Proyecto MaTEX

Geometría Métrica

Fco Javier González Ortiz

Directorio

D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4

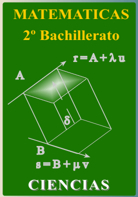


Tabla de Contenido

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

1. Introducción

En este capítulo trataremos las cuestiones de geometría métrica que se refieren a la medida de distancias y la medida de ángulos.

En el tema de Vectores, las herramientas esenciales fueron los tres productos vistos en el tema:

- producto escalar,
- producto vectorial y
- producto mixto.

que nos permiten hallar la magnitud de un vector, el ángulo de vectores, el área de un paralelogramo y el volumen de un paralelepípedo.

Con esas herramientas en este capítulo podremos determinar las distancias entre puntos, punto y recta, punto y plano y entre dos rectas, así como el cálculo de ángulos entre planos y rectas.

2. Distancias

2.1. Distancia de dos puntos

Sean $P(x_0, y_0, z_0)$ y $Q(x_1, y_1, z_1)$ dos puntos cualesquiera. Definimos la distancia de P a Q como la norma del vector $\overrightarrow{PQ}$ que determinan, es decir

$$\boxed{d(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} \qquad (1)$$

Observa que esta expresión generaliza la distancia de dos puntos en el plano que ya conocías, $d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

Ejemplo 2.1. Sean los puntos $P(3, -1, 2)$ y $Q(1, 5, 0)$.

Solución: Como $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2, 6, -2)$

$$d(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(-2)^2 + (6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{44}$$

□

Ejemplo 2.2. Dados los puntos $A(2, -1, 2)$ y $B(3, 5, 7)$, halar las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ y su norma-módulo.

Solución: Siendo los puntos $A(2, -1, 2)$ y $B(3, 5, 7)$

- $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 5, 7) - (2, -1, 2) = (1, 6, 5)$.
- El módulo $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{1^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{62}$

□

MaTEX

MÉTRICA

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

2.2. Distancia de punto a recta

Teorema 2.1. Dados un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y una recta $r \equiv A + \lambda\,\vec{u}$. Para hallar la distancia de P a la recta r

- Tomemos de la recta un punto cualquiera A y el vector director $\vec{u}$.
- El área del paralelogramo de aristas $||PA||$ y $||\vec{u}||$ es $||\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}||$.
- La distancia buscada $\delta = PH$ es la altura del paralelogramo

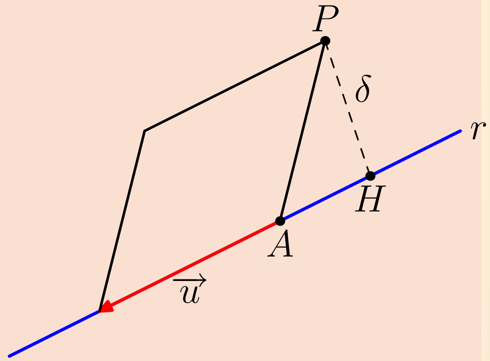
Area del paralelogramo

$$||\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}|| = base \times altura$$

$$||\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}|| = ||\vec{u}|| \times \delta$$

Despejando resulta

$$\boxed{\mathrm{d}(P, r) = \delta = \frac{||\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}||}{||\vec{u}||}}$$



MÉTRICA
Doc Doc
Volver Cerrar

Ejemplo 2.3. Hallar la distancia de $P(3,-3,1)$ a la recta

$$r \equiv (x,y,z) = (2,3,4) + \lambda\,(-1,2,1)$$

Solución:

- Un punto de la recta es $A(2,3,4)$ y el vector director $\vec{u} = (-1,2,1)$.
- La norma del producto vectorial $||\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}||$:
  Siendo $\overrightarrow{AP} = (1,-6,-3)$, el producto vectorial es

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -6 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (0,2,-4)$$

  Su norma es

$$||\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}|| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$$

- Siendo la norma de $\vec{u}$, $||\vec{u}|| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$, la distancia pedida

$$d(P,r) = \frac{||\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}||}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}$$

□

- **Proyección ortogonal de punto a recta**

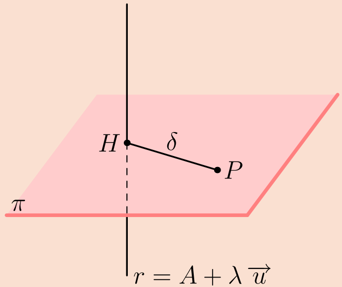
Como en el ejemplo anterior, sean el punto $P(3,-3,1)$ y la recta

$$r \equiv (x,y,z) = (2,3,4) + \lambda\,(-1,2,1)$$

Para calcular la proyección ortogonal H del punto P a r, hallamos la intersección de la recta r con el plano π que pasa por P y es $\perp$ a r.
Hallamos π, $\pi \equiv -(x-3)+2(y+3)+(z-1)=0$.

Resolvemos el sistema

$$H = \pi \cap r \left\{ \begin{array}{l} r = \left\{ \begin{array}{l} x = 2-\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = 4+\lambda \end{array} \right. \\ \pi = -x+2y+z+8=0 \end{array} \right.$$



Sustituyendo x,y,z en π, obtenemos

$$-(2-\lambda)+2(3+2\lambda)+(4+\lambda)+8=0$$

$$\lambda = -\frac{8}{3}$$

sustituyendo λ en r obtenemos

$$H\left(\frac{14}{3},-\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$$

Se comprueba que $d(P,H) = d(P,r)$, es decir, la distancia de punto a recta es la distancia del punto a su proyección ortogonal sobre r.

