1 Matrices

Propuesta A

1. Un taller de aluminio fabrica tres modelos distintos de ventanas: A, B y C, en dos versiones distintas: grande y pequeña. El taller produce diariamente 100 ventanas grandes y 800 pequeñas de tipo A, 800 grandes y 600 pequeñas de tipo B, y 400 grandes y 600 pequeñas de tipo C. Cada ventana grande lleva 24 junquillos y 10 remaches, y cada ventana pequeña lleva 12 junquillos y 8 remaches, en cualquiera de los tres modelos.

a) Representa esta información en dos matrices.

b) Halla una matriz que represente la cantidad de junquillos y de remaches necesarios para la producción diaria de ventanas de dicha fábrica.

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$, realiza las siguientes operaciones:

AB, C^tA, $(BC-BA)^t$

3. Resuelve la ecuación matricial $AXB=C$, donde:

$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^n.

b) Calcula, si existe, A^{-1}.

c) Resuelve la siguiente ecuación matricial: $A^n+BX=I$.

5. Escribe una matriz cuadrada de orden 4 cuyas dos primeras filas sean $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$, de manera que:

a) $\text{rg}(A)=2$

b) $\text{rg}(A)=3$

c) $\text{rg}(A)=4$

Justifica la respuesta.

6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, determina los valores de m para los que existe A^{-1}.

Calcula A^{-1} para $m=0$.

7. Estudia según los valores de k el rango de la siguiente matriz:

$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & k & 5 & 2 \\ 3 & k-4 & k+9 & k \end{pmatrix}$

Propuesta B

1. Efectúa la siguiente operación con matrices: $3A - AB + C^t$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 4 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible, los siguientes productos: ABC , BCA y BAC

3. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $A^3 - 3A^2 + 3A$.

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Razona para qué valores de k la matriz $B^t A^t$ tiene inversa.

b) Resuelve la ecuación $(AB)^t X = I$ para $k = 0$, siendo I la matriz identidad.

5. Dados los siguientes vectores de $\mathbf{R}^4$:

$\vec{u} = (m,-1,0,1)$, $\vec{v} = (0,m,-1,1)$ y $\vec{w} = (1,0,-1,2)$,

calcula los valores de m para los que dichos vectores son linealmente independientes.

6. Obtén las matrices *A* y *B* que cumplen las siguientes condiciones:

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$
$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

7. Determina, razonadamente, la matriz $A^{20} - A^{10}$ sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Halla la matriz inversa de la siguiente matriz por el método de Gauss-Jordan y comprueba el resultado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluciones propuesta A

1. a) $\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} G & P \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 100 & 800 \\ 800 & 600 \\ 400 & 600 \end{pmatrix} \end{array}$ $\quad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} J & R \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 24 & 10 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $\begin{pmatrix} 100 & 800 \\ 800 & 600 \\ 400 & 600 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 & 10 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} J & R \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 12\,000 & 7400 \\ 26\,400 & 12\,800 \\ 16\,800 & 8800 \end{pmatrix} \end{array}$

2. $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 13 \\ 3 & 0 & -9 \\ 9 & -4 & -23 \end{pmatrix}$

$C^tA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 22 & -5 \end{pmatrix}$

$(BC - BA)^t = \left(\begin{pmatrix} 1 & -28 \\ 0 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -24 & 10 \\ 14 & -4 \end{pmatrix}\right)^t$

$= \begin{pmatrix} 25 & -14 \\ -38 & 21 \end{pmatrix}$

3. $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -23 & 4 & 16 \\ -18 & -4 & 13 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

4. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se demuestra por inducción:

$A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2(n+1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)

$A\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = I \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b = d = f = g = h = 0 \\ a = e = i = 1 \\ c = -2i = -2 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^n + BX = I \Rightarrow X = B^{-1}\left(I - A^n\right)$

$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2n \end{pmatrix}$

5. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 0 & 1 & -m+4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{F_3 \to mF_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 0 & 0 & -m^2+4m-3 \end{pmatrix}$

$-m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1, \ \ m = 3$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 3$, $\text{rg}(A) = 3 \Rightarrow A$ tiene inversa.

Si $m = 0$:

$AA^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} g = i = 0 = c;\ h = b = \dfrac{1}{3} \\ a = 1 \\ d = -4, e = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\dfrac{4}{3} & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & k & 5 & 2 \\ 3 & k-4 & k+9 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & k+2 & 2 & 2 \\ 0 & k+2 & k & k \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & k+2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 & k-2 \end{pmatrix}$

$k = 2 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ya que la tercera fila sería 0 y las dos primeras no serían proporcionales.

$k = -2 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ya que en este caso las filas segunda y tercera serían proporcionales y no lo serían la primera y la segunda.

$k \neq 2$ y $k \neq -2 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$

Soluciones propuesta B

1.

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 7 & -2 & 3 \\ 9 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 14 & -3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 4 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

2. $ABC = \begin{pmatrix} 9 & -20 \\ 36 & -8 \end{pmatrix}$

$BCA = \begin{pmatrix} -20 & -52 & 84 \\ -6 & 6 & -18 \\ -19 & -17 & 15 \end{pmatrix}$

BAC no se puede realizar, ya que BA tiene dimensión 3×3 y C tiene dimensión 2×2.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. a) $B^t A^t = \begin{pmatrix} 2k-1 & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$

Para que $B^t A^t$ tenga inversa es necesario que $\text{rg}(B^t A^t) = 2,$ para lo cual hace falta que sus filas no sean proporcionales; por tanto,

$$\frac{2k-1}{3} \neq \frac{k}{k+2} \Rightarrow 2k^2 - 2 \neq 0 \Rightarrow k \neq \pm 1$$

b) $(AB)^t X = I \Rightarrow X = \left(B^t A^t\right)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -1, \quad b = 0 \\ c = \dfrac{3}{2}, \quad d = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5. $\text{rg}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \text{rg}\begin{pmatrix} m & -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$

$$\begin{pmatrix} m & -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - m \cdot F_1]{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 0 & -1 & m & 1-2m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 + m \cdot F_2]{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & m & 1-2m \\ 0 & 0 & (m+1)(m-1) & (2m+1)(1-m) \end{pmatrix}$$

Por tanto, si $m = 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$.

Si $m \neq 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 \Rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes.

6.

$$\begin{cases} 3A + 2B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ 2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6A + 4B = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \\ 6A - 9B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -18 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 13B = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 13 & 26 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ A = \dfrac{1}{2}\left(3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ ...,$

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{20} - 2A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 20 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 20 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Aplicando el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 + 2F_3 \\ F_3 \to -F_3}]{F_1 \to F_1 + 2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 Determinantes

Propuesta A

1. Calcula los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x+a & x-a \\ x-a & x+a \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & a-1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ a & a-1 & 1 \end{vmatrix}$

2. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 4$, calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2k & 4c+2f & 3f+k \\ 2h & 4b+2e & 3e+h \\ 2g & 4a+2d & 3d+g \end{vmatrix}$.

3. Demuestra que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\beta & \operatorname{sen}\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(\beta-\gamma)+\operatorname{sen}(\gamma-\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$.

4. Expresa en forma de producto de factores primos de primer grado el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & d+e & de \\ 1 & e+c & ec \\ 1 & c+d & cd \end{vmatrix}$$

5. Obtén en función de *a*, *b* y *c* el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}$$

6. Utiliza determinantes para calcular, según los valores de *k,* el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & k & 5 & 2 \\ 3 & k-4 & k+9 & k \end{pmatrix}$$

7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, determina los valores de *m* para los cuales existe A^{-1}.

Calcula A^{-1} para $m=0$.

8. Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Propuesta B

1. Calcula los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x+a & x-a \\ x-a & x-a \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$

2. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$, sabiendo que $\begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -k \end{vmatrix} = 100$.

3. Calcula el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-\pi} & e^{\pi}+e^{-\pi} & e^{\pi}+e^{-\pi} \\ e^{-\pi} & e^{\pi}+e^{-\pi} & e^{\pi}+2e^{-\pi} \end{vmatrix}$.

4. a) Calcula los valores de k que anulan el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 3k+1 & k & k \\ 6k+2 & 2k+1 & 2k \\ 3k+1 & k & k+1 \end{vmatrix}$.

b) Halla los valores de k para los que la matriz $A(k) = \begin{pmatrix} 3k+1 & k & k \\ 6k+2 & 2k+1 & 2k \\ 3k+1 & k & k+1 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

Calcula, si es posible, la inversa de $A(0)$.

5. Utilizando las propiedades de los determinantes, calcula el valor de $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$.

6. Discute según el valor del parámetro m el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & m \\ m+2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. a) Encuentra los valores de k para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & -1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es invertible.

b) Para $k = 2$, halla la inversa de A y comprueba el resultado.

8. Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} x & 1 & 8 & 1 \\ 1 & x & 1 & 8 \\ 8 & 1 & x & 1 \\ 1 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

Soluciones propuesta A

1. a) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b) $\begin{vmatrix} x+a & x-a \\ x-a & x+a \end{vmatrix} = (x+a)^2 - (x-a)^2 = 4ax$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & a-1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ a & a-1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(1-a) = (1-a)^3$

2. $\begin{vmatrix} 2k & 4c+2f & 3f+k \\ 2h & 4b+2e & 3e+h \\ 2g & 4a+2d & 3d+g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2k & 4c & 3f \\ 2h & 4b & 3e \\ 2g & 4a & 3d \end{vmatrix} +$

$+\begin{vmatrix} 2k & 4c & k \\ 2h & 4b & h \\ 2g & 4a & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2k & 2f & 3f \\ 2h & 2e & 3e \\ 2g & 2d & 3d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2k & 2f & k \\ 2h & 2e & h \\ 2g & 2d & g \end{vmatrix} =$

$= 2\cdot 4\cdot 3\begin{vmatrix} k & c & f \\ h & b & e \\ g & a & d \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 24\begin{vmatrix} k & h & g \\ c & b & a \\ f & e & d \end{vmatrix} =$

$= -24\begin{vmatrix} g & h & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 24\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & k \\ d & e & f \end{vmatrix} = -24\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -96$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\beta & \operatorname{sen}\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\beta & \operatorname{sen}\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\gamma \\ \cos\alpha & \cos\gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix} =$

$= (\operatorname{sen}\beta\cos\gamma - \cos\beta\operatorname{sen}\gamma) -$

$-(\operatorname{sen}\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\operatorname{sen}\gamma) +$

$+(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta) =$

$= \operatorname{sen}(\beta-\gamma) - \operatorname{sen}(\alpha-\gamma) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) =$

$= \operatorname{sen}(\beta-\gamma) + \operatorname{sen}(\gamma-\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

4. $\begin{vmatrix} 1 & d+e & de \\ 1 & e+c & ec \\ 1 & c+d & cd \end{vmatrix} \xrightarrow[F_2-F_1]{F_3-F_1} \begin{vmatrix} 1 & d+e & de \\ 0 & c-d & e(c-d) \\ 0 & c-e & d(c-e) \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} c-d & e(c-d) \\ c-e & d(c-e) \end{vmatrix} = (c-d)(c-e)\begin{vmatrix} 1 & e \\ 1 & d \end{vmatrix} =$

$= (c-d)(c-e)(d-e)$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_4-F_1]{F_2-F_1,\ F_3-F_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{vmatrix} =$

$= -1\cdot\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = -abc$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & k & 5 & 2 \\ 3 & k-4 & k+9 & k \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & k+9 & k \end{vmatrix} = 0,$

$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ k & 5 & 2 \\ k-4 & k+9 & k \end{vmatrix} = -3k^2 + 12 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2,\ k \neq -2$

Si $k \notin \{-2,\ 2\} \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3$

Si $k \in \{-2,\ 2\} \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$

Si $m \notin \{1,\ 3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A$ tiene inversa.

