

# Proyecto MaTeX

## Integrales

Fco Javier González Ortiz

### Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)

© 2004 [javier.gonzalez@unican.es](mailto:javier.gonzalez@unican.es)  
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTeX

INTEGRALES



# Tabla de Contenido

1. Primitiva de una función
  - 1.1. Notación de la integral indefinida
  - 1.2. Propiedades de integración
    - Homogeneidad • Aditividad • Regla de la potencia
2. Integrales Básicas
  - Ejercicios para practicar
3. Métodos de Integración
  - 3.1. Integrales Racionales
    - Denominador de grado 1 • Denominador de grado 2 con raíces
  - 3.2. Cambio de variable
    - Ejercicios de cambios de variable
  - 3.3. Integración por Partes
  - 3.4. Integrales trigonométricas

Soluciones a los Ejercicios

Soluciones a los Tests



MaTeX

INTEGRALES





## 1. Primitiva de una función

**Definición 1.1** Sea  $f$  una función definida en el intervalo  $(a, b)$ . Llamamos *primitiva*, *integral indefinida* o *antiderivada* de  $f$  a una función  $F$  en el intervalo  $(a, b)$  que cumple

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in (a, b) \quad (1)$$

- Hallar primitivas es el proceso inverso de hallar derivadas.
- La expresión **antiderivada** es muy intuitiva pero para el uso habitual del concepto se usa más frecuentemente **primitiva** o **integral indefinida**.

**Ejemplo 1.1.** Comprobar que  $F(x) = x^3$  es una primitiva de  $f(x) = 3x^2$

*Solución:* Comprobamos si  $F'(x) = f(x)$ . En efecto

$$F(x) = x^3 \implies F'(x) = 3x^2 = f(x)$$

□

**Ejemplo 1.2.** Comprobar que  $F(x) = x^3 + 1$  y  $G(x) = x^3 + 5$  son primitivas de  $f(x) = 3x^2$ .

*Solución:* Comprobamos que  $F'(x) = G'(x) = f(x)$ . En efecto

$$\begin{aligned} F(x) = x^3 + 1 &\implies F'(x) = 3x^2 = f(x) \\ G(x) = x^3 + 5 &\implies G'(x) = 3x^2 = f(x) \end{aligned}$$

□

MaTeX

INTEGRALES



**Ejemplo 1.3.** Comprobar que  $F(x) = x^4$ ,  $G(x) = x^4 + 5$  y  $H(x) = x^4 - 3$  son primitivas de  $f(x) = 4x^3$ .

*Solución:* Comprobamos que  $F'(x) = G'(x) = H'(x) = f(x)$ . En efecto

$$\begin{aligned} F(x) = x^4 &\implies F'(x) = 4x^3 = f(x) \\ G(x) = x^4 + 5 &\implies G'(x) = 4x^3 = f(x) \\ H(x) = x^4 - 3 &\implies H'(x) = 4x^3 = f(x) \end{aligned}$$

□

Estos ejemplos nos muestran que una función puede tener más de una primitiva. En realidad tiene infinitas. Nos preguntamos ¿qué relación hay entre ellas?. La respuesta nos la da el siguiente teorema

**Teorema 1.1.** Sean  $F(x)$  y  $G(x)$  dos primitivas de la función  $f(x)$  entonces existe una constante  $C$  con

$$F(x) = G(x) + C \quad (2)$$

*Solución:* Definimos la función  $H(x) = F(x) - G(x)$ . Se tiene que

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

como  $H'(x) = 0$ , la función  $H(x)$  es una constante  $C$ . Luego

$$F(x) - G(x) = C$$

y por tanto

$$F(x) = G(x) + C$$

□



MaTeX

INTEGRALES





## 1.1. Notación de la integral indefinida

La notación utilizada para referirnos a la primitiva o integral indefinida de una función  $f$  se debe a Leibniz. Siendo  $f$  una función de  $x$ , escribimos la primitiva de  $f$  como

$$\int f(x)dx$$

y representa la función cuya derivada es  $f(x)$ . Fijarse en los detalles

- $f(x)$  es el *integrando*
- el símbolo  $dx$  es la *diferencial* de  $x$ , y
- $x$  es la variable de *integración*.

