y $\vec{\mathbf{v}}(4, 2)$?

Solución: No forman una base, pues los vectores son dependientes, ya que:

$$\vec{\mathbf{v}}(4, 2) = 2 \cdot \vec{\mathbf{u}}(2, 1)$$

Otra forma es ver que las componentes son proporcionales:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \text{ son dependientes}$$

□

Test. Responde a las cuestiones:

1. Los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2,2)$ y $\vec{\mathbf{v}}(3,3)$ forman una base en R^2.

(a) Verdadero (b) Falso

2. Los vectores $\vec{\mathbf{u}}(1,0)$ y $\vec{\mathbf{v}}(2,1)$ forman una base en R^2.

(a) Verdadero (b) Falso

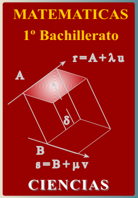
Ejercicio 4. Expresar el vector $\vec{\mathbf{w}}(5,2)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{\mathbf{u}}(1,2)$ y $\vec{\mathbf{w}}(3,-2)$. Efectuar una representación gráfica.

Ejercicio 5. Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}}(1,-2)$ y $\vec{\mathbf{w}}(2,3)$, hallar $\vec{\mathbf{v}}$ con

$$\vec{\mathbf{w}} = 2 \cdot \vec{\mathbf{u}} + 3 \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

Ejercicio 6. Sean los vectores $\vec{\mathbf{u}}(1,1)$ y $\vec{\mathbf{w}}(-1,1)$. Comprobar que forman una base.

Ejercicio 7. Sean los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2,a)$ y $\vec{\mathbf{w}}(1,1)$. Hallar los valores de a para que formen una base.

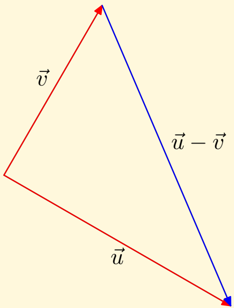


3. Producto escalar de vectores

3.1. Vectores ortogonales

Supongamos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en (figura). Diremos que son **perpendiculares** u **ortogonales** si se satisface el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2$$



Aplicando la ecuación, la condición se transforma en

$$(u_1^2 + u_2^2) + (v_1^2 + v_2^2) = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2$$

Simplificando términos comunes queda

$$(u_1\, v_1 + u_2\, v_2) = 0$$

Así la igualdad es válida si el producto cruzado es cero. Diremos que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales $\vec{u} \perp \vec{v}$ si

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow u_1\, v_1 + u_2\, v_2 = 0} \tag{1}$$

MATEMATICAS 1º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
VECTORES
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

3.2. Producto escalar

Al producto anterior de las componentes de dos vectores le definimos como producto escalar de dos vectores

$$\boxed{\vec{u}(u_1, u_2) \cdot \vec{v}(v_1, v_2) = u_1\, v_1 + u_2\, v_2} \tag{2}$$

Cuando el producto escalar de dos vectores es cero, los vectores son **ortogonales** o **perpendiculares**.
Para hallar un vector perpendicular a $\vec{u}(u_1, u_2)$ basta cambiar el orden y el signo de una de las componentes.

$$\vec{u}(u_1, u_2) \cdot \vec{v}(-u_2, u_1) = -u_1\, u_2 + u_2\, u_1 = 0$$

Así,

$$(1,5) \perp (-5,1) \qquad (2,3) \perp (-3,2) \qquad (8,7) \perp (-7,8)$$

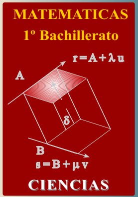
3.3. Módulo de un vector

Observar que si multiplicamos escalarmente un vector $\vec{u}$ por si mismo se obtiene el cuadrado de su módulo o longitud:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 = |\vec{u}|^2 \tag{3}$$

o dicho de otra forma, el módulo de un vector es la raíz positiva de su producto escalar