Ejercicio 1. Encontrar la distancia del punto $P(1,2,1)$ a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$$

Ejercicio 2. Encontrar la distancia del punto $P(1,2,1)$ a la recta

$$s : \left\{ \begin{array}{ll} x+y-z-3 & =0 \\ x-y+z-1 & =0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 3. Hallar la distancia del origen a la recta

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y-5z+4=0 \\ 3x+y+z-2=0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 4. Hallar la proyección ortogonal del punto $P(1,2,1)$ a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

2.3. Distancia de punto a plano

Teorema 2.2. Sea el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y el plano $\pi \equiv ax + by + bz + d = 0$
Tomemos del plano un punto cualquiera A y el vector normal $\vec{n}$.
Sea H la proyección ortogonal de P a π. En el dibujo se aprecia que

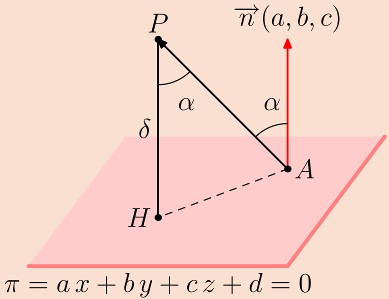
$$\alpha = \angle APH = \angle(\vec{AP}, \vec{n})$$

Del producto escalar de $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{n}$ se obtiene:

$$\vec{n} \,.\, \overrightarrow{AP} = ||\vec{n}|| \; \overbrace{||\overrightarrow{AP}|| \, \cos\alpha}^{\delta}$$

despejando δ,

$$\boxed{\mathrm{d}(P, \pi) = \delta = \frac{|\vec{n} \,.\, \overrightarrow{AP}|}{||\vec{n}||}}$$



Vamos a expresar la fórmula anterior en coordenadas. Siendo A un punto de π

$$A(x_1, y_1, z_1) \Longrightarrow \overrightarrow{AP} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
MÉTRICA
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

con $\vec{n} = (a, b, c)$, realizamos el producto escalar

$$\begin{aligned} \vec{n}\,.\,\overrightarrow{AP} &= (a, b, c) \cdot (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \\ &= ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1) \\ &= ax_0 + by_0 + cz_0 + d \end{aligned}$$

ya que como $A \in \pi$, $ax_1 + by_1 + cz_1 = -d$.

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{2}$$

Ejemplo 2.4. Hallar la distancia del punto $P(3, 2, -1)$ al plano

$$\pi \equiv 2\,x - y - 2\,z + 3 = 0$$

Solución:
Para hallar la distancia de P a π se sustituye el punto en la ecuación del plano y se divide por la norma del vector normal al plano.

$$d(P, \pi) = \frac{|2\,(3) - (2) - 2\,(-1) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 3$$

□

- **Proyección ortogonal de punto a plano**

Como en el ejemplo anterior, sean el punto $P(3,2,-1)$ y el plano

$$\pi \equiv 2\,x - y - 2\,z + 3 = 0$$

Para calcular la proyección ortogonal H del punto P a π resolvemos la intersección del plano π con la recta $\mathbf{r}$, que pasa por P y es $\perp$ a π, expresando $\mathbf{r}$ en paramétricas con vector $\vec{n} = (2,-1,-2)$.

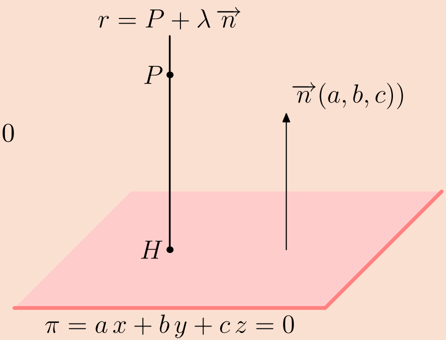
$$H = \pi \cap r \left\{ \begin{array}{l} r = \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{array} \right. \\ \pi = 2\,x - y - 2\,z + 3 = 0 \end{array} \right.$$

$$2(3+2\lambda)-(2-\lambda)-2(-1-2\lambda)+3 = 0$$

$$\lambda = -1$$

Sustituyendo en r, obtenemos

$$H(1,3,1)$$



Se comprueba que $d(P,H) = d(P,\pi)$, es decir, la distancia de punto a plano es la distancia del punto a su proyección ortogonal sobre π.

Ejercicio 5. Determinar la distancia del punto $A(5,5,3)$ al plano

$$\pi \equiv (x,y,z) = (0,0,4) + \lambda(2,2,-1) + \mu(-3,2,0)$$

Ejercicio 6. Hallar el punto P del plano $\alpha : x+y+z-3=0$ que está más próximo al punto $A(1,0,0)$. ¿Cuál será la distancia de una recta, contenida en dicho plano y que pase por el punto P, al punto $A(1,0,0)$?.

Ejercicio 7. Se considera el plano de ecuación:

$$\alpha :\ 2x+y-z-5=0$$

Calcular la ecuación general de los planos paralelos al anterior. Calcular también un plano paralelo al anterior cuya distancia al mismo sea 7. ¿Es único este plano ?.

Ejercicio 8. Determinar, en función de x, la distancia de un punto $P(x,0,0)$ a la recta de ecuaciones

$$r \equiv \begin{array}{ll} x+y & =0 \\ y+z & =0 \end{array}$$

¿Para qué punto $(x,0,0)$ la distancia a dicha recta es igual a la distancia al plano $\pi \equiv x=0$?.