Si $m = 0 \Rightarrow |A| = -3$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

8. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \to$

$\xrightarrow[C_2-C_1]{C_4-C_3,\ C_3-C_2} \begin{vmatrix} 1 & x-1 & x^2-x & x^3-x^2 \\ 3 & 2x-2 & x^2-1 & 2x^2-2x \\ 3 & x-1 & x-1 & x-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -(x-1)\begin{vmatrix} x-1 & x(x-1) & x^2(x-1) \\ 2(x-1) & (x+1)(x-1) & 2x(x-1) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -(x-1)^3\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 2 & x+1 & 2x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \to$

$\xrightarrow[C_2-C_1]{C_3-C_2} -(x-1)^3\begin{vmatrix} 1 & x-1 & x^2-x \\ 2 & x-1 & x-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -(x-1)^5\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^6 = 0 \Rightarrow x = 1$

Soluciones propuesta B

1. a) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}2\alpha$

b) $\begin{vmatrix} x+a & x-a \\ x-a & x-a \end{vmatrix} = -2a^2 + 2ax = 2a(x-a)$

c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = a^2b - a^2c - ab^2 + abc$

2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -k \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -k \end{vmatrix} = 100$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-\pi} & e^{\pi}+e^{-\pi} & e^{\pi}+e^{-\pi} \\ e^{-\pi} & e^{\pi}+e^{-\pi} & e^{\pi}+2e^{-\pi} \end{vmatrix} =$

$\overset{F_3-F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-\pi} & e^{\pi}+e^{-\pi} & e^{\pi}+e^{-\pi} \\ 0 & 0 & e^{-\pi} \end{vmatrix} =$

$= e^{-\pi}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\pi} & e^{\pi}+e^{-\pi} \end{vmatrix} =$

$= e^{-\pi}\left(e^{\pi}+e^{-\pi}-e^{-\pi}\right) =$

$= e^{-\pi}e^{\pi} = e^0 = 1$

4. a)
$\begin{vmatrix} 3k+1 & k & k \\ 6k+2 & 2k+1 & 2k \\ 3k+1 & k & k+1 \end{vmatrix} = (3k+1)\begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 2 & 2k+1 & 2k \\ 1 & k & k+1 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} (3k+1)\begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3k+1$

$|A| = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{1}{3}$

b) Existe $(A(k))^{-1}$ si $k \neq -\dfrac{1}{3}$.

$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A(0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

6. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & m \\ m+2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$\overset{\substack{C_1+C_3 \\ C_2+C_3 \\ C_4+C_3}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & m+2 \\ m+2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$

$= 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & m+2 \\ m+2 & -2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_1-C_2 \\ C_3-C_2}}{=} 3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & m+1 \\ m+4 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -3\begin{vmatrix} 4 & m+1 \\ m+4 & 1 \end{vmatrix} = 3m(m+5)$

Si $m \notin \{0, -5\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 4$

Si $m = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3$

Si $m = -5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -5 \\ -3 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3$

7. a) $|A| = \begin{vmatrix} k-1 & 1 & -1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ k & 0 & 2 \end{vmatrix} = (k-1)(3k-4)$

$|A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = \dfrac{4}{3} \end{cases}$. Existe A^{-1} si $k \notin \left\{1, \dfrac{4}{3}\right\}$

b) $k = 2 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} x & 1 & 8 & 1 \\ 1 & x & 1 & 8 \\ 8 & 1 & x & 1 \\ 1 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2+C_3+C_4}{=} (x+10)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & x & 1 & 8 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 8 & 1 & x \end{vmatrix}$

$= (x+10)(x-8)^2(x+6) = 0$

Soluciones: $x = -10$, $x = -6$, $x = 8$ (doble)

3 Sistemas de ecuaciones lineales

Propuesta A

1. Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -4 \\ x + y - z = -2 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

2. En una tienda de animales hay serpientes, lagartos y cacatúas. Entre todos los animales hay el doble de patas que de cabezas, y el número de alas es cuatro veces el número de lagartos. En un descuido se escapan los lagartos, y cada uno se come una cacatúa; no obstante, aunque todos los lagartos comen, sobreviven tres cacatúas. ¿Cuántos animales hay de cada especie? Plantéalo como un sistema matricial y resuélvelo, si es posible, por el método de la matriz inversa.

3. Comprueba si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son de Cramer y, en caso afirmativo, resuélvelos por este método.

a) $\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ x - y - z = 1 \\ -x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$

4. Discute en función del parámetro *k* la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} kx + y + z = 4k \\ x + (k+1)y + kz = k + 4 \\ x - y + z = k + 1 \end{cases}$$

5. El siguiente sistema de ecuaciones en cierto sentido no es lineal, pero aun así se puede resolver utilizando los métodos habituales, por ejemplo el de Gauss. ¿Para qué valores de *t* tiene solución?

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha + \cos\beta + \operatorname{tg}\gamma = 4t \\ \operatorname{sen}\alpha - \cos\beta - \operatorname{tg}\gamma = 0 \\ 2\operatorname{sen}\alpha - \cos\beta + \operatorname{tg}\gamma = 0 \end{cases}$$

6. Discute y resuelve, en función de los parámetros *a* y *b*, el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = b \\ x + y + z = 0 \\ 4x - 5y + az = 0 \end{cases}$$

7. Un hotel tiene habitaciones triples (3 camas), dobles (2 camas) y sencillas (1 cama). En total hay 11 habitaciones y 30 camas.

¿Cuántas habitaciones hay de cada tipo?

Propuesta B

1. Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x-2y-z=-5 \\ 2x+y+3z=10 \\ -3x+y-z=-1 \end{cases}$$

2. El sistema de ecuaciones representado por la siguiente ecuación matricial tiene un número infinito de soluciones. Halla el valor de *k*.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

3. Comprueba si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son de Cramer y, en caso afirmativo, resuélvelos por este método.

a) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x-2y-z=-1 \\ 3x+2y-4z=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y+2z=3 \\ 2x+y+2z=3 \\ 4x-3y+2x=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+3y-z=4 \\ x+3y+z=2 \\ x+2y+4z=0 \end{cases}$

4. Halla el valor de *a* para que el siguiente sistema de ecuaciones no tenga una solución única.

$$\begin{cases} 4x-y+2z=1 \\ 2x+3y=-6 \\ x-2y+az=\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

5. Halla todos los valores de *k* para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones tiene soluciones diferentes de la trivial, es decir, (0, 0, 0); y calcula en función de *k* el conjunto de soluciones.

$$\begin{cases} x-y+kz=0 \\ kx+2y-4z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

6. Discute y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$$

7. En un cine los titulares de carnet joven pagan 5,50 € por la entrada, los mayores de 65 años pagan 6,00 €, y el resto de espectadores, 7,50 €.

En una sesión se venden 500 entradas y se recaudan 3600 €.

Sabiendo que a esa sesión acudieron la mitad de jóvenes que de personas mayores de 65 años, ¿cuántos espectadores de cada tipo había?

Soluciones propuesta A

1.

$$\begin{cases} 3x-2y+z=-4 \\ x+y-z=-2 \\ 2x+3y=4 \end{cases} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{cases} x+y-z=-2 \\ 3x-2y+z=-4 \\ 2x+3y=4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-3F_1} \begin{cases} x+y-z=-2 \\ -5y+4z=2 \\ y+2z=8 \end{cases} \xrightarrow{F_2+5F_3} \begin{cases} x+y-z=-2 \\ 14z=42 \\ y+2z=8 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=-2-y+z=-1 \\ y=8-2z=2 \\ z=3 \end{cases}$$

2. Si x = n.º de serpientes, y = n.º de lagartos y z = n.º de cacatúas, el sistema es:

$$\begin{cases} 4y+2z=2(x+y+z) \\ 2z=4y \\ -y+z=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2y-z=0 \\ -y+z=3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Como } |A| = 1 \neq 0:$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Luego hay 3 serpientes, 3 lagartos y 6 cacatúas (al comienzo del problema; al final, solo quedan 3).

3. a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$. No es de Cramer.

b) La matriz es cuadrada y regular: $|A| = 13 \neq 0$

$$x = \frac{A_x}{13} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{13} = 3, \quad y = \frac{A_y}{13} = 1, \quad z = \frac{A_z}{13} = 1$$

4. $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & k \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $|A| = 2k^2+k-3 = 0 \Rightarrow k = \begin{cases} 1 \\ \frac{-3}{2} \end{cases}$

Si $k \neq 1$ y $k \neq -\frac{3}{2}$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$ S. C. D.

Si $k = 1$, S. C. I., porque:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

Si $k = \frac{-3}{2}$, S. I., porque $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$ y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & 1 & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

5. Se realiza el cambio de variable $x = \text{sen}\,\alpha$, $y = \cos\beta$, $z = \text{tg}\,\gamma$, y el sistema queda:

$$\begin{cases} x+y+z=4t \\ x-y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases},$$

cuya solución es $\begin{cases} x=2t \\ y=3t \\ z=-t \end{cases}$

Para que el sistema tenga solución al deshacer el cambio, debe ser:

$$\begin{cases} -1 \le \text{sen}\,\alpha \le 1 \\ -1 \le \cos\alpha \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le 2t \le 1 \\ -1 \le 3t \le 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3} \le t \le \frac{1}{3}$$

6.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & a \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & a \end{vmatrix} = a-4 = 0 \Rightarrow a = 4$$

Si $a \neq 4 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$ S. C. D. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (x,\ y,\ z) = \left(\frac{b(a+5)}{a-4},\ -b,\ \frac{-9b}{a-4} \right)$$

Si $a = 4$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -9b$$

$$\begin{cases} \text{Si } b \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{S. I.} \\ \text{Si } b = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2 \Rightarrow \text{S. C. I., } (x,y,z) = (-\lambda, 0, \lambda) \end{cases}$$

7. Si x = n.º de habitaciones triples, y = n.º de habitaciones dobles y z = n.º de habitaciones sencillas, el sistema es:

$\begin{cases} x+y+z=11 \\ 3x+2y+z=30 \end{cases}$, que es un sistema compatible indeterminado.

Sus soluciones son $(x,y,z) = (\lambda+8,\ -2\lambda+3,\ \lambda)$.

Dado que el hotel tiene habitaciones de los tres tipos, $x>0$, $y>0$ y $z>0$. De la segunda inecuación, $-2\lambda+3>0$, se deduce que $\lambda = 1$.

Luego la solución es $(x,y,z) = (9, 1, 1)$: hay 9 habitaciones triples, 1 doble y 1 sencilla.