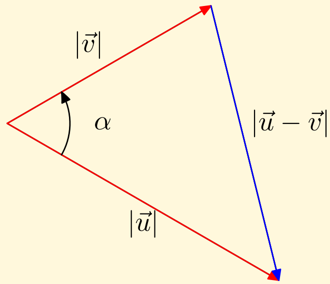
$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \tag{4}$$



3.4. Ángulo de dos vectores

Del teorema del coseno en un triángulo se tiene

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\alpha \qquad (5)$$



donde α es el ángulo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\begin{aligned} |\vec{u}-\vec{v}|^2 &= (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) \\ &= \vec{u}\cdot\vec{u} - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= |\vec{u}|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, igualando las ecuaciones anteriores se tiene

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\,\cos\alpha} \qquad (6)$$

que nos da una segunda definición del producto escalar. Por ello se obtiene que el ángulo θ de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ viene dado por

$$\boxed{\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}} \qquad (7)$$

Ejemplo 3.1. Determinar el ángulo de los vectores de R^2, $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1)$.

Solución: Tenemos:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{(2,1)\cdot(0,1)}{|(2,1)| \cot |(0,1)|} = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{1}}$$

y de esto bastaría hallar

$$\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \text{arcos}\ \frac{1}{\sqrt{6}}$$

□

Ejercicio 8. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3)$ y $\vec{v} = (6, -1)$ hallar:

1. los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
2. El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$
3. El coseno del ángulo que forman.
4. Hallar m para que el vector $\vec{w}(m, 2)$ sea ortogonal a $\vec{u}$

Ejercicio 9. Hallar todos los vectores $\vec{\mathbf{w}}$ perpendiculares a $\vec{\mathbf{u}}(u_1, u_2)$ y con el mismo módulo.

Ejercicio 10. Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}}(-4, 6)$ y $\vec{\mathbf{v}}(5, m)$. Hallar m para que:

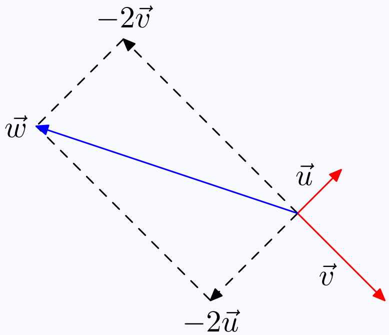
a) Sean dependientes

b) Sean perpendiculares

Soluciones a los Ejercicios

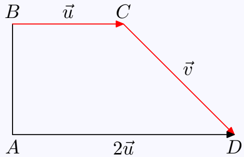
Ejercicio 1.

$$w = -2 \cdot \vec{\mathbf{u}} - 2 \cdot \vec{\mathbf{v}}$$



Ejercicio 1

Ejercicio 2.



$a)$ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{u} + \vec{v}$

$b)$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 2\,\vec{u} - \vec{v}$

$c)$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{u} - \vec{v}$

Ejercicio 2

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 3.

$a)\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} = \vec{u}$

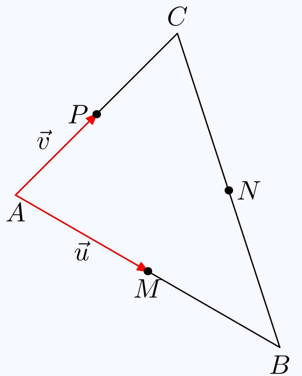
$b)\ \overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AM} = 2\,\vec{u}$

$c)\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -2\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$

$d)\ \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \vec{u} + \vec{v}$

$e)\ \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = \vec{u} - \vec{v}$

$f)\ \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{u} + 2\,\vec{v}$



Ejercicio 3

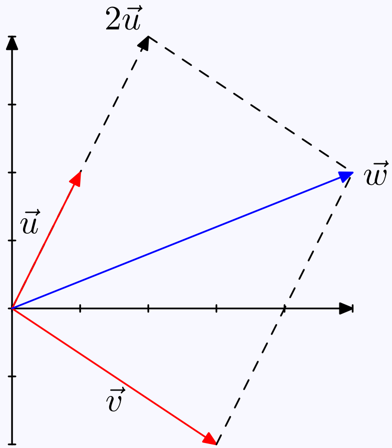
MaTEX
VECTORES
Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 4. Buscamos escalares α y β con

$$\vec{\mathbf{w}} = \alpha \cdot \vec{\mathbf{u}} + \beta \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