2.4. Distancia entre dos rectas

Teorema 2.3. Sean las rectas

$$r \equiv A + \lambda\,\vec{u} \qquad s \equiv B + \mu\,\vec{v}$$

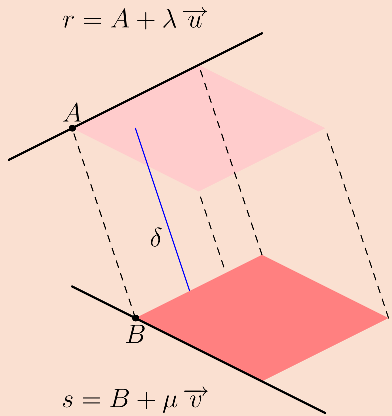
Con los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ se determina el paralelepípedo con volumen $|\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}|$. Por construcción las rectas r y s están contenidas en dos planos paralelos, luego la distancia entre las rectas es la distancia

entre los planos, que equivale a la altura del paralelepípedo construido.

$$\text{Volumen} = |\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}|$$

$$\text{Base} = ||\vec{u} \wedge \vec{v}||$$

$$\boxed{\mathrm{d}(r,s) = \delta = \frac{|\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}|}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}}$$



MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
MÉTRICA
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejemplo 2.5. Hallar la distancia entre las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{3} \qquad s \equiv \frac{x+2}{2} = y-5 = \frac{z}{3}$$

Solución: Un punto $A(2,-3,0) \in r$, un punto $B(-2,5,0) \in s$ siendo los vectores directores respectivos $\vec{u} = (5,2,3)$ y $\vec{v} = (2,1,3)$

$$det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -84$$

El producto vectorial es

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (3,-9,1)$$

luego

$$d(r,s) = \frac{|\vec{u}\,\vec{v},\overrightarrow{AB}|}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||} = \frac{84}{\sqrt{91}}$$

□

Ejercicio 9. Hallar la distancia entre las rectas :

$$r : \left\{ \begin{array}{rl} x-2 & = 0 \\ y+3 & = 0 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{rl} x-2z & = 0 \\ y+z & = 3 \end{array} \right.$$

3. Ángulos en el espacio

3.1. Ángulo entre dos planos

El ángulo entre dos planos secantes π_1 y π_2 es el menor de los ángulos que determinan. Dados

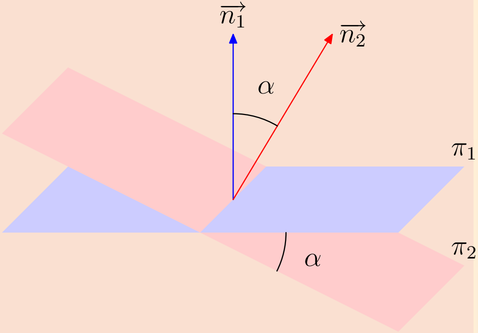
$$\begin{array}{rcl} \pi_1 & \equiv & A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z = D_1 \\ \pi_2 & \equiv & A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z = D_2 \end{array}$$

el ángulo que forman coincidirá con el ángulo quer forman sus vectores normales $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ y $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ si es agudo o su suplementario si es obtuso.

Aplicando la definición del producto escalar, obtenemos el coseno de

$$\alpha = \angle(\pi_1, \pi_2)$$

$$\boxed{cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1||\,||\vec{n}_2||}}$$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

3.2. Ángulos entre recta y plano

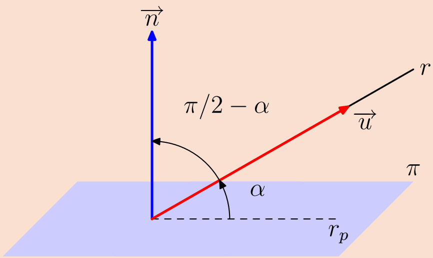
El ángulo entre una recta **r** y un plano π es el ángulo α que forma la recta **r** con la recta $\mathbf{r}_p$ que se obtiene al proyectar **r** sobre π. Observar que α corresponde al complementario del ángulo que determinan el vector $\vec{u}$ de la recta con el vector normal $\vec{n}$ del plano . Siendo los vectores respectivos $\vec{n}(a,b,c)$ y $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ tendremos.

Como

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \angle(\vec{n},\vec{u})$$

y $sen\,\alpha = cos(\vec{n},\vec{u})$

$$\boxed{sen(r,\pi) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{||\vec{u}||\,||\vec{n}||}}$$



Ejemplo 3.1. Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano π

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{1} \qquad \pi \equiv x - y - z = 0$$

Solución: El ángulo $\angle(r,\pi) = 90 - \angle(\vec{u},\vec{n})$,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{(2,-1,1)\cdot(1,-1,-1)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\square$

3.3. Ángulo entre dos rectas

Sean las rectas r y s de ecuaciones:

$$r \equiv A + \lambda\,\vec{u} \qquad s \equiv B + \mu\,\vec{v}$$

definimos el ángulo determinado por r y s como el ángulo que determinan sus vectores direccionales, es decir

$$\boxed{cos(r,s) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{||\vec{u}||\;||\vec{v}||}} \tag{3}$$

Ejemplo 3.2. Calcular el ángulo formado por las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$$

$$s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$$

Solución:

El ángulo $\angle(r,s) = \angle(\vec{u},\vec{v})$, por el producto escalar de vectores

$$\cos\alpha = \frac{(2,1,1)\cdot(1,-3,1)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+3^2+1^2}} = 0 \Longrightarrow \alpha = 90^o$$