Puesto que una primitiva  $F$  de  $f$  en la variable  $x$  se va a expresar  $F(x) = \int f(x)dx$ , se tiene

$$F'(x) = f(x) \implies \frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$$

**Test.** La derivada de la función  $F(x) = \int (1 + x^2)dx$  es

(a)  $1 + x^2$

(b) 0

MaTeX

INTEGRALES





## 1.2. Propiedades de integración

### • Homogeneidad

**Teorema 1.2.** (Homogeneidad) Para una función  $f(x)$  y una constante  $c \in \mathbb{R}$  se tiene,

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx \quad (3)$$

*Solución:* Derivando la ecuación (3). Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int cf(x)dx &= cf(x) \\ \frac{d}{dx} c \int f(x)dx &= c \frac{d}{dx} \int f(x)dx = cf(x) \end{aligned}$$

□

### • Aditividad

**Teorema 1.3.** (Aditividad) Para las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  se tiene,

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \quad (4)$$

*Solución:* Es inmediata de la derivada de la suma de dos funciones, que es la suma de las derivadas. □

MaTEX

INTEGRALES





## • Regla de la potencia

**Teorema 1.4.** (Regla de la potencia) Sea  $a \in \mathbb{R}$  cualquier número real distinto de  $-1$ ,

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad a \neq -1 \quad (5)$$

*Solución:* Es inmediata, pues,

$$\frac{d}{dx} \frac{x^{a+1}}{a+1} = x^a$$

□

**Ejercicio 1.** Calcular las integrales.

a)  $\int x^2 dx$

b)  $\int 7x^4 dx$

c)  $\int x^{-2} dx$

**Ejercicio 2.** Calcular las integrales.

a)  $\int x^{-5/2} dx$

b)  $\int 6 \sqrt[4]{x^5} dx$

c)  $\int (3x^{-5} + 8x^{10}) dx$

**Ejercicio 3.** Calcular las integrales.

a)  $\int \frac{1-x^3}{x^2} dx$

b)  $\int \frac{2+x^2}{\sqrt{x}} dx$

c)  $\int \frac{x-x^{3/2}}{\sqrt[5]{x}} dx$

# MaTeX

# INTEGRALES





## 2. Integrales Básicas

A partir de las derivadas de las funciones elementales es fácil determinar las primitivas inmediatas de la siguiente tabla:

Integrales Básicas			
$\int \sin x \, dx$	$-\cos x + C$	$\int \cos x \, dx$	$\sin x + C$
$\int (1 + \tan^2 x) \, dx$	$\tan x + C$	$\int \sec^2 x \, dx$	$\tan x + C$
$\int e^x \, dx$	$e^x + C$	$\int a^x \, dx$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
$\int \frac{1}{x} \, dx$	$\ln x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx$	$\arctan x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$	$\arcsen x + C$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$	$\arccos x + C$

Es relativamente fácil aprenderse las primitivas básicas si se sabe derivar con cierta fluidez.

MaTEX

INTEGRALES





• Ejercicios para practicar

**Ejercicio 4.** Calcular las integrales.

$$a) \int (\sin x + e^x) dx$$

$$b) \int (e^{3x} + 2^x) dx$$

$$c) \int \left( \frac{3}{x} + \frac{3}{x+1} \right) dx$$

$$d) \int \left( \cos 2x + \frac{3}{2x+5} \right) dx$$

**Ejercicio 5.** Calcular las integrales.

$$a) \int \left( \frac{1}{x+5} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$$

$$b) \int \left( \frac{1}{2x+5} + \sin 2x \right) dx$$

$$c) \int (e^{2x+5} + 5^{3x-1}) dx$$

$$d) \int \left( \frac{2}{1-x} + 3 \cos(2x) \right) dx$$

**Ejercicio 6.** Calcular las integrales.

$$a) \int \left( \frac{3}{1+x^2} - \sec^2(3x) \right) dx$$

$$b) \int (e^{2x+1} - 5 \sin(3x)) dx$$

$$c) \int (2^{5x+1} - 3 \cos(8x)) dx$$

MaTEX

INTEGRALES



## 3. Métodos de Integración

### 3.1. Integrales Racionales

Denominamos integral racional a las integrales de las funciones racionales del tipo

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$$

donde el numerador  $N(x)$  y el denominador  $D(x)$  son polinomios.

Para el nivel de este curso solo consideramos los casos en que el denominador sea un polinomio de grado 1 o bien un polinomio de grado 2. Los casos inmediatos son:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

todos los demás casos se reducen en la práctica a estos, es decir la primitiva será con pequeñas variantes una suma de logaritmos y arcotangente.



MaTeX

INTEGRALES



### • Denominador de grado 1

Si el numerador  $N(x)$  es un número todas la primitivas corresponden a un logaritmo. En efecto:

$$\int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C$$

$$\int \frac{7}{3x+5} dx = \frac{7}{3} \int \frac{3}{3x+5} dx = \frac{7}{3} \ln(3x+5) + C$$

El caso general es sencillo

$$\int \frac{c}{ax+b} dx = \frac{c}{a} \ln(ax+b) + C$$

Si el numerador es de grado igual o mayor que el denominador, se divide:

**Ejemplo 3.1.** Hallar  $\int \frac{x^2}{x+1} dx$

*Solución:* Como  $\text{Gra}(x^2) \geq \text{Gra}(x+1)$  se divide:

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x+1} dx &= \int (x-1) dx + \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 - x + \ln(x+1) + C \end{aligned}$$

□



# MaTeX

# INTEGRALES





### • Denominador de grado 2 con raíces

En este caso se utiliza la **descomposición en fracciones simples**.