Soluciones propuesta B

1. $\begin{cases} x-2y-z=-5 \\ 2x+y+3z=10 \\ -3x+y-z=-1 \end{cases} \xrightarrow[F_3+3F_1]{F_2-2F_1} \begin{cases} x-2y-z=-5 \\ 5y+5z=20 \\ -5y-4z=-16 \end{cases} \rightarrow$

$\xrightarrow{F_3+F_2} \begin{cases} x-2y-z=-5 \\ 5y+5z=20 \\ z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-5+2y+z=-1 \\ y=4-z=0 \\ z=4 \end{cases}$

2. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0;\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2$

Para que sea S. C. I. debe ser $\text{rg}(A^*)=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5k-25=0 \Rightarrow k=5$

3. a) Es de Cramer: la matriz de coeficientes es cuadrada y regular, $|A|=19\neq 0$.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{19}=\frac{38}{19}=2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix}}{19}=\frac{19}{19}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{19}=\frac{19}{19}=1$$

b) No es de Cramer: la matriz de coeficientes no es regular, $|A|=0$.

c) No es de Cramer: la matriz de coeficientes no es cuadrada (es 4×3).

4. Para que sea S. C. I. debe cumplirse que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)<$ n.º de incógnitas $=3$, es decir,

$|A|=0$ y $\text{rg}(A^*)=2$.

$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = 14a-14=0 \Rightarrow a=1$

$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & \frac{7}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$. Luego $a=1$

5. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2-k+2=0 \Rightarrow k=\begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Si $k\neq 1$ y $k\neq -2 \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ S. C. D. Al ser homogéneo, $(x,y,z)=(0,0,0)$.

Si $k=1$, coinciden la primera y tercera ecuaciones, luego es S. C. I.:

$\begin{cases} x-y=-z \\ x+2y=4z \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=\left(\frac{2\lambda}{3},\frac{5\lambda}{3},\lambda\right)$

Si $k=-2$, la segunda ecuación es -2 veces la primera, luego es S. C. I.:

$\begin{cases} x-y=2z \\ x-y=-z \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(\lambda,\lambda,0)$

6. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3-3a+2=0 \Rightarrow a=\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

Si $a\neq 1$ y $a\neq 2 \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=$ n.º de incógnitas $=3 \Rightarrow$ S. C. D.

$(x,y,z)=\left(\frac{-a}{a+2},\frac{-a}{a+2},\frac{a^2+2a+2}{a+2}\right)$

Si $a=1$, las tres ecuaciones coinciden:

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(1-\lambda-\mu,\ \lambda,\ \mu)$

Si $a=2$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2,$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 10\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=3 \Rightarrow$ S. I.

7. Si x = n.º de jóvenes, y = n.º de mayores de 65 años y z = n.º de espectadores que no son de los anteriores, el sistema es:

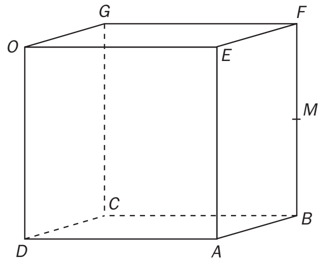
$\begin{cases} x+y+z=500 \\ 5{,}5x+6y+7{,}5z=3600 \\ y=2x \end{cases} \xrightarrow[2F_2]{\text{Sust. } F_3 \text{ en } F_1 \text{ y } F_2}$

$\begin{cases} 3x+z=500 \\ 35x+15z=7200 \end{cases} \xrightarrow{15F_1-F_2} 10x=300 \rightarrow x=30$

La solución es $(x,\ y,\ z)=(30,\ 60,\ 410)$, es decir, había 30 jóvenes, 60 mayores de 65 años y 410 espectadores distintos de los anteriores.

4 Vectores en el espacio

Propuesta A



1. En el cubo de la figura, *M* es el punto medio de *BF*. Expresa los vectores $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{FO}$ y $\overrightarrow{DM}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{g}=\overrightarrow{OG}$, $\vec{d}=\overrightarrow{OD}$ y $\vec{e}=\overrightarrow{OE}$.

2. Calcula el valor de *k* para que el vector $\vec{a}=(7,-6,2)$ sea combinación lineal de los vectores $\vec{b}=(1,0,5)$ y $\vec{c}=(2,-2,k)$.

3. Dados los vectores $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ y $\vec{v}=6\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, calcula:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

b) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) El seno del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) La medida del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

e) La proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

4. Determina el valor del parámetro λ para que los vectores $\vec{u}=\lambda\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ y $\vec{v}=-\vec{i}+\lambda\vec{j}+\vec{k}$ sean:

a) Ortogonales. b) Paralelos.

5. Halla un vector unitario que sea ortogonal a los vectores $\vec{u}=(4,6,-1)$ y $\vec{v}=(2,3,-2)$.

6. Demuestra vectorialmente que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

7. Sean $\vec{u}=\vec{u}_1+2\vec{u}_2-\vec{u}_3$; $\vec{v}=2\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3$; $\vec{w}=5\vec{u}_1-5\vec{u}_2-5\vec{u}_3$. Estudia las soluciones de las ecuaciones vectoriales:

a) $\vec{u}\times\vec{x}=\vec{v}$ c) $\vec{v}\,x=\vec{u}$

b) $\vec{u}\times\vec{x}=\vec{w}$ d) $\vec{v}\times\vec{u}=x\vec{w}$

8. Si $\vec{u}=(3,0,-1)$, $\vec{v}=(-5,2,3)$, $\vec{w}=(2,-1,1)$, comprueba que $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$.

9. Se consideran los vectores de coordenadas $\vec{u}=(-1,1,1)$ y $\vec{v}=(4,2,x)$.

a) Calcula el valor de *x* que hace que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Para el valor de *x* calculado en el apartado anterior, expresa el vector $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{u}$ como producto de un número real por el vector $\vec{v}$.

10. Determina todos los posibles valores del parámetro *k* que hacen que el triángulo de vértices $A(3,4,-1)$, $B(1,0,3)$ y $C(k,5,-2)$ sea rectángulo.

Propuesta B

1. Un minero hace un recorrido por una mina bajo una llanura: baja 10 m en ascensor, camina 20 m hacia el norte por una galería, 15 m hacia el oeste, 5 m hacia el sur, sube 5 m en ascensor y camina 10 m hacia el noreste. En ese momento se produce un derrumbe, y el minero queda atrapado. Logra comunicar su posición a sus compañeros en la superficie y, tras analizar la situación, estos deciden cavar un pozo vertical para rescatarlo.

a) ¿En qué posición de la superficie (relativa a la bocamina) deben perforar?

b) ¿A qué profundidad se encuentra el minero atrapado?

c) ¿Cuál es la distancia en línea recta entre el minero y la bocamina?

2. El vector $\vec{a}=(-3,-1,2)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{b}=(1,5,-4)$ y $\vec{c}=(k,-2,3)$. ¿Cuál es el valor de *k*?

3. Dados los vectores $\vec{u}=-2\vec{i}+\vec{j}$ y $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, calcula:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

b) El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) La medida del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

e) La proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

4. Sean $\vec{u}=-\vec{u}_1+2\vec{u}_2+\vec{u}_3$; $\vec{v}=2\vec{u}_1-\vec{u}_2+3\vec{u}_3$; $\vec{w}=2\vec{u}_1+2\vec{u}_2+8\vec{u}_3$. Estudia las soluciones de las ecuaciones vectoriales:

a) $\vec{u}\,x=\vec{v}$ b) $\vec{u}\cdot\vec{x}=\vec{w}$ c) $(\vec{u}+\vec{v})\,x=\vec{w}$ d) $\vec{v}\cdot\vec{x}=1$

5. Se llaman cosenos directores de un vector $\vec{u}$ a los cosenos de los ángulos que determina el vector $\vec{u}$ con cada uno de los vectores de la base. Halla los cosenos directores del vector $\vec{u}=(2,\ 2,\ 1)$.

6. Demuestra la igualdad vectorial $|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=2|\vec{u}|^2+2|\vec{v}|^2$.

7. Simplifica la expresión $(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})\times(\vec{u}-\vec{v}-\vec{w})$, sabiendo que el vector $\vec{w}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

8. Sean los vectores $\vec{u}=(1,\ 0,\ 1)$, $\vec{v}=(0,\ 1,\ 1)$ y $\vec{w}=(1,\ 1,\ 0)$. Demuestra que los sistemas de vectores siguientes son linealmente independientes:

a) $\{\vec{u}\times\vec{v},\ \vec{v},\ \vec{w}\}$ b) $\{\vec{u}\times\vec{v},\ \vec{v}\times\vec{w},\ \vec{w}\}$

9. Se considera el vector de coordenadas $\vec{u}=(-1,\ 1,\ 1)$.

a) Halla, con la ayuda de los parámetros necesarios, la expresión de todos los vectores ortogonales a $\vec{u}$.

b) Escribe el vector $\vec{a}=(-3,\ 0,\ 3)$ como suma de dos vectores, uno de ellos paralelo a $\vec{u}$ y el otro ortogonal a $\vec{u}$.

10. Se consideran los vectores $\vec{a}=2\vec{i}+x\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+x\vec{j}$ y $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+x\vec{k}$.

a) Calcula los posibles valores de *x* que hacen que el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores sea igual a 10.

b) Estudia si existe algún valor de *x* que haga que los tres vectores sean coplanarios.

Soluciones propuesta A

1. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OD}=\vec g-\vec d$

$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OE}=-\vec g+\vec e$

$\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EO}=-\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OE}=-g-\vec e$

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FM}=$

$=-\vec d+\vec g+\vec e+\frac{1}{2}\vec d=-\frac{1}{2}\vec d+\vec g+\vec e$

2. $\vec a=\alpha\vec b+\beta\vec c\Rightarrow\begin{cases}7=\alpha+2\beta\\-6=-2\beta\\2=5\alpha+k\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=3\\k=-1\end{cases}$

3. a) $|\vec u|=+\sqrt{\vec u\cdot\vec u}=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$

$|\vec v|=+\sqrt{\vec v\cdot\vec v}=\sqrt{6^2+(-2)^2+(3)^2}=7$

b) $\vec u\times\vec v=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\1&2&-2\\6&-2&3\end{vmatrix}=(2,-15,-14)$

c) $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{|\vec u\times\vec v|}{|\vec u||\vec v|}=\dfrac{\sqrt{4+225+196}}{3\cdot 7}=\dfrac{\sqrt{425}}{21}$

d) $\alpha=\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{425}}{21}\right)=79^\circ\ 1'\ 9{,}93''$

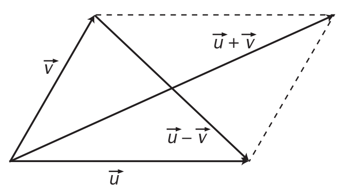
e) $|\vec v\,'|=\dfrac{|\vec u\cdot\vec v|}{|\vec u|}=\dfrac{|-4|}{3}=\dfrac{4}{3}$

4. a) $\vec u\cdot\vec v=0\Rightarrow-\lambda-2\lambda+3=0\Rightarrow\lambda=1$

b) $\dfrac{\lambda}{-1}=\dfrac{-2}{\lambda}=\dfrac{3}{1}\Rightarrow\begin{cases}\lambda^2=2\\3\lambda=-2\end{cases}$. Incompatible, $\nexists\lambda$

5. $\vec x=\pm\dfrac{\vec u\times\vec v}{|\vec u\times\vec v|}=\pm\dfrac{(-9,\ 6,\ 0)}{\sqrt{81+36}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{13}}(-3,\ 2,\ 0)$

6.