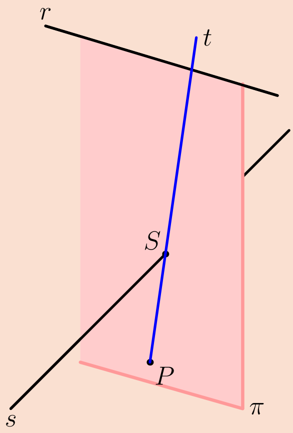
luego las rectas son ortogonales. □

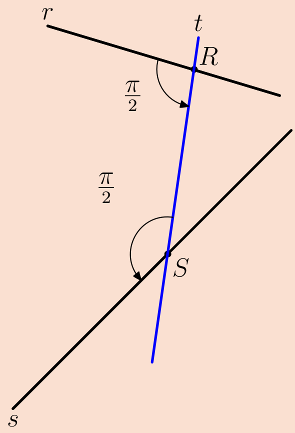
MaTEX
MÉTRICA
Doc Doc
Volver Cerrar

4. Ejercicios de interés

Ahora vamos a tratar dos problemas interesantes como son:

- el cálculo de la recta que desde un punto corta o se apoya en otras dos rectas dadas.
- y el cálculo de la recta que corta perpendicularmente a dos rectas dadas.



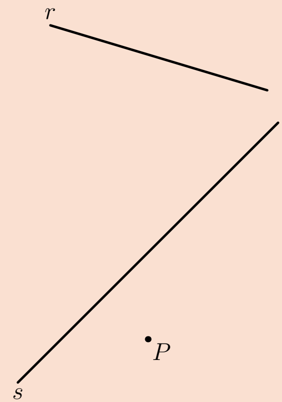


Recta que desde un punto corta a dos rectas

Sean $P(-1,0,1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

$$s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-3}$$



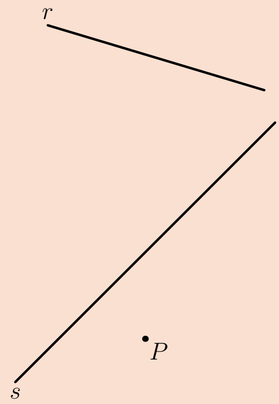
Recta que desde un punto corta a dos rectas

Sean $P(-1,0,1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

$$s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-3}$$

- Hallamos el plano $\pi =< P; r >$



Recta que desde un punto corta a dos rectas

Sean $P(-1,0,1)$ y las rectas

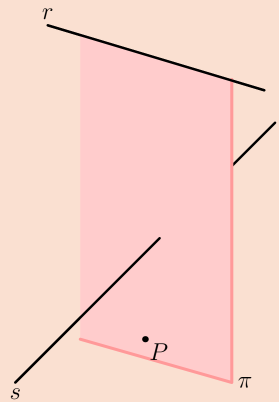
$$r \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

$$s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-3}$$

- Hallamos el plano $\pi =< P; r >$

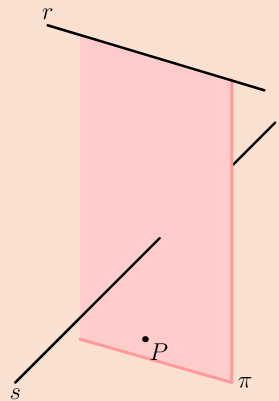
$R(3,-1,0) \in r$, $\overrightarrow{PR}(4,-1,-1)$ y $\overrightarrow{r}(5,2,-3)$

$$\pi = \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$



Recta que desde un punto corta a dos rectas

Sean $P(-1,0,1)$ y las rectas



$$r \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

$$s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-3}$$

• Hallamos el plano $\pi =< P; r >$

$R(3,-1,0) \in r$, $\overrightarrow{PR}(4,-1,-1)$ y $\overrightarrow{r}(5,2,-3)$

$$\pi = \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

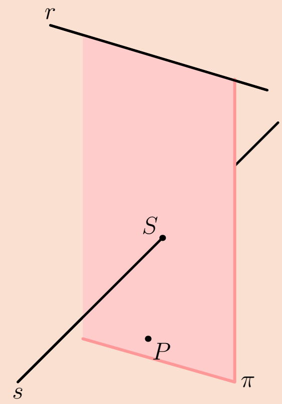
• La intersección de $\pi \cap s = \{\mathbf{S}\}$

Recta que desde un punto corta a dos rectas

Sean $P(-1,0,1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

$$s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-3}$$



- Hallamos el plano $\pi = < P; r >$

$R(3,-1,0) \in r$, $\overrightarrow{PR}(4,-1,-1)$ y $\overrightarrow{r}(5,2,-3)$

$$\pi = \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

- La intersección de $\pi \cap s = \{\mathbf{S}\}$

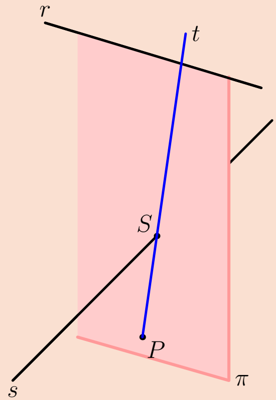
$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi \equiv & 5x + 7y + 13z = 8 \\ s \equiv & \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{array} \right. \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{c} 5(2\lambda) + 7(-2+\lambda) + 13(1-3\lambda) = 8 \\ \lambda = \dfrac{9}{22} \Longrightarrow S(\dfrac{9}{11}, -\dfrac{35}{22}, -\dfrac{5}{22}) \end{array}$$