Igualando componentes se tiene

$$\left.\begin{array}{rcl} 5 & = & 1\,\alpha + 3\,\beta \\ 2 & = & 2\,\alpha - 2\,\beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 2 \quad \beta = 1}$$



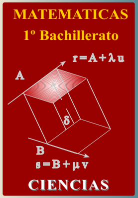
Ejercicio 4

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 5. Igualando componentes se tiene

$$\left.\begin{array}{rcl} 2 & = & 2\,(1) + 3\,v_1 \\ 3 & = & 2\,(-2) + 3\,v_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{v_1 = 0 \quad v_2 = \dfrac{7}{3}}$$

Ejercicio 5



Ejercicio 6. Basta comprobar que los vectores $\vec{\mathbf{u}}(1,1)$ y $\vec{\mathbf{w}}(-1,1)$ son linealmente independientes. Como las componentes no son proporcionales:

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \Longrightarrow \text{son independientes}$$

Ejercicio 6

Ejercicio 7. Basta exigir que los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2, a)$ y $\vec{\mathbf{w}}(1, 1)$ sean linealmente independientes., es decir que las componentes no sean proporcionales. Como

$$\frac{2}{1} = \frac{a}{1} \Longrightarrow a = 2$$

Si $a = 2$ son dependientes y no forman base. Para cualquier valor $a \neq 2$ son independientes y forman una base.

Ejercicio 7

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8.

1. $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$
   $|\vec{v}| = \sqrt{6^2 + (-1)^2} = \sqrt{37}$
2. El producto escalar
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -3)\,(6, -1) = 2\,.\,6 + 3\,.\,1 = 15$$
3. Como $\vec{u}\,.\,\vec{v} = ||\vec{u}||\;||\vec{v}||\;cos\alpha$, tenemos,
$$\cos\,\alpha = \frac{15}{\sqrt{13}\,\sqrt{37}}$$
4. $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ si $\vec{w}\,.\,\vec{u} = 0$, luego,
$$(m, 2)\,.\,(2, -3) = 0 \Rightarrow 2m - 6 = 0 \Rightarrow m = 3$$

Ejercicio 8

Ejercicio 9. Los vectores $\vec{\mathbf{w}}$ perpendiculares a $\vec{\mathbf{u}}(u_1, u_2)$ y con el mismo módulo, son

$$\vec{\mathbf{w}}(-u_2, u_1) \qquad \vec{\mathbf{w}}(u_2, -u_1)$$

Ejercicio 9

Ejercicio 10.

a) los vectores $\vec{\mathbf{u}}(-4,6)$ y $\vec{\mathbf{v}}(5,m)$ son dependientes si

$$\frac{-4}{5} = \frac{6}{m} \Longrightarrow \boxed{m = -\frac{15}{2}}$$

b) los vectores $\vec{\mathbf{u}}(-4,6)$ y $\vec{\mathbf{v}}(5,m)$ son perpendiculares si

$$(-4,6)\cdot(5,m) = 0 \Longrightarrow -20 + 6m = 0 \Longrightarrow \boxed{m = \frac{10}{3}}$$

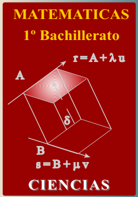
Ejercicio 10

Soluciones a los Tests

Solución al Test: En efecto los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2,2)$ y $\vec{\mathbf{v}}(3,3)$ son linealmente dependientes pues

$$\vec{\mathbf{v}}(3,3) = \frac{3}{2} \cdot \vec{\mathbf{u}}(2,2)$$

Final del Test



Índice alfabético