Las diagonales están representadas por los vectores $\vec u+\vec v$ y $\vec u-\vec v$. Se halla su producto escalar, teniendo en cuenta que $|\vec u|=|\vec v|$:

$(\vec u+\vec v)\cdot(\vec u-\vec v)=|\vec u|^2-\vec u\cdot\vec v+\vec v\cdot\vec u-|\vec v|^2=0$, por tanto, son ortogonales.

7. a) $\vec u\times\vec x$ es ortogonal a $\vec u$, y como $\vec u\cdot\vec v=3\neq0$, no puede existir ningún vector $\vec x$ que verifique la igualdad.

b) Como $\vec u\cdot\vec w=0$, puede haber vectores $\vec x=(x,\ y,\ z)$ que verifiquen la igualdad $\vec u\times\vec x=\vec w$. Se resuelve la ecuación vectorial:

$\vec u\times\vec x=(2z+y,-x-z,y-2x)=(5,-5,-5)$

El sistema que se obtiene es compatible indeterminado con solución:

$(x,y,z)=(5-\lambda,\ 5-2\lambda,\ \lambda),\ \lambda\in\mathbf{R}$

c) No tiene solución, porque $\vec v\,x$ es un vector con la dirección de $\vec v$, y $\vec u$ no tiene la misma dirección que $\vec v$.

d) $\vec v\times\vec u=(-3,3,3)=-\frac{3}{5}(5,-5,-5)\Rightarrow x=-\frac{3}{5}$.

8. $(\vec v\times\vec w)=(5,\ 11,\ 1),\quad \vec u\times(\vec v\times\vec w)=(11,\ -8,\ 33)$

$(\vec u\cdot\vec w)\vec v=5\vec v=(-25,\ 10,\ 15)$

$(\vec u\cdot\vec v)\vec w=-18\vec w=(-36,\ 18,\ -18)$

$(\vec u\cdot\vec w)\vec v-(\vec u\cdot\vec v)\vec w=(11,\ -8,\ 33)$

9. a) $\vec u\cdot\vec v=0\Rightarrow-4+2+x=0\Rightarrow x=2$

b) $\vec u\times\vec v=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\-1&1&1\\4&2&2\end{vmatrix}=(0,6,-6)$

$(\vec u\times\vec v)\times\vec u=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\0&6&-6\\-1&1&1\end{vmatrix}=(12,\ 6,\ 6)=3\vec v$

10. a) Si es rectángulo en *A*, entonces $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{AB}=(-2,-4,\ 4);\ \overrightarrow{AC}=(k-3,\ 1,-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow-2(k-3)-4-4=0\Rightarrow k=-1$

b) Si es rectángulo en *B*, entonces $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{BA}=(2,\ 4,-4);\ \overrightarrow{BC}=(k-1,\ 5,-5)\Rightarrow$

$\Rightarrow 2(k-1)+20+20=0\Rightarrow k=-19$

c) Si es rectángulo en *C*, entonces $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

$\overrightarrow{CA}=(3-k,-1,\ 1);\ \overrightarrow{CB}=(1-k,-5,\ 5)\Rightarrow$

$\Rightarrow(3-k)(1-k)+5+5=0\Rightarrow k^2-4k+13=0$,

que no tiene solución real.

Soluciones propuesta B

1. Se denota el norte por $\vec{i}$, el este por $\vec{j}$ y arriba por $\vec{k}$. Entonces el vector de posición del minero es:

$$\vec{p} = -10\vec{k} + 20\vec{i} - 15\vec{j} - 5\vec{i} + 5\vec{k} + 5\sqrt{2}\vec{i} + 5\sqrt{2}\vec{j} =$$
$$= \left(15 + 5\sqrt{2}\right)\vec{i} + \left(-15 + 5\sqrt{2}\right)\vec{j} - 5\vec{k}\ .$$

a) Aprox. 22,07 m al norte y 7,93 m al oeste.

b) A 5 m de profundidad.

c) $\left|\vec{p}\right| = +\sqrt{\vec{p}\cdot\vec{p}} = 5\sqrt{23} \approx 23{,}98$ m.

2. $$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} -3 = \alpha + k\beta \\ -1 = 5\alpha - 2\beta \\ 2 = -4\alpha + 3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{7} \\ \beta = \dfrac{6}{7} \\ k = -\dfrac{11}{3} \end{cases}$$

3. a) $\left|\vec{u}\right| = +\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

$\left|\vec{v}\right| = +\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{11}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 + 1 + 0 = 3$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|} = \dfrac{3}{\sqrt{5}\sqrt{11}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\dfrac{3}{\sqrt{55}}\right) = 66^{\circ}\ 8'\ 20''$

d) $\left|\vec{u}\,'\right| = \dfrac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$

e) $\left|\vec{v}\,'\right| = \dfrac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

4. a) No tiene solución, porque $\vec{u}\,x$ es un vector con la dirección de $\vec{u}$, y $\vec{v}$ no tiene la misma dirección que $\vec{u}$.

b) $\vec{u}\cdot\vec{x} = \vec{w}$ no tiene sentido, porque $\vec{u}\cdot\vec{x}$ es un número real y no puede ser igual a un vector.

c) $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)x = \vec{w} \Rightarrow \left[(-1,2,1) + (2,-1,3)\right]x = (2,2,8) \Rightarrow$
$\Rightarrow (1,1,4)x = (2,2,8) \Rightarrow x = 2$

d) $\vec{v}\cdot\vec{x} = 1 \Rightarrow (2,-1,3)\cdot(x,y,z) = 1 \Rightarrow 2x - y + 3z = 1$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones que pueden expresarse de la siguiente forma:

$\vec{x} = (\lambda,\ -1 + 2\lambda + 3\mu,\ \mu),\quad \lambda, \pi \in \mathbf{R}$

5. Los vectores de la base son:
$\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{i}\right|} = \frac{2 + 0 + 0}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{j}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{j}\right|} = \frac{2}{3},\quad \cos\gamma = \frac{\vec{u}\cdot\vec{k}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{k}\right|} = \frac{1}{3}$$

6. $\left|\vec{u} + \vec{v}\right|^2 + \left|\vec{u} - \vec{v}\right|^2 = \left(\vec{u} + \vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \left(\vec{u} - \vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u} - \vec{v}\right) =$

$= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) =$

$= \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 + \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 = 2\left|\vec{u}\right|^2 + 2\left|\vec{v}\right|^2$

7. $\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\right)\times\left(\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}\right) =$

$= \vec{0} - \vec{u}\times\vec{v} - \vec{u}\times\vec{w} + \vec{v}\times\vec{u} - \vec{0} - \vec{v}\times\vec{w} + \vec{w}\times\vec{u} - \vec{w}\times\vec{v} - \vec{0} =$

$= -2(\vec{u}\times\vec{v}) - 2(\vec{u}\times\vec{w}) = -2\left(\vec{u}\times\left(\vec{v} + \vec{w}\right)\right)$

Si $\vec{w} = \lambda\vec{u} + (\mu - 1)\vec{v} \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, y resulta:

$-2\left(\vec{u}\times\left(\vec{v} + \vec{w}\right)\right) = -2\left(\vec{u}\times\left(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\right)\right) = -2\mu\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)$

8. $$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,1),\quad \vec{v}\times\vec{w} = (-1,1,-1)$$

a) $$\det\left(\vec{u}\times\vec{v},\ \vec{v},\ \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

b) $$\det\left(\vec{u}\times\vec{v},\ \vec{v}\times\vec{w},\ \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

9. a) $\vec{u}\cdot\vec{x} = 0 \Leftrightarrow (-1,1,1)\cdot(x,\ y,\ z) = 0 \Rightarrow -x + y + z = 0$

El conjunto es: $\left\{\vec{x} = (\lambda + \mu, \lambda, \mu),\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}\right\}$.

b) $\vec{a} = k\vec{u} + \vec{x} \Rightarrow (-3,0,3) = (-k,\ k,\ k) + (\lambda + \mu,\ \lambda,\ \mu)$

$$\begin{cases} -3 = -k + \lambda + \mu \\ 0 = k + \lambda \\ 3 = k + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ \lambda = -2 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

$\vec{a} = (-2,\ 2,\ 2) + (-1,-2,\ 1)$

10. a) El volumen del paralelepípedo es:

$$V = \left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right| = \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = x^2 - 3x + 6 = 10 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 4$

b) Si fueran coplanarios, $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$, que no tiene soluciones reales. Luego no existe ningún valor de x que cumpla esta condición.

5 Planos y rectas en el espacio

Propuesta A

1. En cada uno de los siguientes casos calcula las coordenadas del vector libre, sabiendo que uno de sus representantes fijos tiene como origen el punto *A* y por extremo el punto *B*.

a) $A(2, 3, -1)$ y $B(4, 5, 2)$ b) $A(-1, 2, 0)$ y $B(4, -3, -2)$

2. Calcula las coordenadas del punto medio del segmento que tiene por extremos $A(2, 3, -2)$ y $B(-4, 3, -2)$.

3. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta *r* que cumple:

a) Pasa por el punto $A(-1, 3, -2)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (-3, -2, 4)$.

b) Pasa por los puntos $A(-1, 2, 4)$ y $B(-3, 4, -7)$.

c) Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y su dirección es perpendicular a la de los vectores $\vec{u} = (-1, 2, -3)$ y $\vec{v} = (0, -2, 5)$.

4. Dado el segmento de extremos $A(1, 2, -3)$ y $B(-4, 12, 2)$, calcula las coordenadas de un punto interior a dicho segmento de manera que la distancia que lo separa de *A* sea $\frac{2}{5}$ de la longitud del segmento *AB*.

5. Se considera la recta de ecuación implícita $r: \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$. Determina:

a) Un punto y el vector director. b) La ecuación en forma paramétrica. c) La ecuación en forma continua.

6. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por el punto $A(4, 0, -1)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (0, -2, 3)$ y $\vec{v} = (5, -1, 2)$.

b) Pasa por los puntos $A(3, -2, 1)$, $B(0, 0, -2)$ y $C(1, 1, 1)$.

c) Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y contiene a la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{x+3}{-1}$.

7. Decide en cada uno de los siguientes casos si los puntos *A*, *B* y *C* están alineados o forman un triángulo:

a) $A(1, 3, -1)$, $B(-1, 4, -3)$ y $C(3, 2, 1)$ b) $A(1, 2, -2)$, $B(2, 0, 1)$ y $C(0, 4, -4)$

8. Calcula la ecuación del plano simétrico de $\pi: x - 11y + 2z + 3 = 0$ respecto de $P(-2, 1, 0)$.

9. Calcula *m* para que $A(-1, m - 1, 0)$, $B(0, m + 2, 1)$ y $C(1, 5, 2)$ pertenezcan a una recta. ¿Cuál es su ecuación?

10. Tres aristas concurrentes en el vértice $A(2, 0, 0)$ de un paralelepípedo son *AB*, *AC* y *AD*. Sabiendo que $B(5, 0, 1)$, $C(3, 1, -3)$ y $D(1, 10, 3)$, determina:

a) Los otros cuatro vértices. b) El volumen del paralelepípedo. c) Comprueba que es un ortoedro.

11. Estudia la posición relativa de los planos:

$\pi_1: ax - y + z = 0$
$\pi_2: x + ay = 0$
$\pi_3: 2x + az = 0$

Propuesta B

1. a) Del vector $\overrightarrow{PQ} = (5, 3, -1)$ se sabe que $P(-1, 2, 3)$. Calcula las coordenadas del extremo Q.

b) Del vector $\overrightarrow{RS} = (-1, 3, -2)$ se sabe que $S(-2, 8, -1)$. Calcula las coordenadas del origen R.