Recta que desde un punto corta a dos rectas

Sean $P(-1,0,1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

$$s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-3}$$



- Hallamos el plano $\pi =< P; r >$

$R(3,-1,0) \in r$, $\overrightarrow{PR}(4,-1,-1)$ y $\overrightarrow{r}(5,2,-3)$

$$\pi = \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

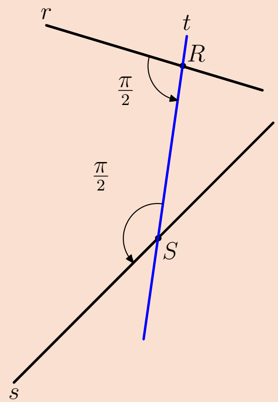
- La intersección de $\pi \cap s = \{\mathbf{S}\}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi \equiv & 5x+7y+13z=8 \\ s \equiv & \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = 1-3\lambda \end{array} \right. \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{c} 5(2\lambda)+7(-2+\lambda)+13(1-3\lambda)=8 \\ \lambda = \dfrac{9}{22} \Longrightarrow S(\dfrac{9}{11}, -\dfrac{35}{22}, -\dfrac{5}{22}) \end{array}$$

t pasa por **P** y **S** $\quad t \equiv \dfrac{x+1}{18} = \dfrac{y}{-35} = \dfrac{z-1}{-5}$

Recta que corta perpendicularmente a dos rectas

Sean las rectas



$$\left\{ \begin{array}{lcl} r & \equiv & \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z}{-1} \\ s & \equiv & \dfrac{x}{0} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-2}{1} \end{array} \right.$$

- Escribimos R y S en forma paramétrica como

$$R(2+\lambda, 1, -\lambda) \in r$$
$$S(0, -2-\mu, 2+\mu) \in s$$

- Se tiene que cumplir

$$\boxed{\overrightarrow{RS} \perp \vec{u} \qquad \overrightarrow{RS} \perp \vec{v}}$$

- $\overrightarrow{RS} = (-2-\lambda, -3-\mu, 2+\mu+\lambda)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{l} 2\,\lambda + \mu = -4 \\ \lambda + 2\,\mu = -5 \end{array} \Longrightarrow \mu = -2 \quad \lambda = -1$$

sustituyendo obtenemos R y S, $\mathbf{R}(1,1,1)$ $\mathbf{S}(0,0,0)$. La recta t pedida pasa por R y S:

$$t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Test. Por un punto P exterior a una recta r, ¿cuántas rectas perpendiculares a r se pueden trazar desde P?

(a) Infinitas (b) Una (c) Dos

Test. ¿Puede ser una recta perpendicular a una recta de un plano sin que lo sea al plano?

(a) No (b) Si

Ejercicio 10. Hallar la ecuación de la recta r_1 que pasa por el punto $(1, 0, 0)$ y es perpendicular al plano $x - y - z + 2 = 0$.

Ejercicio 11. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y es perpendicular a la recta $x = t \; y = 0 \; z = t$.

Ejercicio 12. Calcular alguna recta que sea paralela al plano de ecuación $\pi_1 \equiv x - 2y + z = 1$ y que también sea paralela al plano π_2 que pasa por los puntos de coordenada $P(2, 0, 1)$, $Q(0, 2, 1)$ y $R(1, -1, 0)$.

Ejercicio 13. Determinar la ecuación de un plano que contenga a la recta r y sea perpendicular al plano π, siendo:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1}$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ll} x & = \lambda - \mu \\ y & = \lambda \\ z & = \mu \end{array} \right.$$

Ejercicio 14. Hallar el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto del plano $\alpha : x - 3y - 2z + 4 = 0$.

Ejercicio 15. Un triángulo tiene de vértices $A(0,0,0)$, $B(1,1,1)$ y el tercer vértice situado en la recta $\{x = 2y;\ z = 1\}$. Calcular las coordenadas del tercer vértice, sabiendo que el área del triángulo es $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejercicio 16. Hallar las ecuaciones de la recta s que pasa por el punto $P(2,-1,1)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = z$$

Ejercicio 17. Dados los puntos $P(1,1,2)$ y $Q(1,-1,2)$ y la recta r de ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rl} x = & -1 + 2\alpha \\ y = & -1 + \alpha \\ z = & 1 \end{array} \right.$$

Se pide

a) Encontrar la posición relativa de r y la recta determinada por P y Q

b) Hallar el punto o puntos R de r para que el triángulo PQR sea isósceles de lados iguales PR y QR

Ejercicio 18. Hallar la perpendicular común a las rectas r y s:

$$\left\{ \begin{array}{lcc} r & \equiv & x = y = z \\ s & \equiv & x = y = 3z - 2 \end{array} \right.$$

Ejercicio 19. La recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x + y = 1 \\ \lambda\, y + z = 1 \end{array} \right.$$

corta en P y Q a los planos $\pi_1 \equiv y = 0$, $\pi_2 \equiv x = 0$.

a) Determinar en función de λ los puntos del eje Oz que equidistan de P y Q.

b) Determinar λ para que además los puntos del eje Oz formen con P y Q un triángulo equilátero.

Ejercicio 20. Se sabe que la recta $r : (x, y, z) = (1, -b, 0) + \lambda(2, -10, 1)$ y el plano $\pi \equiv 2\,x + a\,y + z = 2$ se cortan perpendicularmente y que la recta pasa por el punto $(-1, 1, -1)$. Calcular a, b y el punto de corte.