**Ejemplo 3.2.** Hallar  $\int \frac{2}{x^2 - 1} dx$

*Solución:*

Se descompone en factores el denominador,

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

y el integrando en fracciones simples, es decir

$$\boxed{\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}} \implies \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{x^2 - 1}$$

Se quitan denominadores y se tiene que cumplir la identidad

$$2 = A(x + 1) + B(x - 1)$$

Se dan valores a  $x$ . Las raíces de los factores facilitan el cálculo

- Para  $x = 1 \implies 2 = 2A \implies A = 1$
- Para  $x = -1 \implies 2 = -2B \implies B = -1$

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^2 - 1} dx &= \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{-1}{x + 1} dx \\ &= \ln(x - 1) - \ln(x + 1) + C \end{aligned}$$

□

# MaTeX

## INTEGRALES



**Ejemplo 3.3.** Hallar  $\int \frac{8x}{x^2 - 4} dx$

*Solución:*

Se descompone en factores el denominador,

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

y el integrando en fracciones simples, es decir

$$\boxed{\frac{8x}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}} \implies \frac{8x}{x^2 - 4} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{x^2 - 4}$$

Se quitan denominadores y se tiene que cumplir la identidad

$$8x = A(x + 2) + B(x - 2)$$

Se dan valores a  $x$ . Las raíces de los factores facilitan el cálculo

- Para  $x = 2 \implies 16 = 4A \implies A = 4$
- Para  $x = -2 \implies -16 = -4B \implies B = 4$

$$\begin{aligned} \int \frac{8x}{x^2 - 4} dx &= \int \frac{4}{x - 2} dx + \int \frac{4}{x + 2} dx \\ &= 4 \ln(x - 2) + 4 \ln(x + 2) + C \end{aligned}$$

□



MaTEX

INTEGRALES





**Ejercicio 7.** Calcular las integrales.

$$a) \int \frac{x^2 + 1}{x + 2} dx$$

$$b) \int \frac{x^3 + x + 2}{x + 3} dx$$

$$c) \int \frac{x^2 + 5x + 1}{x + 1} dx$$

**Ejercicio 8.** Calcular las integrales.

$$a) \int \frac{3}{1 + x^2} dx$$

$$b) \int \frac{2x + 1}{1 + x^2} dx$$

$$c) \int \frac{3x - 5}{1 + x^2} dx$$

$$d) \int \frac{x - 7}{1 + x^2} dx$$

**Ejercicio 9.** Hallar  $\int \frac{8x - 21}{x^2 - 5x + 6} dx$

**Ejercicio 10.** Hallar  $\int \frac{3x - 1}{x^2 - x} dx$

MaTeX

INTEGRALES





### 3.2. Cambio de variable

Consiste en sustituir una parte del integrando por otra variable para lograr que la nueva integral sea más sencilla.

Consideremos la integral

$$\int (2x + 3)^3 dx$$

Efectuamos el cambio de variable  $t = 2x + 3$

y derivamos  $1 dt = 2 dx$

La técnica consiste en sustituir la variable  $x$  por la variable  $t$  y la  $dx$  por la  $dt$ . Ya que

$$dt = 2 dx \implies dx = \frac{1}{2} dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned} \int (2x + 3)^3 dx &= \int t^3 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^3 dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4} t^4 = \frac{1}{8} t^4 + C \\ &= \frac{1}{8} (2x + 3)^4 + C \end{aligned}$$

MaTeX

INTEGRALES





**Ejemplo 3.4.** Calcular por cambio de variable

$$\int \sqrt{3x - 1} dx$$

*Solución:*

Con una raíz cuadrada es frecuente igualar el radicando a  $t^2$ . Así pues,

$$3x - 1 = t^2$$

$$3 dx = 2t dt \implies dx = \frac{2}{3} t dt$$

La técnica consiste en sustituir la variable  $x$  en función de la variable  $t$  y la  $dx$  por la  $dt$ .

$$\begin{aligned} \int \sqrt{3x - 1} dx &= \int \sqrt{t^2} \frac{2}{3} t dt \\ &= \frac{2}{3} \int t^2 dt \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{3} t^3 = \frac{2}{9} t^3 + C \\ &= \frac{2}{9} (\sqrt{3x - 1})^3 + C \end{aligned}$$

□

MaTeX

INTEGRALES



**Ejemplo 3.5.** Calcular por cambio de variable  $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

*Solución:* Efectuamos el cambio de variable  $e^x = t$

Ya que

$$e^x dx = dt \implies dx = \frac{1}{t} dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx &= \int \frac{1}{t + t^{-1}} \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= \arctan t + C = \arctan e^x + C \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 3.6.** Calcular por cambio de variable  $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

*Solución:* Efectuamos el cambio de variable  $e^x = t$

$$e^x dx = dt \implies dx = \frac{1}{t} dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx &= \int \frac{t}{1 + t^2} \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{1 + t^2} dt \\ &= \arctan t + C = \arctan e^x + C \end{aligned}$$