2. El punto $M(-6, 5, 1)$ es el punto medio del segmento AB. Halla el punto A si el punto B es $(10, -7, 0)$.

3. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta r que cumple:

a) Pasa por el punto $A(6, -1, -2)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (3, 1, 0)$.

b) Pasa por los puntos $A(5, 2, -1)$ y $B(5, 4, -1)$.

c) Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y es paralela a la recta $s: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-5}{1}$.

4. Dado el segmento de extremos $A(-3, 4, 4)$ y $B(1, 12, 0)$, calcula las coordenadas de tres puntos P, Q y R que dividan al segmento en cuatro partes iguales.

5. Se define la recta r como intersección de los planos $\pi: 2x - 3y + z = 3$ y $\sigma: x - z = 6$. Determina de r:

a) Un punto y el vector director. b) La ecuación en forma paramétrica. c) La ecuación en forma continua.

6. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por el punto $A(1, 2, -2)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (-1, -2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

b) Pasa por los puntos $A(-1, 2, -1)$, $B(-1, 0, 3)$ y $C(-1, 2, 3)$.

c) Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y uno de sus vectores normales es $\vec{n} = (1, -2, -3)$.

7. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-1, 1, 2)$ y contiene a la recta $r: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{-1} = z$.

8. a) Calcula las coordenadas del punto simétrico de $A(2, 1, 3)$ respecto de $P(-2, 1, 0)$.

b) Halla la ecuación en forma paramétrica de la recta simétrica de $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = -2 - t \end{cases}$ respecto de $P(-2, 1, 0)$.

9. Un cubo tiene un vértice en el punto $A(1, 1, 1)$ y el centro en el punto $C(2, 2, 2)$.

¿Cuál es su volumen?

10. Estudia la posición relativa de los planos:

$\pi_1: 3x - y + 2z = 1$

$\pi_2: x + 4y + z = b$

$\pi_3: 2x - 5y + az = -2$

Soluciones propuesta A

1. a) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (4,\ 5,\ 2) - (2,\ 3, -1) = (2,\ 2,\ 3)$

b) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (4, -3, -2) - (-1,\ 2,\ 0) = (5, -5, -2)$

2. $M\left(\frac{1}{2}(2-4),\ \frac{1}{2}(3+3),\ \frac{1}{2}(-2-2)\right) = M(-1,\ 3, -2)$

3. a) $\begin{cases} x = -1-3t \\ y = 3-2t \\ z = -2+4t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{4}$

b) Un vector director es $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-2,\ 2, -11)$.

$\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 2+2t \\ z = 4-11t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{-11}$

c) Un vector director es $\vec{u} \times \vec{v} = (4,\ 5,\ 2)$.

$\begin{cases} x = -3+4t \\ y = 4+5t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+3}{4} = \frac{y-4}{5} = \frac{z}{2}$

4. $\vec{p} = \vec{a} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{2}{5}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{p} = \frac{3}{5}(1,\ 2, -3) + \frac{2}{5}(-4,\ 12,\ 2) \Rightarrow P(-1,\ 6, -1)$

5. a) $A(0,1,3)$, $\vec{u} = (1,2,-1) \times (1,1,1) = (3,-2,-1)$

b) $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$

c) $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$

6. a) $\begin{cases} x = 4+5\mu \\ y = -2\lambda-\mu \\ z = -1+3\lambda+2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 5 & x-4 \\ -2 & -1 & y \\ 3 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 15y + 10z + 14 = 0$

b) $\pi : \left(B;\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC}\right)$, donde $\overrightarrow{BA} = (3, -2,\ 3)$ y $\overrightarrow{BC} = (1,\ 1,\ 3)$

$\begin{cases} x = 3\lambda+\mu \\ y = -2\lambda+\mu \\ z = -2+3\lambda+3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ -2 & 1 & y \\ 3 & 3 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -9x - 6y + 5z + 10 = 0$

c) $\vec{u} = (2,0,-1)$, $B(0,\ 1, -3) \in r$, $\overrightarrow{AB} = (3, -3, -3)$

$\pi\left(A;\ \vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) : \begin{cases} x = -3+2\lambda+3\mu \\ y = 4-3\mu \\ z = -\lambda-3\mu \end{cases}$

$\pi : x - y + 2z + 7 = 0$

7. a) $\overrightarrow{AB} = (-2,\ 1, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (2, -1,\ 2)$

Como tienen igual dirección, los tres puntos están alineados.

b) $\overrightarrow{AB} = (1, -2,\ 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,\ 2, -2)$

Como tienen distinta dirección, los tres puntos no están alineados y forman un triángulo.

8. El plano simétrico será paralelo al plano dado y pasará por un punto simétrico de un punto cualquiera del plano dado, por ejemplo: $A(1,\ 0, -2) \in \pi$

$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+0}{2}, \frac{z-2}{2}\right) = (-2,\ 1,\ 0) \Rightarrow A'(-5,\ 2,\ 2)$

$\pi' : x - 11y + 2z + D = 0 \Rightarrow -5 - 22 + 4 + D = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D = 23 \Rightarrow \pi' : x - 11y + 2z + 23 = 0$

9. $\overrightarrow{AB} = (1,\ 3,\ 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2,\ 6-m,\ 2)$. Para que los tres puntos estén alineados:

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6-m} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 0$

10. a) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CE} \Rightarrow (3,\ 0,\ 1) = (x-3,\ y-1,\ z+3) \Rightarrow$

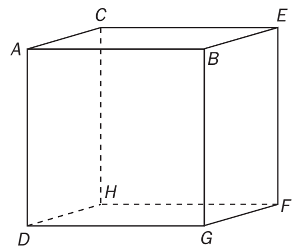
$\Rightarrow E(6,\ 1, -2)$

Análogamente se obtienen:

$G(4,\ 10,\ 4)$

$F(5,\ 11,\ 1)$

$H(2,\ 11,\ 0)$



b) $V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 10 & 3 \end{vmatrix} = 110\ \text{u}^3$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0,\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

11. $\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2-1)$

Si **a** = 0, $\pi_2 \equiv \pi_3$ y π_1 los corta.

Si **a** = ±1, tienen una recta en común y no son paralelos ni coincidentes entre sí.

Si $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, tienen un punto en común que es el origen de coordenadas.

Soluciones propuesta B

1. a) $\vec{q} = \vec{p} + \overrightarrow{PQ} = (-1,\ 2,\ 3) + (5,\ 3, -1) =$

$= (4,\ 5,\ 2) \Rightarrow Q(4,\ 5,\ 2)$

b) $\vec{r} = \vec{s} - \overrightarrow{RS} = (-2,\ 8,\ -1) - (-1,\ 3, -2) =$

$= (-1,\ 5,\ 1) \Rightarrow R(-1,\ 5,\ 1)$

2. $\begin{cases} x_M = -6 = \dfrac{x_A + 10}{2} \\ y_M = 5 = \dfrac{y_A - 7}{2} \\ z_M = 1 = \dfrac{z_A + 0}{2} \end{cases} \Rightarrow A(-22,\ 17,\ 2)$

3. a) $\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{0}$

b) Un vector director es $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0,\ 2,\ 0)$.

$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{0}$

c) Un vector director es $\vec{u} = (2, -3,\ 1)$.

$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-4}{-3} = \dfrac{z}{1}$

4. $\vec{p} = \vec{a} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \dfrac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = \dfrac{3}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{b} \Rightarrow$

$\vec{p} = \dfrac{3}{4}(-3,\ 4,\ 4) + \dfrac{1}{4}(1,\ 12,\ 0) = (-2,\ 6,\ 3)$

$\vec{q} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b} = (-1,\ 8,\ 2)$

$\vec{r} = \dfrac{1}{4}\vec{a} + \dfrac{3}{4}\vec{b} = (0,\ 10,\ 1)$

Por tanto: $P(-2, 6, 3)$, $Q(-1, 8, 2)$, $R(0, 10, 1)$

5. a) $A(0, -3, -6)$, $\vec{u} = (2, -3, 1) \times (1, 0, -1) \sim (3, 3, 3)$

b) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = -6 + \lambda \end{cases}$

c) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z+6}{1}$

6. a) $\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = 2 - 2\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ -2 & 1 & y-2 \\ 0 & 2 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x - 2y + 3z + 6 = 0$

b) $\pi : \left(A;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, donde $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0, -2,\ 4)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,\ 0,\ 4)$

$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = -1 + 4\lambda + 4\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & x+1 \\ -2 & 0 & y-2 \\ 4 & 4 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$

c) El plano pedido es de la forma: $x - 2y - 3z + D = 0$, y como debe pasar por A, $-11 + D = 0 \Rightarrow D = 11 \Rightarrow x - 2y - 3z + 11 = 0$

7. La recta r pasa por $A(1, 2, 0)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (2,\ 1,\ -1)$. El plano pedido es el determinado por $\pi : \left(A;\ \vec{u},\ \overrightarrow{AP}\right)$.

$\begin{vmatrix} 2 & -2 & x-1 \\ 1 & -1 & y-2 \\ -1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y + 3 = 0$

8. a) $\left(\dfrac{x+2}{2}, \dfrac{y+1}{2}, \dfrac{z+3}{2}\right) = (-2, 1,\ 0) \Rightarrow A'(-6,\ 1, -3)$

b) La recta será paralela a r y pasará por el punto simétrico de $B(1, 0, -2)$.

$\left(\dfrac{x+1}{2}, \dfrac{y}{2}, \dfrac{z-2}{2}\right) = (-2, 1,\ 0) \Rightarrow B'(-5,\ 2,\ \ 2)$

$r' : \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 2 \\ z = 2 - t \end{cases}$

9. Se traslada el cubo según el vector $(-1,\ -1,\ -1)$, de modo que su vértice es ahora $A'(0, 0, 0)$ y su centro es $C'(1, 1, 1)$, mientras que su volumen no ha variado.

Hay infinitos cubos con vértice A' y centro C', pero todos tienen el mismo volumen. Se toma, por tanto, el cubo con las caras paralelas a los planos coordenados. Tres aristas del cubo quedan sobre los ejes coordenados.

La proyección del centro $C'(1, 1, 1)$ sobre cada uno de los ejes da los puntos (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), que son los puntos medios de las aristas del cubo. Por tanto, los puntos (2, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 2) son vértices del cubo, luego la arista del cubo mide 2 unidades.

El volumen del cubo es $V = 2^3 = 8\ u^3$.

10. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 13(a-1)$ $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 13(b-3)$

Si $a \neq 1$, los tres planos se cortan en un punto.

Si $a = 1$ y $b \neq 3$, los planos se cortan dos a dos determinando tres rectas paralelas.

Si $a = 1$ y $b = 3$, tienen una recta en común.

6 Propiedades métricas

Propuesta A

1. Dadas las rectas $r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{-1}$ y $s: \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$, determina:

a) Un punto y el vector director de cada una.

b) El ángulo que forman.

c) El punto de corte de cada una de las rectas con el plano *XY*.

d) La distancia entre las dos rectas.