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Sea $P(1,2,1)$ y $A(1,-3,1) \in r$, luego $\overrightarrow{AP} = (0,-5,0)$. Calculamos

$$\vec{u} \wedge \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (5,0,-10)$$

$$d(P,r) = \frac{||\vec{u} \wedge \vec{AP}||}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{6}}$$

Ejercicio 1

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 2. Haciendo por ejemplo $z = 0$ en s, obtenemos $x = 2$ e $y = 1$, luego $A(2, 1, 0) \in s$. Como $P(1, 2, 1)$, $\overrightarrow{AP} = (-1, 1, 1)$. El vector director $\vec{u} \in s$ lo calculamos con

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, -2)$$

Con $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AP} = (-1, 1, 1)$ calculamos

$$\vec{u} \wedge \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 2, -2)$$

$$d(P, s) = \frac{||\vec{u} \wedge \vec{AP}||}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 1$$

Ejercicio 2

Ejercicio 3. Haciendo por ejemplo $z = 0$ en r, obtenemos $x = 3$ e $y = -7$, luego $A(3, -7, 0) \in r$. Como $P(0, 0, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (-3, 7, 0)$. El vector director $\vec{u} \in r$ lo calculamos con

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (6, -16, -2)$$

Con $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AP}$ calculamos

$$\vec{u} \wedge \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -7 & 0 \\ 6 & -16 & -2 \end{vmatrix} = (14, 6, -6)$$

$$d(P, r) = \frac{||\vec{u} \wedge \vec{AP}||}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{268}}{\sqrt{296}}$$

Ejercicio 3

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 4. Siendo $P(1,2,1)$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$$

Hallamos el plano π que pasa por P y es $\perp$ a r.

$$\pi \equiv 2\,(x-1) + (y-2) + (z-1) = 0$$

Resolvemos el sistema

$$H = \pi \cap r \left\{ \begin{array}{l} r = \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\,\lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \\ \pi = 2\,x + y + z - 5 = 0 \end{array} \right.$$

Sustituyendo x, y, z en π, obtenemos

$$2\,(1 + 2\,\lambda) + (-3 + \lambda) + (1 + \lambda) - 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{5}{6}$$

sustituyendo λ en r obtenemos H

$$H\left(\frac{16}{6}, -\frac{13}{6}, \frac{11}{6}\right)$$

Ejercicio 4

Ejercicio 5. Hallamos la ecuación general del plano:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-4 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2x + 3y + 10(z-4) = 0$$

La ecuación general del plano $\pi \equiv 2x + 3y + 10z - 40 = 0$, y por la fórmula de distancia de punto a plano:

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 10 \cdot 3 - 40|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 10^2}} = \frac{15}{\sqrt{113}}$$

Ejercicio 5

Ejercicio 6. El punto P es la proyección ortogonal de A sobre π. Para hallarle sea $r \perp \pi$ que pasa por A

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{ll} x = & 1+\lambda \\ y = & 0+\lambda \\ z = & 0+\lambda \end{array} \right. \Rightarrow \overbrace{(1+\lambda)+(1+\lambda)+(1+\lambda)-3=0}^{r\cap\pi}$$

se obtiene $3\,\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ y $P=(1,1,1)$.
La distancia pedida será la distancia de P a A,

$$d(P,A) = \sqrt{(1-1)^2+(1-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$$

Ejercicio 6

Ejercicio 7. Todos los planos paralelos al plano $\alpha : \ 2x+y-z-5=0$ vienen dados por la ecuación

$$\pi_k \equiv 2x+y-z+k=0$$

Determinemos k de forma que $d(\alpha, \pi_k)=7$.

La distancia entre dos planos paralelos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro plano.
Haciendo $x=0, z=0$ en α hallamos $y=5$, luego $P(0,5,0)\in\alpha$, así

$$d(\alpha,\pi_k)=d(P,\pi_k)=7$$

Por la formula de distancia de punto a plano tendremos:

$$d(P,\pi_k)=\frac{|2\cdot 0+5-0+k|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=7$$

$$\Rightarrow |5+k|=7\sqrt{6}\Rightarrow k=-5\pm 7\sqrt{6}$$

Ejercicio 7

Ejercicio 8.
Sea $\delta_1 = d(P, r)$. Como la distancia de punto a recta es

$$d(P, r) = \frac{||\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}||}{||\vec{u}||}$$

Haciendo $y = -\lambda$ en r obtenemos $x = \lambda$ y $z = \lambda$, luego r es $(x, y, z) = \lambda\,(1, -1, 1)$, de esta forma obtenemos un punto $A(0, 0, 0) \in r$ y su vector $\vec{u} = (-1, 1, -1)$.
Tenemos $\overrightarrow{AP} = (x, 0, 0)$ luego

$$\delta_1 = d(P, r) = \frac{|(-1, 1, -1) \wedge (x, 0, 0)|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{3}}$$

Sea

$$\delta_2 = d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot x|}{\sqrt{(1)^2 + 0^2 + 0^2}} = |x|$$

Igualando

$$\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \frac{|x|}{\sqrt{3}} = |x| \Rightarrow x = 0$$

Ejercicio 8

Ejercicio 9. Pasamos r y s a paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2\,\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

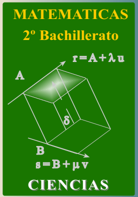
Un punto $A(2, -3, 0) \in r$ y un punto $B(0, 3, 0) \in s$ siendo los vectores directores respectivos $\vec{u} = (0, 0, 1)$ y $\vec{v} = (2, -1, 1)$

$$det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 10 \qquad \vec{u} \wedge \vec{v} = (1, 2, 0)$$

luego

$$d(r, s) = \frac{|\vec{u}\,\vec{v}, \overrightarrow{AB}|}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