□



MaTeX

INTEGRALES





- Ejercicios de cambios de variable

**Ejercicio 11.** Calcular por cambio de variable  $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$

**Ejercicio 12.** Calcular  $\int x \sqrt{x+2} dx$

**Ejercicio 13.** Calcular  $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$

**Ejercicio 14.** Calcular  $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}} dx$

**Ejercicio 15.** Calcular  $\int \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln x}} dx$

**Ejercicio 16.** Calcular  $\int \frac{e^{3x} - e^x}{1 + e^{2x}} dx$

**Ejercicio 17.** Calcular  $\int e^x \sqrt{1 - e^x} dx$

**Ejercicio 18.** Calcular  $\int \frac{\text{sen}(\ln x)}{x} dx$

MaTeX

INTEGRALES



### 3.3. Integración por Partes

Sean dos funciones en  $x$ ,  $u(x)$  y  $v(x)$  si designamos

$$du = \frac{1}{dx}u(x) \quad dv = \frac{1}{dx}v(x)$$

Por la derivada de un producto se tiene

$$\frac{d}{dx}(uv) = v du + u dv$$

ahora, integrando la expresión anterior

$$\int \frac{d}{dx}(uv) = \int v du + \int u dv$$

como  $\int \frac{d}{dx}(uv) = uv$  y despejando uno de los sumandos de la expresión anterior se obtiene

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (6)$$



MaTeX

INTEGRALES





**Ejemplo 3.7.** Calcular por partes

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx$$

*Solución:*

$u = x$	$dv = \operatorname{sen} x \, dx$
$du = dx$	$v = -\cos x$

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen} x \, dx &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 3.8.** Calcular por partes

$$\int \ln x \, dx$$

*Solución:*

$u = \ln x$	$dv = dx$
$du = \frac{1}{x} dx$	$v = x$

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \ln x + C \end{aligned}$$

□

MaTeX

INTEGRALES





**Ejemplo 3.9.** Calcular por partes

$$\int x e^x dx$$

*Solución:*

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 3.10.** Calcular por partes

$$\int 4x^3 \ln x dx$$

*Solución:*

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = 4x^3 dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = x^4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int 4x^3 \ln x dx &= x^4 \ln x - \int x^4 \frac{1}{x} dx \\ &= x^4 \ln x - \frac{1}{4} x^4 + C \end{aligned}$$

□

MaTeX

INTEGRALES





**Ejemplo 3.11.** Calcular por partes

$$\int x^2 e^x dx$$

*Solución:*

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = e^x dx \\ du = 2x dx & v = e^x \end{array}$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \underbrace{\int x e^x dx}_{I_1}$$

Ahora calculamos de nuevo por partes la integral,  $I_1$

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x \end{aligned}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C$$

□

MaTeX

INTEGRALES



### 3.4. Integrales trigonométricas

Son aquellas cuyo integrando es una expresión trigonométrica. Aquí solo consideramos el caso más sencillo, que es cuando se tiene un producto de potencias de senos y cosenos, es decir las del tipo

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$$

a) Si  $m$  es impar,  $m = 2k + 1$  se desglosa como

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x dx &= \int \operatorname{sen}^{2k} x \operatorname{sen} x \cos^n x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \operatorname{sen} x \cos^n x dx \end{aligned}$$

b) Si  $n$  es impar,  $n = 2k + 1$  se desglosa como

$$\begin{aligned} \int \cos^{2k+1} x \operatorname{sen}^m x dx &= \int \cos^{2k} x \cos x \operatorname{sen}^m x dx \\ &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \operatorname{sen}^m x dx \end{aligned}$$

c) Si  $m$  y  $n$  son pares se utilizan las expresiones del ángulo doble

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$



MaTeX

INTEGRALES





**Ejemplo 3.12.** Calcular  $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$ .

*Solución:* Como la derivada del  $\operatorname{sen} x$  es  $\cos x$  la integral es inmediata

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 x + C$$

□

**Ejemplo 3.13.** Calcular  $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$ .

*Solución:* Como la derivada del  $\cos x$  es  $-\operatorname{sen} x$  la integral es inmediata

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C$$

□

**Ejemplo 3.14.** Calcular  $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$ .

*Solución:* Como el exponente es impar se separa de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^3 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C \end{aligned}$$

□

MaTeX

INTEGRALES





**Ejemplo 3.15.** Calcular  $\int \cos^3 x \, dx$ .

*Solución:* Como el exponente es impar se separa de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \, dx &= \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \\ &= \int \cos x \, dx - \int \sin^2 x \cos x \, dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 3.16.** Calcular  $\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx$ .