2. Sean el plano $\pi: x-y+z+4=0$ y la recta $r: (2-t,\ 3t,\ -1+2t)$. Determina:

a) Su posición relativa.

b) El ángulo que forma la recta con el plano.

c) La ecuación de la recta r' que se obtiene al proyectar ortogonalmente la recta sobre el plano.

d) El ángulo que forma la recta *r* con su proyección r'.

e) La ecuación de otra recta *s* que corta perpendicularmente a *r* y está contenida en el plano π.

3. Los puntos $A(0, 0, 3)$, $B(2, -3, 0)$, $C(-5, 2, 1)$ y $D(0, 7, -2)$ son los vértices de un tetraedro, calcula:

a) La longitud de las aristas *AB* y *CD*.

b) El área de la cara *BCD*.

c) La altura del tetraedro sobre la cara *BCD*.

d) La medida del diedro que determinan las caras *ABC* y *ABD*.

e) El volumen del tetraedro.

4. Se considera la recta $r: \begin{cases} x-2y=1 \\ 3y+z=-2 \end{cases}$ y el punto $P(4, 4, 6)$. Halla:

a) El punto de la recta más cercano a *P*.

b) La distancia del punto *P* a la recta *r*.

c) La ecuación de la recta que corta perpendicularmente a *r* y pasa por el punto *P*.

5. Los puntos $A(0, 3, -1)$ y $B(-1, 0, 5)$ son vértices de un triángulo de área $S = \sqrt{235}$. El tercer vértice *C* pertenece a la recta de ecuación $r: \frac{x-1}{0} = y+3 = \frac{z+2}{-1}$. Determina:

a) Las coordenadas del vértice *C*.

b) Las coordenadas de otro punto $P \in r$ de manera que el triángulo *APB* sea rectángulo en *A*.

c) El área del triángulo *APB*.

6. Dados el punto $P(-3, 1, 0)$ y la recta $r: (1+3t,\ -1+t,\ -2)$, determina:

a) La ecuación del plano que los contiene.

b) La distancia del punto a la recta.

c) Las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*.

Propuesta B

1. El plano $\pi: 2x + 2y + z - 4 = 0$ forma con los planos de coordenadas *XY*, *XZ*, *YZ* un tetraedro de vértices *O*, *A*, *B*, *C*. Determina:

a) Las coordenadas de *A*, *B* y *C*.

b) El área de la cara *ABC* del tetraedro.

c) El ángulo que forman las caras *ABC* y *OAB*.

d) La distancia del vértice *O* al plano π.

e) La ecuación paramétrica de la recta donde π corta al plano *XZ*.

2. Se considera el plano $\pi: x - y - z + 1 = 0$, la recta $r: \frac{x}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$ y el punto *P*(4, −6, 5).

Determina las distancias del punto al plano y a la recta.

3. Se consideran las rectas de ecuaciones $r: \begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s: \frac{x+2}{0} = y - 5 = z + 1$.

a) Confirma que son rectas paralelas.

b) Halla la ecuación del plano que las contiene.

c) Halla la distancia entre las dos rectas.

4. El volumen del tetraedro de vértices *A*(−2, 5, 1), *B*(1, 1, −1), *C*(0, 4, 0) y *D*(*k*, −3, 2) es 10 u^3.

a) Determina el valor de *k*.

b) Para el valor de *k* hallado, ¿cuánto mide la altura del tetraedro desde *D*?

c) Comprueba, utilizando la altura hallada, que el volumen de un tetraedro es $V = \frac{1}{3} A_{Base} \cdot h$.

5. Dados los puntos *P*(−5, 1, −1), *Q*(−9, 7, −4) y el plano $\pi: 3x - y + z - 5 = 0$, determina las coordenadas de un punto *T* del plano π para que la suma de las distancias *PT* + *TQ* sea la menor posible.

Calcula cuánto es la suma de las dos distancias.

Toma otro punto cualquiera *X* del plano y comprueba que la suma de distancias *PX* + *XQ* es mayor que la hallada anteriormente.

6. Determina la ecuación de tres planos que contienen a la recta $r: \begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ x - z = -2 \end{cases}$ y que dividen al segmento *MN*, de extremos *M*(−1, 5, 2), *N*(7, 1, −10), en cuatro partes iguales.

¿Qué ángulos forman los tres planos entre sí?

Soluciones propuesta A

1. a) $r(A,\vec{u}):\begin{cases}A(0,1,-3)\\ \vec{u}=(2,0,-1)\end{cases}$, $s(B,\vec{v}):\begin{cases}B(9,-5,0)\\ \vec{v}=(-3,2,1)\end{cases}$

b) $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{7}{\sqrt{70}}\Rightarrow\alpha=33^\circ 12'39''$

c) El plano XY tiene ecuación $z=0$, por lo que $r\cap XY=P(-6,1,0)$, $s\cap XY=B(9,-5,0)$.

d) $d(r,s)=\dfrac{|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$, $\begin{cases}\vec{u}\times\vec{v}=(2,1,4)\\ \overrightarrow{AB}=(9,-6,3)\end{cases}$

$d(r,s)=\dfrac{|18-6+12|}{\sqrt{4+1+16}}=\dfrac{24}{\sqrt{21}}$ u

2. El plano está determinado por un punto, A, y su vector normal. $\pi(A,\vec{w}):\begin{cases}A(0,4,0)\\ \vec{w}=(1,-1,1)\end{cases}$

La recta es $r(B,\vec{v}):\begin{cases}B(2,0,-1)\\ \vec{v}=(-1,3,2)\end{cases}$

a) Como $\vec{v}\cdot\vec{w}=-1-3+2\neq 0$, la recta y el plano no son paralelos; luego se cortan.

b) $\text{sen}\,\alpha=\dfrac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{14}\sqrt{3}}\Rightarrow\alpha=17^\circ 58'31''$

c) Se halla el plano $\sigma:\begin{cases}r\subset\sigma\\ \pi\perp\sigma\end{cases}\Rightarrow\sigma(B,\vec{v},\vec{w})$

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & x-2\\ 3 & -1 & y\\ 2 & 1 & z+1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\sigma:5x+3y-2z=12$$

$$r'=\pi\cap\sigma=\begin{cases}x-y+z+4=0\\ 5x+3y-2z-12=0\end{cases}=\begin{cases}x=\lambda\\ y=4-7\lambda\\ z=-8\lambda\end{cases}$$

d) $\alpha=\arccos\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\arccos\dfrac{38}{\sqrt{1596}}=17^\circ 58'31''$

e) Si $P=r\cap\pi=P\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{15}{2},4\right)$, entonces la recta es $s(P,\vec{v}\times\vec{w})$. Como $\vec{v}\times\vec{w}=(5,3,-2)$,

$s:\left(x=-\dfrac{1}{2}+5t,\ y=\dfrac{15}{2}+3t,\ z=4-2t\right)$

3. a) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{22}$, $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{59}$

b) $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{20^2+16^2+60^2}=2\sqrt{266}$

c) Se halla:

$\pi_{BCD}(B,\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}):5x+4y+15z+2=0$

$h=d(A,\pi_{BCD})=\dfrac{|45+2|}{\sqrt{25+16+225}}=\dfrac{47}{\sqrt{266}}$ u

d) Se hallan $\overrightarrow{AB}=(2,-3,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(-5,2,-2)$, $\overrightarrow{AD}=(0,7,-5)$, $\vec{n}_1=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(12,19,-11)$, $\vec{n}_2=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(36,10,14)$

$\cos\alpha=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\dfrac{468}{\sqrt{996592}}\Rightarrow\alpha=62^\circ 2'37''$

e) $V=\dfrac{1}{6}\left[\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right]=\dfrac{1}{3}S_{BCD}\cdot h=\dfrac{94}{3}$ u^3

4. a) $r:\begin{cases}x=1+2t\\ y=t\\ z=-2-3t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P'(1+2t,t,-2-3t)\\ \vec{u}=(2,1,-3)\end{cases}$

$\overrightarrow{PP'}=(-3+2t,t-4,-8-3t)$, y como $\overrightarrow{PP'}\perp\vec{u}$,

$\overrightarrow{PP'}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow 14t+14=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow P'(-1,-1,1)$

b) $d(P,r)=|\overrightarrow{PP'}|=\sqrt{5^2+5^2+5^2}=5\sqrt{3}$ u

c) $s:\begin{cases}x=4+5t\\ y=4+5t\\ z=6+5t\end{cases}$, o también $s:\begin{cases}x=-1+t\\ y=-1+t\\ z=1+t\end{cases}$

5. a) $r:\begin{cases}x=1\\ y=-3+t\\ z=-2-t\end{cases}\Rightarrow C(1,-3+t,-2-t)$

$\overrightarrow{AB}=(-1,-3,6)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-6+t,-1-t)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(39-3t,5-t,9-t)$

$S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{235}\Rightarrow 11t^2-262t+687=0$

Una solución es $t=3$, de donde $C(1,0,-5)$.

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=0\Rightarrow t=\dfrac{11}{9}\Rightarrow P\left(1,-\dfrac{16}{9},-\dfrac{20}{9}\right)$

c) $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}\right|=\dfrac{\sqrt{91430}}{18}\approx 16{,}8$ u^2

6. a) $r(A,\vec{u}):\begin{cases}A(1,-1,-2)\\ \vec{u}=(3,1,0)\end{cases}\Rightarrow\pi\left(P,\vec{u},\overrightarrow{AP}\right)$

$$\begin{vmatrix}3 & -4 & x+3\\ 1 & 2 & y-1\\ 0 & 2 & z\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-3y+5z+6=0$$

b) $\vec{u}\times\overrightarrow{AP}=(2,-6,10)$, $d(P,r)=\dfrac{|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}=\sqrt{14}$ u

c) Se halla la proyección de P sobre la recta.

$M(1+3t,-1+t,-2)$, $\overrightarrow{PM}=(4+3t,-2+t,-2)$

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{PM}=0\Rightarrow 10t=-10\Rightarrow t=-1\Rightarrow M(-2,-2,-2)$

Luego $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PM}\Rightarrow P'(-1,-5,-4)$

Soluciones propuesta B

1. a) El plano π interseca a los ejes en los puntos $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 2,\ 0)$ y $C(0,\ 0,\ 4)$.

b) Como $\overrightarrow{AB} = (-2,\ 2,\ 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2,\ 0,\ 4)$ y $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (8,\ 8,\ 4)$, el área del triángulo ABC es:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 8^2 + 4^2} = 6\ \text{u}^2$$

c) Los vectores normales a las caras ABC y AOB son $\vec{w} = (2,\ 2,\ 1)$ y $\vec{k} = (0,\ 0,\ 1)$.

$$\alpha = \arccos\frac{|\vec{w} \cdot \vec{k}|}{|\vec{w}||\vec{k}|} = \arccos\frac{1}{3} \approx 70°\,31'\,44''$$

d) $$d(O, \pi) = \frac{|0 + 0 + 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{3}\ \text{u}$$

e) $$\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 4 - 2\lambda \end{cases}$$

2. $$d(P, \pi) = \frac{|4 + 6 - 5 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\ \text{u}$$

$$d(P, r) = \frac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{|(-9,\ 39,\ 33)|}{|(5,\ 2,\ -1)|} = \sqrt{\frac{897}{10}}\ \text{u}$$

3. a) $r(A, \vec{u}): \begin{cases} A(1,\ 0,\ 3) \\ \vec{u} = (0,\ 1,\ 1) \end{cases}$ y $s(B, \vec{v}): \begin{cases} B(-2,\ 5,\ -1) \\ \vec{v} = (0,\ 1,\ 1) \end{cases}$