Ejercicio 9



MaTEX

MÉTRICA

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 10. El vector normal del plano es la dirección de la recta:

$$r_1 \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-0}{-1}$$

Ejercicio 10

Ejercicio 11. El vector normal del plano buscado es el vector dirección de la recta, es decir,$\vec{u}(1, 0, 1)$, luego el plano pedido es

$$1 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + z - 2 = 0$$

Ejercicio 11

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 12.
Como la recta buscada es paralela a π_1 y π_2, su vector $\vec{u}$ tiene que ser ortogonal a los vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ de los planos.
Hallamos el plano π_2 con $\overrightarrow{PQ}(-2,2,0)$ y $\overrightarrow{PR}(-1,-1,-1)$

$$\pi_2 = \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x + y - 2\,z = 0$$

Como $\vec{u}$ tiene que ser ortogonal a los vectores normales $\vec{n}_1(1,-2,1)$ y $\vec{n}_2(1,1,-2)$, $\vec{u}$ es el producto vectorial de $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$

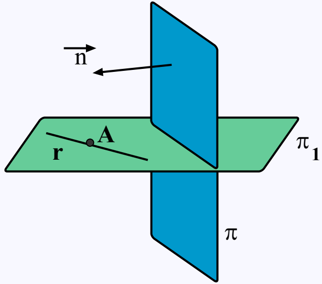
$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (3,3,3)$$

La solución pedida es cualquier recta que tenga como dirección $(3,3,3)$, sin importar el punto por donde pase.

Ejercicio 12

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 13. Del plano buscado π_1 buscado tenemos:



- el punto $A(1,1,-1) \in r$
- el vector $\vec{u}(2,-3,-1)$ de r
- y el vector $\vec{n}$ de $\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - y + z = 0$:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4x - 3y + z + 8 = 0$$

Ejercicio 13

Ejercicio 14. Hallamos H la proyección ortogonal de P sobre π. Para ello sea $r \perp \pi$ que pasa por P

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1+\lambda \\ y = & 2-3\lambda \\ z = & 3-2\lambda \end{array} \right. \Rightarrow \overbrace{(1+\lambda)-3(2-3\lambda)-2(3-2\lambda)+4=0}^{r\cap\pi}$$

se obtiene $14\,\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2$ y $H = (\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, 2)$. Para hallar el simétrico P' de P tenemos en cuenta que H es el punto medio de P y $P'(x, y, z)$, es decir

$$H = \frac{P+P'}{2} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{3}{2} = \dfrac{1+x}{2} \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{2+y}{2} \\ 2 = \dfrac{3+z}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{array} \right. \Rightarrow P'(2, -1, 1)$$

Ejercicio 14

Ejercicio 15. Expresado en paramétricas el tercer vértice $C \in r$ buscado , haciendo $y = \lambda$ en r, $C(2\lambda, \lambda, 1) \in r$.

Como el área del $\triangle ABC = \dfrac{1}{2} ||\vec{AB} \wedge \vec{AC}||$, siendo $\vec{AB} = (1, 1, 1)$ y $\vec{AC} = (2\lambda, \lambda, 1)$ efectuamos el producto vectorial

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2\lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix} = (1 - \lambda, 2\lambda - 1, -\lambda)$$

$$\text{y } ||\vec{AB} \wedge \vec{AC}|| = \sqrt{(1-\lambda)^2 + (2\lambda - 1)^2 + \lambda^2} = \sqrt{6\,\lambda^2 - 6\,\lambda + 2}$$

$$\text{Area}\triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{6\,\lambda^2 - 6\,\lambda + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resolviendo queda $\lambda = 0 \vee \lambda = 1$. Dos puntos solución

$$C_1(0, 0, 1) \qquad C_2(2, 1, 1)$$

Ejercicio 15

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 16.
Sea S el punto donde s corta perpendicularmente a r:

- Como S pertenece a r, escribimos S en forma paramétrica,

$$S(2+\lambda, 2+\lambda, \lambda) \in r$$

- Se tiene que cumplir

$$\boxed{\overrightarrow{PS} \perp \vec{u}}$$

- Siendo $P(2,-1,1)$, $\overrightarrow{PS} = (\lambda, 3+\lambda, \lambda-1)$

$$\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Longrightarrow \lambda + (3+\lambda) + 0(\lambda-1) \Longrightarrow \lambda = -3/2$$

luego sustituyendo se obtiene el punto S:

$$S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

Así la recta s pedida pasa por P y S, cuya ecuación es:

$$s \equiv \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$$

Ejercicio 16

Ejercicio 17.

a) Encontrar la posición relativa de r y la recta determinada por P y Q

$$\begin{array}{lcc} r \equiv & A(-1,-1,1) & \vec{u}(2,1,0) \\ s \equiv & P(1,1,2) & \vec{v}(0,-2,0) \end{array}$$

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales las rectas no son paralelas. Veamos si se cortan o se cruzan

$$det(\overrightarrow{AP},\vec{u},\vec{v}) = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{ Se cruzan}$$

b) Hallar el punto o puntos R de r para que el triángulo PQR sea isósceles de lados iguales PR y QR.
Expresamos R en paramétricas $R(-1+2\alpha,-1+\alpha,1)$, hallamos $PR = (-2+2\alpha,-2+\alpha,-1)$ y $QR = (-2+2\alpha,\alpha,-1)$ y resolvemos

$$\begin{array}{ccc} d(P,R) & = & d(Q,R) \\ \sqrt{(2\alpha-2)^2+(\alpha-2)^2+(-1)^2} & = & \sqrt{(2\alpha-2)^2+(\alpha)^2+(-1)^2} \\ -4\,\alpha+4=0 & \Longrightarrow & \alpha = 1 \end{array}$$

El punto pedido es $R(1,0,1)$

Ejercicio 17

Ejercicio 18. Sean las rectas

$$\left\{\begin{array}{lcc} r & \equiv & x=y=z \\ s & \equiv & x=y=3z-2 \end{array}\right.$$