*Solución:* Como el exponente es impar se separa de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \sin^2 x \, dx &= \int \cos^2 x \cos x \sin^2 x \, dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x) \cos x \sin^2 x \, dx \\ &= \int \cos x \sin^2 x \, dx - \int \sin^4 x \cos x \, dx \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C \end{aligned}$$

□

MaTeX

INTEGRALES





**Ejemplo 3.17.** Calcular  $\int \cos^2 x \, dx$ .

*Solución:* Como el exponente es par se utiliza el ángulo doble

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 3.18.** Calcular  $\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx$ .

*Solución:* Como los exponentes son pares se utiliza el ángulo doble

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) \, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + C \end{aligned}$$

□

MaTeX

INTEGRALES



**Ejercicio 19.** Calcular  $\int \cos^4 x \, dx$ .

**Ejercicio 20.** Calcular  $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ .

**Ejercicio 21.** Calcular  $\int \ln(x^2 + 1) \, dx$

**Ejercicio 22.** Calcular  $\int \arcsen x \, dx$

**Ejercicio 23.** Dada la función  $f(x) = e^x \sen(bx)$  donde  $b \neq 0$  es una constante, calcular  $\int f(x) \, dx$ .

**Ejercicio 24.** Calcular  $\int \cos(\ln x) \, dx$ .

**Ejercicio 25.** Calcular la integral  $C_n = \int x^2 \cos(nx) \, dx$  donde  $n$  es un número natural.

**Ejercicio 26.** Calcular  $\int |1 - x| \, dx$

**Ejercicio 27.** Calcular  $\int (3 - |x|) \, dx$



MaTeX

INTEGRALES



## Soluciones a los Ejercicios

## Ejercicio 1.

$$a) \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

b)

$$\begin{aligned} \int 7x^4 dx &= 7 \int x^4 dx && \text{(prop. homog.)} \\ &= \frac{7}{5}x^5 + C && \text{(regla pot.)} \end{aligned}$$

$$c) \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C$$

Ejercicio 1



MaTeX

INTEGRALES



**Ejercicio 2.**

$$a) \int x^{-5/2} dx = -\frac{2}{3}x^{-3/2} + C$$

$$b) \int 6 \sqrt[4]{x^5} dx = 24x^{1/4} + C$$

c)

$$\int (3x^{-5} + 8x^{10}) dx = \int 3x^{-5} dx + \int 8x^{10} dx \quad \triangleleft (\text{prop. aditi.})$$

$$= 3 \int x^{-5} dx + 8 \int x^{10} dx \quad \triangleleft (\text{prop. homog.})$$

$$= -\frac{3}{4}x^{-4} + \frac{8}{11}x^{11} \quad \triangleleft (\text{regla pot.})$$

Ejercicio 2

MaTeX

INTEGRALES



**Ejercicio 3.**

a)

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x^3}{x^2} dx &= \int x^{-2} dx - \int x dx && \triangleleft (\text{dividiendo}) \\ &= -x^{-1} - \frac{1}{2}x^2 + C && \triangleleft (\text{regla pot.}) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int \frac{2+x^2}{\sqrt{x}} dx &= \int 2x^{-1/2} dx + \int x^{3/2} dx && \triangleleft (\text{dividiendo}) \\ &= 4x^{1/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + C && \triangleleft (\text{regla pot.}) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \int \frac{x-x^{3/2}}{\sqrt[5]{x}} dx &= \int x^{4/5} dx - \int x^{13/10} dx && \triangleleft (\text{dividiendo}) \\ &= \frac{5}{9}x^{9/5} - \frac{10}{23}x^{23/10} + C && \triangleleft (\text{regla pot.}) \end{aligned}$$

Ejercicio 3

MaTEX

INTEGRALES



**Ejercicio 4.**

a)

$$\begin{aligned} \int (\operatorname{sen} x + e^x) dx &= \int \operatorname{sen} x dx + \int e^x dx \\ &= -\cos x + e^x + C \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int (e^{3x} + 2^x) dx &= \int e^{3x} dx + \int 2^x dx \\ &= \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{\ln 2} 2^x + C \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{3}{x} + \frac{3}{x+1} \right) dx &= 3 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int \frac{3}{x+1} dx \\ &= 3 \ln x + 3 \ln(x+1) + C \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \int \left( \cos 2x + \frac{3}{2x+5} \right) dx &= \int \cos 2x dx + 3 \int \frac{3}{2x+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{3}{2} \ln(2x+5) + C \end{aligned}$$

Ejercicio 4

MaTeX

INTEGRALES



**Ejercicio 5.**

a)

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{1}{x+5} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx &= \int \frac{1}{x+5} dx + \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ &= \ln(x+5) + \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{1}{2x+5} + \operatorname{sen} 2x \right) dx &= \int \frac{1}{2x+5} dx + \int \operatorname{sen} 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(2x+5) - \frac{1}{2} \cos 2x + C \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \int (e^{2x+5} + 5^{3x-1}) dx &= \int e^{2x+5} dx + \int 5^{3x-1} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x+5} - \frac{1}{3 \ln 5} 5^{3x-1} + C \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{2}{1-x} + 3 \cos(2x) \right) dx &= \int \frac{2}{1-x} dx + 3 \int \cos(2x) dx \\ &= -2 \ln(1-x) + \frac{3}{2} \operatorname{sen}(2x) + C \end{aligned}$$