Tienen la misma dirección: son paralelas.

b) $$\begin{vmatrix} 0 & -3 & x-1 \\ 1 & 5 & y \\ 1 & -4 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + y - z = 0$$

c) $$d(r, s) = d(A, s) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{v}|} = 3\frac{\sqrt{22}}{2}$$

4. a) $$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CD}\right]\right| = 10\ \text{u}^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ k & -7 & 2 \end{vmatrix} = 60 \Rightarrow 2k + 17 = 60 \Rightarrow k = \frac{43}{2}$$

b) $\pi\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right): 2x - y + 5z + 4 = 0$

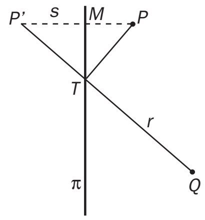
$$h = d(D, \pi) = \frac{|43 + 3 + 10 + 4|}{\sqrt{4 + 1 + 25}} = \frac{60}{\sqrt{30}} = 2\sqrt{30}\ \text{u}$$

c) $$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 1 + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{30}\ \text{u}^2$$

$$V = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\sqrt{30}\,2\sqrt{30} = 10\ \text{u}^3$$

5. Los puntos dados están al mismo lado del plano π, por ello no es útil trazar la recta que pasa por P y Q. En este caso se traza la recta que pasa por Q y por el simétrico de P respecto del plano.

$$s(P, \vec{w}): \begin{cases} x = -5 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$



$M = s \cap \pi \Rightarrow 11\lambda - 22 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow M(1,\ -1,\ 1)$

Como M es el punto medio de PP', se obtiene $P'(7,\ -3,\ 3)$.

$$r(Q, \overline{QP'}): \begin{cases} x = -9 + 16\lambda \\ y = 7 - 10\lambda \\ z = -4 + 7\lambda \end{cases},\quad T = r \cap \pi$$

Resolviendo el sistema, $T\left(\frac{103}{65}, \frac{25}{65}, \frac{41}{65}\right)$

$$PT + TQ = \left|\overrightarrow{PT}\right| + \left|\overrightarrow{TQ}\right| = \frac{\sqrt{5}}{65}(198 + 387) = 9\sqrt{5}$$

Si se toma otro $X \in \pi$, por ejemplo $X(0,\ -2,\ 3)$, se obtiene:
$PX + XQ = \sqrt{50} + \sqrt{211} \approx 21{,}6 > 20{,}12 \approx 9\sqrt{5}$

6. Los planos pertenecen al haz de planos de arista la recta r, cuya ecuación es:
$(1 + \lambda)x - 2y + (1 - \lambda)z + (2\lambda - 5) = 0$

Los puntos que dividen el segmento MN en cuatro partes iguales son: $P_1(1,\ 4,\ -1)$, $P_2(3,\ 3,\ -4)$ y $P_3(5,\ 2,\ -7)$. Los planos del haz que pasan por esos puntos se obtienen con:

$$\lambda_1 = \frac{13}{4},\ \lambda_2 = \frac{4}{3},\ \lambda_3 = \frac{11}{14}$$

y son: $$\begin{cases} 17x - 8y - 9z + 6 = 0 \\ 7x - 6y - z - 7 = 0 \\ 25x - 28y + 3z - 48 = 0 \end{cases}$$

Los ángulos que forman son:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2|}{|\vec{w}_1||\vec{w}_2|} = \frac{176}{\sqrt{434}\sqrt{86}} \Rightarrow \alpha = 24°\,21'\,22''$$

$$\cos\beta = \frac{|\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_3|}{|\vec{w}_2||\vec{w}_3|} = \frac{340}{\sqrt{86}\sqrt{1418}} \Rightarrow \beta = 13°\,11'\,19''$$

$$\cos\gamma = \frac{|\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_3|}{|\vec{w}_1||\vec{w}_3|} = \frac{622}{\sqrt{434}\sqrt{1418}} \Rightarrow \gamma = 37°\,32'\,40''$$

7 Lugares geométricos en el espacio

Propuesta A

1. Cada una de las ecuaciones paramétricas siguientes corresponde a un lugar geométrico.

I) $\begin{cases} x = 3 + 4\,\text{sen}\,t \\ y = 2 + 4\cos t \end{cases}$ II) $\begin{cases} x = 3 + 4\cos t \\ y = 2 + 2\,\text{sen}\,t \end{cases}$

a) Elimina el parámetro en cada una y determina sus ecuaciones cartesianas.

b) Determina los lugares geométricos de los que se trata y represéntalos gráficamente.

c) Halla las coordenadas de los puntos comunes a ambos lugares geométricos.

2. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la circunferencia de centro $C(1, 5)$ y radio $r = 5$.

Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{5\pi}{3}$ y represéntalos.

3. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la elipse de focos $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$ y eje mayor $2a = 10$.

Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{5\pi}{3}$ y represéntalos.

4. La superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z - 11 = 0$ es tangente a un plano de ecuación $2x + y - 2z + m = 0$. Halla:

a) El centro, radio y el área de la superficie esférica.

b) El valor o valores de *m*.

c) Las coordenadas del punto o de los puntos de tangencia.

5. Completa la siguiente tabla calculando las coordenadas de los puntos dados en los tres sistemas de coordenadas:

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P(0, 1, 1)$		
	$Q(2, 30°, -2)$	
		$T(5, 60°, 90°)$

6. Escribe en coordenadas cartesianas y en polares las ecuaciones de las siguientes curvas.

a) Circunferencia de centro $C(2, 1)$ y radio $r = 2$.

b) Elipse de centro el origen y semiejes $a = 5$ y $b = 3$.

c) Hipérbola de centro $C(0, 0)$, eje real $a = 2$ y excentricidad $e = 2$.

d) Parábola de vértice el origen y foco $F(0, 3)$.

7. Escribe las ecuaciones paramétricas de la superficie cónica formada por todas las rectas que pasan por el vértice $V(-1, 0, 2)$ y se apoyan en la directriz $C: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2\,\text{sen}\,t \\ z = 2\cos t \end{cases}$.

8. La curva $B: \begin{cases} x = 2a \cdot \text{cotg}\,\alpha \\ y = 0 \\ z = 2a \cdot \text{sen}^2\,\alpha \end{cases}$, con $a \neq 0$, se llama "Bruja de Agnesi" y está contenida en el plano *XZ*. Halla las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución engendrada por la Bruja cuando gira en torno al eje *Z*.

Propuesta B

1. Cada una de las ecuaciones paramétricas siguientes corresponde a un lugar geométrico.

I) $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$ II) $\begin{cases} x = \ \ 2 + 2\cos t \\ y = -1 + 2\,\text{sen}\,t \end{cases}$

a) Elimina el parámetro en cada una y determina sus ecuaciones cartesianas.

b) Determina los lugares geométricos de los que se trata y represéntalos gráficamente.

c) Halla las coordenadas de los puntos comunes a ambos lugares geométricos.

2. Escribe las ecuaciones parámetricas y la ecuación implícita de la circunferencia de centro $C(-4, 0)$ y radio $r = 4$.

Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = -\frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{4\pi}{3}$ y represéntalos.

3. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la hipérbola de focos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y eje mayor $2a = 6$.

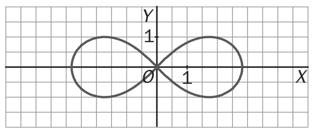
Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = -\frac{3\pi}{4}$, $t = \frac{5\pi}{3}$, y represéntalos.

4. Se define la lemniscata de Bernoulli como el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos puntos fijos, los focos, tienen un producto constante e igual a c^2, siendo c la semidistancia focal.

a) Halla su ecuación en coordenadas cartesianas suponiendo que los focos son los puntos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$.

b) Halla su ecuación en coordenadas polares.

c) Si la semidistancia focal es $c = 2$, demuestra que los vértices horizontales son los puntos $A'(-2\sqrt{2}, 0)$ y $A(2\sqrt{2}, 0)$.



5. Completa la siguiente tabla calculando las coordenadas de los puntos dados en los tres sistemas de coordenadas:

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P(3, \sqrt{3}, 3)$		
	$Q(4, 180°, 4)$	
		$T(3\sqrt{2}, 270°, 135°)$

6. Halla la ecuación implícita de la superficie cilíndrica de directriz la curva $C: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\,t \\ z = 2 \end{cases}$ y de generatrices paralelas al vector $\vec{v} = (-1, 0, -1)$.

7. Escribe la ecuación de la superficie formada por todos los puntos pertenecientes a las rectas que se apoyan en el eje Z y en la recta de ecuación $r: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 12 + 3t \\ z = t \end{cases}$ y cuya dirección es perpendicular al vector $\vec{u} = (0, 0, 1)$.

8. La superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z + d = 0$ tiene un área de 36π unidades cuadradas. Halla:

a) El radio de la misma y el valor del término independiente d.

b) La ecuación de otra superficie esférica concéntrica con esta y tangente al plano $\pi: x - 2y + 2z = 0$.

c) Los puntos de corte de la superficie esférica con los ejes de coordenadas.

Soluciones propuesta A

1. a) $\begin{cases} x = 3 + 4\,\text{sen}\,t \\ y = 2 + 4\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,t = \dfrac{x-3}{4} \\ \cos t = \dfrac{y-2}{4} \end{cases}$

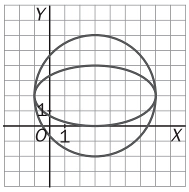
Como $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$,

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4^2$$

$$\begin{cases} x = 3 + 4\cos t \\ y = 2 + 2\,\text{sen}\,t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \dfrac{x-3}{4} \\ \text{sen}\,t = \dfrac{y-2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

b) Se trata de una circunferencia de centro $C(3, 2)$ y radio 4, y de una elipse con el mismo centro y semiejes $a = 4$ y $b = 2$.



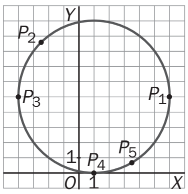
c) Los puntos comunes se obtienen al igualar las ecuaciones:

$$\begin{cases} \text{sen}\,t = \cos\lambda \\ 2\cos t = \text{sen}\,\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{sen}^2 t + 4\cos^2 t = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cos^2 t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{\pi}{2} \\ t_2 = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(7, 2) \\ B(-1, 2) \end{cases}$$

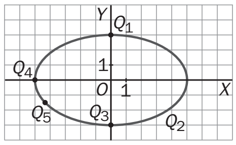
2. $\begin{cases} x = 1 + 5\cos t \\ y = 5 + 5\,\text{sen}\,t \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$

t	P_i
0	(6, 5)
$\dfrac{3\pi}{4}$	$\left(\dfrac{2-5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{10+5\sqrt{2}}{2}\right)$
π	(–4, 5)
$\dfrac{3\pi}{2}$	(1, 0)
$\dfrac{5\pi}{3}$	$\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{10-5\sqrt{3}}{2}\right)$



3. $\begin{cases} x = 5\,\text{sen}\,t \\ y = 3\cos t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

t	Q_i
0	(0, 3)
$\dfrac{3\pi}{4}$	$\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$
π	(0, –3)
$\dfrac{3\pi}{2}$	(–5, 0)
$\dfrac{5\pi}{3}$	$\left(\dfrac{-5\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-3}{2}\right)$



4. a) Centro: $C(3, 2, -1)$.