- Escribimos R y S en forma paramétrica como

$$R(\lambda,\lambda,\lambda)\in r$$
$$S(3\mu-2,3\mu-2,\mu)\in s$$

- Se tiene que cumplir

$$\boxed{\overrightarrow{RS}\perp\vec{u} \qquad \overrightarrow{RS}\perp\vec{v}}$$

- $\overrightarrow{RS}=(3\mu-2-\lambda,3\mu-2-\lambda,\mu-\lambda)$

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{u}=0 \\ \overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{v}=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{c} 7\mu-3\lambda=4 \\ 19\mu-7\lambda=12 \end{array} \Longrightarrow \mu=1 \quad \lambda=1$$

t pasa por $\mathbf{R}(1,1,1)$ y $\mathbf{S}(1,1,1)$. Como coinciden las rectas se cortan en el punto **R**. El vector de la perpendicular se halla con $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=(-2,2,0)$ y la recta pedida es

$$t\equiv\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{0}$$

Ejercicio 18

Ejercicio 19.
En primer lugar hallamos P y Q.

$$P(1,0,1)\left\{\begin{array}{c} r \equiv \left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ \lambda\, y+z=1 \end{array}\right. \\ \pi_1 \equiv y=0 \end{array}\right. \qquad Q(0,1,1-\lambda)\left\{\begin{array}{c} r \equiv \left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ \lambda\, y+z=1 \end{array}\right. \\ \pi_2 \equiv x=0 \end{array}\right.$$

a) Puntos del eje Oz son $Z(0,0,z)$ que equidistan de P y Q.

$$d(Z,P)=d(Z,Q) \Longrightarrow \sqrt{1^2+0^2+(1-z)^2}=\sqrt{0^2+1^2+(1-\lambda-z)^2}$$

elevando al cuadrado y operando resulta: $\lambda^2+2\lambda\, z-2\lambda=0$, luego

$$\lambda(\lambda+2\,z-2)=0 \Longrightarrow \lambda=0 \vee \lambda=2-2z$$

b) Para que Z además forme con P y Q un triángulo equilátero, exigimos que $d(Z,P)=d(P,Q)$

$$d(Z,P)=d(P,Q) \Longrightarrow \sqrt{1^2+0^2+(1-z)^2}=\sqrt{1^2+1^2+\lambda^2}$$

elevando al cuadrado y operando resulta: $-\lambda^2-2z+z^2=0$. Sustituyendo por los valores del apartado anterior, resulta:

$$\begin{array}{lcll} \lambda=0 & \Longrightarrow & z=0 \vee z=2 & Z_1(0,0,0) \vee Z_2(0,0,2) \\ \lambda=2-2z & \Longrightarrow & & \text{no hay solución} \end{array}$$

Ejercicio 19

Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 20.

- La recta $r:(x,y,z)=(1,-b,0)+\lambda(2,-10,1)$ y el plano $\pi\equiv 2\,x+a\,y+z=2$ son perpendiculares, luego $\vec{u}\,||\,\vec{n}$, siendo $\vec{u}(2,-10,1)$ y $\vec{n}(2,a,1)$

$$\frac{2}{2}=\frac{-10}{a}=\frac{1}{1}\Longrightarrow \boxed{a=-10}$$

- la recta pasa por el punto $(-1,1,-1)$, luego

$$(-1,1,-1)=(1,-b,0)+\lambda(2,-10,1)\Longrightarrow \boxed{b=9}$$

- Para hallar el punto de corte sustituimos las coordenadas paramétricas de la recta en la ecuación del plano

$$2\,(1+2\,\lambda)-10\,(-9-10\,\lambda)+(\lambda)=2\Longrightarrow \lambda=-\frac{6}{7}$$

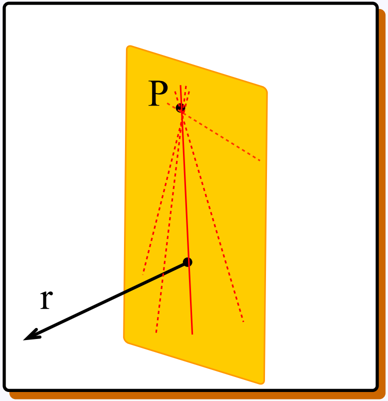
  y sustituyendo λ en la expresión de la recta obtenemos el punto de corte

$$R\left(-\frac{5}{7},-\frac{3}{7},-\frac{6}{7}\right)$$

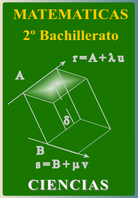
Ejercicio 20

Soluciones a los Tests

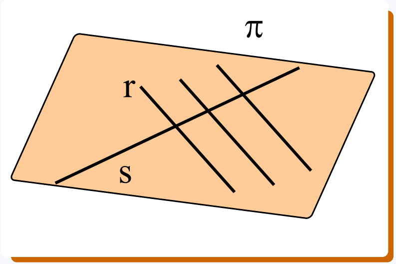
Solución al Test: Por un punto P exterior a una recta r, se pueden trazar infinitas perpendiculares a r. Todas ellas están contenidas en un plano que pasa por P y es perpendicular a la recta r.



Hay que tener en cuenta que dos rectas perpendiculares no tienen que cortarse necesariamente. Basta que sus vectores sean ortogonales. Final del Test



Solución al Test: La respuesta es afirmativa. Hay infinitas rectas perpendiculares a s y que están contenidas en el plano, como se puede apreciar con el dibujo.



Final del Test

Índice alfabético