Ejercicio 5

MaTEX

INTEGRALES



**Ejercicio 6.**

a)

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{3}{1+x^2} - \sec^2(3x) \right) dx &= 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \sec^2(3x) dx \\ &= 3 \arctan x - \frac{1}{3} \tan(3x) + C \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int (e^{2x+1} - 5 \operatorname{sen}(3x)) dx &= \int e^{2x+1} dx - 5 \int \operatorname{sen}(3x) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x+1} + \frac{5}{3} \cos(3x) + C \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \int (2^{5x+1} - 3 \cos(8x)) dx &= \int 2^{5x+1} dx - 3 \int \cos(8x) dx \\ &= \frac{1}{5 \ln 2} 2^{5x+1} - \frac{3}{8} \operatorname{sen}(8x) + C \end{aligned}$$

Ejercicio 6

MaTeX

INTEGRALES





## Ejercicio 7.

a) Como el grado del numerador es  $\geq$  que el denominador se divide:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{x + 2} dx &= \int (x - 2) dx + \int \frac{5}{x + 2} dx \\ &= 1/2 x^2 - 2x + 5 \ln(x + 2) + C \end{aligned}$$

b) Como el grado del numerador es  $\geq$  que el denominador se divide:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x + 2}{x + 3} dx &= \int (x^2 - 3x + 10) dx - \int \frac{28}{x + 3} dx \\ &= 1/3 x^3 - 3/2 x^2 + 10x - 28 \ln(x + 3) + C \end{aligned}$$

c) Como el grado del numerador es  $\geq$  que el denominador se divide:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 5x + 1}{x + 1} dx &= \int (x + 4) dx - \int \frac{3}{x + 1} dx \\ &= 1/2 x^2 + 4x - 3 \ln(x + 1) + C \end{aligned}$$

Ejercicio 7

MaTeX

INTEGRALES



**Ejercicio 8.**

a) Es del tipo arcotangente:

$$\int \frac{3}{1+x^2} dx = 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx = 3 \arctan x + C$$

b) Se separa en dos sumandos:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{1+x^2} dx &= \int \frac{2x}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \ln(1+x^2) + \arctan x + C \end{aligned}$$

c) Se separa en dos sumandos:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-5}{1+x^2} dx &= \int \frac{3x}{1+x^2} dx - 5 \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= 3/2 \ln(1+x^2) - 5 \arctan x + C \end{aligned}$$

d) Se separa en dos sumandos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-7}{1+x^2} dx &= \int \frac{x}{1+x^2} dx - 7 \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= 1/2 \ln(1+x^2) - 7 \arctan x + C \end{aligned}$$

Ejercicio 8

MaTeX

INTEGRALES





## Ejercicio 9.

Como

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

se descompone en fracciones simples:

$$\frac{8x - 21}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} \implies \frac{8x - 21}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A(x - 3) + B(x - 2)}{x^2 - 5x + 6}$$

Se tiene que cumplir la identidad  $8x - 21 = A(x - 3) + B(x - 2)$

■ Para  $x = 2 \implies -5 = -A \implies A = 5$

■ Para  $x = 3 \implies 3 = B \implies B = 3$

$$\begin{aligned} \int \frac{8x - 21}{x^2 - 5x + 6} dx &= 5 \int \frac{1}{x - 2} dx + 3 \int \frac{1}{x - 3} dx \\ &= 5 \ln(x - 2) + 3 \ln(x - 3) + C \end{aligned}$$

Ejercicio 9

MaTeX

INTEGRALES



**Ejercicio 10.**

Como

$$x^2 - x = x(x - 1)$$

se descompone en fracciones simples:

$$\frac{3x - 1}{x^2 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} \implies \frac{3x - 1}{x^2 - x} = \frac{A(x - 1) + B(x)}{x^2 - x}$$

Se tiene que cumplir la identidad  $3x - 1 = A(x - 1) + B(x)$ 

- Para  $x = 0 \implies 1 = -A \implies A = -1$
- Para  $x = 1 \implies 2 = B \implies B = 2$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 1}{x^2 - x} dx &= - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2}{x - 1} dx \\ &= -\ln(x) + 2\ln(x - 1) + C \end{aligned}$$

Ejercicio 10

MaTeX

INTEGRALES





**Ejercicio 11.** Efectuamos el cambio de variable

$$\begin{aligned}
 x = t^6 &\implies dx = 6t^5 dt \\
 \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t^6} + \sqrt[3]{t^6}} 6t^5 dt \\
 &= 6 \int \frac{t^5}{t^3 + t^2} dt = 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt \\
 &= 6 \int \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
 &= 6 \left( \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + t - \ln(t+1) \right) + C \\
 &= 2\sqrt[6]{x^3} - 3\sqrt[6]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C
 \end{aligned}$$

Ejercicio 11

MaTEX

INTEGRALES





**Ejercicio 12.** Efectuamos el cambio de variable

$$x + 2 = t^2 \implies dx = 2t dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x+2} dx &= \int (t^2 - 2) t \cdot 2t dt \\ &= 2 \int t^4 dt - 4 \int t^2 dt \\ &= \frac{2}{5} t^5 - \frac{4}{3} t^3 + C \\ &= \frac{2}{5} (\sqrt{x+2})^5 - \frac{4}{3} (\sqrt{x+2})^3 + C \end{aligned}$$

Ejercicio 12

MaTeX

INTEGRALES



**Ejercicio 13.** Efectuamos el cambio de variable

$$x = t^2 \implies dx = 2t dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx &= \int \frac{1}{(1+t^2)t} 2t dt \\ &= 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= 2 \arctan t + C = 2 \arctan \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

Ejercicio 13



MaTEX

INTEGRALES





**Ejercicio 14.** Efectuamos el cambio de variable

$$1 + \tan x = t^2 \implies \sec^2 x dx = 2t dt \implies dx = \cos^2 x 2t dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}} dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x t} \cos^2 x 2t dt \\ &= 2 \int dt \\ &= 2t + C = 2\sqrt{1 + \tan x} + C \end{aligned}$$

Ejercicio 14

MaTeX

INTEGRALES





**Ejercicio 15.** Efectuamos el cambio de variable

$$1 - \ln x = t^2 \implies -\frac{1}{x} dx = 2t dt \implies dx = -2xt dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln x}} dx &= -\int \frac{1}{xt} 2xt dt \\ &= -2 \int dt \\ &= -2t + C = 2\sqrt{1-\ln x} + C \end{aligned}$$

Ejercicio 15

MaTeX

INTEGRALES





**Ejercicio 16.** Efectuamos el cambio de variable

$$e^x = t \implies e^x dx = dt \implies dx = \frac{1}{t} dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{3x} - e^x}{1 + e^{2x}} dx &= \int \frac{t^3 - t}{1 + t^2} \frac{1}{t} dt \\ &= \int \frac{t^2 - 1}{1 + t^2} dt \quad \triangleleft (\text{dividiendo}) \\ &= \int \left(1 - \frac{2}{1 + t^2}\right) dt \\ &= t - 2 \arctan t + C \\ &= e^x - 2 \arctan e^x + C \end{aligned}$$

Ejercicio 16

MaTeX

INTEGRALES





**Ejercicio 17.** Efectuamos el cambio de variable

$$1 - e^x = t^2 \implies -e^x dx = 2t dt \implies dx = -\frac{2t}{e^x} dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned} \int e^x \sqrt{1 - e^x} dx &= - \int (1 - t^2) t \frac{2t}{1 - t^2} dt \\ &= - \int 2t^2 dt \\ &= -\frac{2}{3}t^3 \\ &= -\frac{2}{3}(\sqrt{1 - e^x})^3 + C \end{aligned}$$

Ejercicio 17

MaTeX

INTEGRALES



**Ejercicio 18.** Efectuamos el cambio de variable

$$\ln x = t \implies \frac{1}{x} dx = dt \implies dx = x dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x} dx &= \int \frac{\operatorname{sen}(t)}{x} x dt \\ &= \int \operatorname{sen} t dt \\ &= -\cos t \\ &= -\cos(\ln x) + C \end{aligned}$$

Ejercicio 18



MaTeX

INTEGRALES



**Ejercicio 19.** Como el exponente es par se utiliza el ángulo doble

$$\begin{aligned}
 \int \cos^4 x \, dx &= \int (\cos^2 x)^2 = \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \left( 1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{8} \int (3 + 4 \cos 2x + \cos 4x) dx \\
 &= \frac{1}{8} \left( 3x + 2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C
 \end{aligned}$$

Ejercicio 19



MaTeX

INTEGRALES



**Ejercicio 20.** Como el exponente es impar se separa de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \sin x \cos^2 x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \cos^2 x dx \\ &= \int \sin x \cos^2 x dx - \int \cos^4 x \sin x dx \\ &= -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C\end{aligned}$$

Ejercicio 20



MaTeX

INTEGRALES





**Ejercicio 21.** Sea  $I = \int \ln(x^2 + 1) dx$

$$\begin{array}{l} u = \ln(x^2 + 1) \quad dv = dx \\ du = \frac{2x}{x^2 + 1} dx \quad v = x \end{array}$$

$$I = x \ln(x^2 + 1) - 2 \underbrace{\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx}_{I_1}$$

Ahora calculamos la integral racional,  $I_1$

$$I_1 = \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int \left( 1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = x - \arctan x$$

Ahora sustituyendo  $I_1$  en  $I$ :

$$I = x \ln(x^2 + 1) - 2(x - \arctan x) + C$$

Ejercicio 21

MaTeX

INTEGRALES



**Ejercicio 22.** Sea  $I = \int \arcsen x \, dx$

$$\begin{array}{l} u = \arcsen x \quad dv = dx \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad v = x \end{array}$$

$$I = x \arcsen x - \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{I_1}$$

Ahora calculamos la integral,  $I_1$

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2}$$

sustituyendo  $I_1$  en  $I$ :

$$I = x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Ejercicio 22



MaTeX

INTEGRALES





**Ejercicio 23.** Siendo  $I = \int e^x \operatorname{sen}(bx)$

$$\begin{array}{l} u = \operatorname{sen} bx \quad dv = e^x dx \\ du = b \cos bx dx \quad v = e^x \end{array}$$

$$I = e^x \operatorname{sen} bx - b \underbrace{\int e^x \cos bx dx}_{I_1}$$

Ahora calculamos la segunda integral

$$\begin{array}{l} u = \cos bx \quad dv = e^x dx \\ du = -b \operatorname{sen} bx dx \quad v = e^x \end{array}$$

$$I_1 = e^x \cos bx + b \int e^x \operatorname{sen} bx dx$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\begin{aligned} I &= e^x \operatorname{sen} bx - b(e^x \cos bx + bI) \\ (1 + b^2)I &= e^x \operatorname{sen} bx - b e^x \cos bx \implies \\ \int e^x \operatorname{sen} bx dx &= \frac{e^x \operatorname{sen} bx - b e^x \cos bx}{1 + b^2} \end{aligned}$$

Ejercicio 23

MaTeX

INTEGRALES





**Ejercicio 24.** Siendo  $I = \int \cos(\ln x) dx$

$$\begin{array}{l} u = \cos(\ln x) \quad dv = dx \\ du = -\frac{1}{x} \sin(\ln x) dx \quad v = x \end{array}$$

$$I = x \cos(\ln x) + \underbrace{\int \sin(\ln x) dx}_{I_1}$$

Ahora calculamos la segunda integral

$$\begin{array}{l} u = \sin(\ln x) \quad dv = dx \\ du = \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx \quad v = x \end{array}$$

$$I_1 = x \sin(\ln x) - \underbrace{\int \cos(\ln x) dx}_I$$

Sustituyendo se obtiene:

$$I = x \cos(\ln x) + (x \sin(\ln x) - I)$$

$$I = \frac{x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)}{2} + C$$

Ejercicio 24

MaTeX

INTEGRALES





**Ejercicio 25.** Siendo  $C_n = \int x^2 \cos(nx) dx$

$$\begin{array}{l} u = x^2 \quad dv = \cos(nx) dx \\ du = 2x dx \quad v = \frac{1}{n} \sin(nx) \end{array}$$

$$C_n = x^2 \frac{1}{n} \sin(nx) - \underbrace{\frac{2}{n} \int x \sin(nx) dx}_{S_n}$$

Ahora calculamos la segunda integral

$$\begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin(nx) dx \\ du = dx \quad v = -\frac{1}{n} \cos(nx) \end{array}$$

$$\begin{aligned} S_n &= -\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n} \int \cos(nx) dx \\ &= -\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \end{aligned}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$C_n = x^2 \frac{1}{n} \sin(nx) - \frac{2}{n} \left( -\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right)$$

$$C_n = \frac{1}{n} x^2 \sin(nx) + \frac{2x}{n^2} \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \sin nx + C$$

Ejercicio 25

MaTeX

INTEGRALES



**Ejercicio 26.** Siendo

$$f(x) = |1 - x| = \begin{cases} 1 - x & x \leq 1 \\ x - 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

hallaremos la primitiva para cada rama de  $f$  La integral buscada queda

$$\int f(x) dx = \begin{cases} \int (1 - x) dx = x - \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\ \int (x - 1) dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C_2 \end{cases}$$

Ejercicio 26

MaTEX

INTEGRALES



**Ejercicio 27.** Siendo

$$f(x) = 3 - |x| = \begin{cases} 3 + x & x \leq 0 \\ 3 - x & 0 \leq x \end{cases}$$

hallaremos la primitiva para cada rama de  $f$  La integral buscada queda

$$\int f(x) dx = \begin{cases} \int (3 + x) dx = 3x + \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\ \int (3 - x) dx = 3x - \frac{1}{2}x^2 + C_2 \end{cases}$$

Ejercicio 27



MaTeX

INTEGRALES



## Soluciones a los Tests

**Solución al Test:** En efecto

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int (1 + x^2) dx = (1 + x^2)$$

Final del Test



# MaTEX

# INTEGRALES



## Índice alfabético

integral indefinida, 3

integrales básicas, 8

método, 10

para las racionales, 10

para trigonométricas, 23

por cambio de variable, 15

por partes, 19

primitiva, 3

notación, 5

propiedad

aditiva, 6

homogénea, 6

regla

de la potencia, 7



MaTeX

INTEGRALES