Radio: $r = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2 - (-11)} = \sqrt{25} = 5$

b) $d(C, \pi) = r \Rightarrow \dfrac{|6+2+2+m|}{3} = 5 \Rightarrow |10+m| = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow m_1 = 5$, $m_2 = -25$.

c) Los puntos de tangencia son intersección entre la recta perpendicular al plano que pasa por C y el plano. Sus ecuaciones son:

$\{x = 3 + 2\lambda,\ y = 2 + \lambda,\ z = -1 - 2\lambda\}$

Sustituyendo en la ecuación del plano π y dando a m los valores obtenidos en b:

$$m_1 = 5 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{3} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$m_2 = -25 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{3} \Rightarrow A\left(\frac{19}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{13}{3}\right)$$

5. Aplicando las relaciones entre los tres tipos de coordenadas se llega a:

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P\,(0, 1, 1)$	$P\left(1, \dfrac{\pi}{2}, 1\right)$	$P\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$
$Q\left(\sqrt{3}, 1, -2\right)$	$Q(2, 30^\circ, -2)$	$Q\left(2\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$
$T\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5\sqrt{3}}{2}, 0\right)$	$T\,(5, 60^\circ, 0)$	$T\,(5, 60^\circ, 90^\circ)$

6. a) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ $\quad r = 2$

b) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ $\quad r = \dfrac{15}{\sqrt{9 + 16\,\text{sen}^2\,\theta}}$

c) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$ $\quad r = \sqrt{\dfrac{12}{3 - 4\,\text{sen}^2\,\theta}}$

d) $x^2 = 12y$ $\quad r = \dfrac{12\,\text{sen}\,\theta}{1 - \text{sen}^2\,\theta}$

7. La ecuación vectorial de la superficie es $\vec{x} - \vec{a} = s(\vec{c} - \vec{a}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{a} + s(\vec{c} - \vec{a})$ y las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 + s(2t+1) \\ y = 0 + s(2\,\text{sen}\,t) \\ z = 2 + s(2\cos t - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + s + 2st \\ y = 2s \cdot \text{sen}\,t \\ z = 2 - 2s + 2s \cdot \cos t \end{cases}$$

8. Las ecuaciones de la superficie pedida son:

$$\begin{cases} x = 2a \cdot \text{cotg}\,\alpha \cdot \cos s - 0 \cdot \text{sen}\,s \\ y = 2a \cdot \text{cotg}\,\alpha \cdot \text{sen}\,s + 0 \cdot \cos s \Rightarrow \\ z = 2a \cdot \text{sen}^2\,\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2a \cdot \text{cotg}\,\alpha \cdot \cos s \\ y = 2a \cdot \text{cotg}\,\alpha \cdot \text{sen}\,s \\ z = 2a \cdot \text{sen}^2\,\alpha \end{cases}$$

donde s es el ángulo de giro.

Soluciones propuesta B

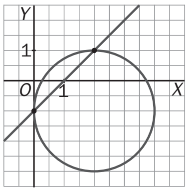
1. a) $\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 2+\lambda \end{cases} \Rightarrow x-3 = y-2 \Rightarrow x-y-1=0$

$$\begin{cases} x = \ \ 2+2\cos t \\ y = -1+2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \dfrac{x-2}{2} \\ \mathrm{sen}\, t = \dfrac{y+1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2^2$$

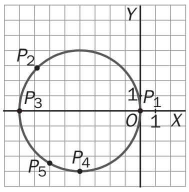
b) Se trata de una recta y de una circunferencia.

c) Para hallar los puntos de corte se resuelve el sistema: $P_1\,(2,\ 1)$ y $P_2\,(0,\ -1)$



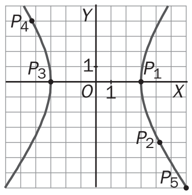
2. $\begin{cases} x = -4+4\ \cos t \\ y = \ \ 0+4\ \mathrm{sen}\, t \end{cases} \Rightarrow (x+4)^2 + y^2 = 16$

t	P_i
0	(0, 0)
$-\dfrac{3\pi}{4}$	$\left(-4-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$
π	(–8, 0)
$\dfrac{3\pi}{2}$	(–4, –4)
$\dfrac{4\pi}{3}$	$\left(-6, -2\sqrt{3}\right)$



3. $\begin{cases} x = 3\sec t \\ y = 4\,\mathrm{tg}\, t \end{cases} \Rightarrow \sec^2 t - \mathrm{tg}^2\, t = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

t	Q_i
0	(3, 0)
$\dfrac{3\pi}{4}$	$\left(3\sqrt{2}, -4\right)$
π	(–3, 0)
$-\dfrac{3\pi}{4}$	$\left(-3\sqrt{2}, 4\right)$
$\dfrac{5\pi}{3}$	$\left(6, -4\sqrt{3}\right)$



4. a) Tomando un punto genérico $P(x,\ y)$ de la curva, se tiene que $d(P,\ F) = d(P, F\,') \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x^2+y^2\right)^2 = 2c^2(x^2-y^2)$

b) $r^2 = 2c^2\cos^2\theta$

c) Haciendo $y = 0$ se obtienen tres soluciones: $x = 0$, $x = \pm c\sqrt{2} \Rightarrow$ Vértices: $(\mp c\sqrt{2}, 0)$.

5. Aplicando las relaciones entre los tres tipos de coordenadas se llega a: $(3\sqrt{2},\ 270°,\ 135°)$

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P(3,\ \sqrt{3},\ 3)$	$P\left(2\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{6}, 3\right)$	$P\left(\sqrt{21}; \dfrac{\pi}{6}; 0{,}857\right)$
$Q\ (-4,\ 0,\ 4)$	$Q(4,\ 180°,\ 4)$	$Q\left(4\sqrt{2},\ \pi,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$
$T\ (0,\ -3,\ -3)$	$T\ (3,\ 270°,\ -3)$	$T(3\sqrt{2}, 270°, 135°)$

6. Ecuaciones paramétricas de la superficie:

$$\begin{cases} x = 2\cos t - s \\ y = 2\,\mathrm{sen}\, t \\ z = 2-s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \dfrac{x+s}{2} \\ \mathrm{sen}\, t = \dfrac{y}{2} \\ s = 2-z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+2-z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

7. Se toma un punto genérico A del eje Z y otro B de la recta r.

$A\ (0,\ 0,\ s)$, $B\ (4+t,\ 12+3t,\ t)$

Para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular al vector $\vec{u} = (0,\ 0,\ 1)$:

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow t - s = 0 \Rightarrow t = s$

La superficie está formada por las rectas que pasan por $A\ (0,\ 0,\ t)$ y $B\ (4+t,\ 12+3t,\ t)$:

$s: \begin{cases} x = s(4+t) \\ y = s(12+3t) \\ z = t \end{cases}$. Eliminando los parámetros:

$$s = \frac{x}{4+t} = \frac{y}{12+3t};\quad t = z \Rightarrow \frac{x}{4+z} = \frac{y}{12+3z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x - 4y + 3xz - yz = 0$$

8. a) $S = 4\pi r^2 = 36\pi \Rightarrow r = 3$

Centro: $C(1,\ 0,\ -3)$ y $d = 1^2 + (-3)^2 - 3^2 = 1$

b) $r_2 = d(C,\ \pi) = \dfrac{|1-6|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{5}{3}$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \frac{25}{9}$$

c) Eje X: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $x^2 - 2x + 9 = 0$

Sin solución real.

Eje Y: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $y^2 - 10y + 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0,\ 1,\ 0) \\ B(0,\ 9,\ 0) \end{cases}$

Eje Z: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; $z^2 + 6z + 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = -3 \Rightarrow C(0,\ 0,\ -3)$

8 Límites de sucesiones y de funciones

Propuesta A

1. Calcula los tres términos siguientes y la expresión del término general de cada una de las siguientes sucesiones:

a) 4, 7, 10, 13, 16, … b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \ldots$ c) 1, 4, 9, 16, 25, … d) 2, 5, 10, 17, 26, …

2. Dada la sucesión definida por recurrencia: $a_0 = 2,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n}$:

a) Calcula sus cinco primeros términos.

b) Halla su término general.

c) Sabiendo que es convergente, calcula su límite.

d) ¿Está acotada? Si es así, da una cota inferior y una superior.

3. Dada la sucesión de término general $a_n = 3 + \frac{2}{n}$:

a) Calcula sus tres primeros términos y halla el lugar que ocupa el término $a_s = \frac{28}{9}$.

b) Demuestra que es estrictamente decreciente.

c) Calcula su límite y averigua a partir de qué término los siguientes términos se aproximan a 3 con un error menor que $\varepsilon = 0{,}001$.

4. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n+1} - \frac{n^2+2n}{n-1}\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^2-4n+1}{1+3n}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^{n+2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2n}\right)$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{2n^2}$

5. Calcula los límites laterales de las siguientes funciones racionales en los puntos en los que no están definidas. ¿Existe el límite de la función en esos puntos?

a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$ b) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-x}$

6. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+7x-31\right)$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-100x-2\,009\right)$ e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-x^2+7\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(x-5)(4-x^2)$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(4-x)(4+x)$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-x^3+5x^2+10\right)$

7. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{12+x}-4}$

8. Se considera la función: $f(x) = \frac{x}{|x|-1}$, calcula $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

9. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-3x^3+4x}{x^4-16}$

Propuesta B

1. Calcula los tres términos siguientes y la expresión del término general de cada una de las siguientes sucesiones:

a) 10, 7, 4, 1, –2, … b) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, ...$ c) 1, 8, 27, 64, 125, … d) 0, 7, 26, 63, 124, …

2. Se considera la sucesión definida por recurrencia: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n$.

a) Calcula sus cinco primeros términos.

b) Halla su término general.

c) Si $b_n = |a_n|$ y $c_n = -|a_n|$, demuestra que b_n y c_n son progresiones geométricas. ¿Lo es también a_n?

d) Estudia la monotonía de a_n.

e) Halla, si existen, cotas superiores e inferiores para a_n.

f) Calcula el límite de a_n.

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2+1}{n-2}\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{n^2+1}\right)$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n+3}{3-8n}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n+1} \cdot \frac{n+4}{5n^2}\right)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+6+...+2n}{n^2+1}$

4. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim\limits_{x\to3}\left(x^2-2x+1\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3x+2\right)$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+3\right)$

b) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^4+x-3\right)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-x^2\right)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+5\right)$

5. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+3}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+4}{x+1}$

6. Calcula los límites laterales de las funciones racionales en los puntos en que no están definidas:

a) $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$ b) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ c) $f(x) = \frac{x^4-x^3+3x}{x^2-x}$

7. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4} - x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$

8. Se considera la función: $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|-1}$. Calcula $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Soluciones propuesta A

1. a) $a_6 = 19$, $a_7 = 33$, $a_8 = 25$, $a_n = 3n + 1$

b) $a_6 = \frac{11}{12}$, $a_7 = \frac{13}{14}$, $a_8 = \frac{15}{16}$, $a_n = \frac{2n-1}{2n}$

c) $a_6 = 36$, $a_7 = 49$, $a_8 = 64$, $a_n = n^2$

d) $a_6 = 37$, $a7 = 50$, $a_8 = 65$, $a_n = n^2 + 1$

2. a) $a_0 = 2,\ a_1 = 2^{\frac{1}{2}},\ a_2 = 2^{\frac{1}{4}},$

$a_3 = 2^{\frac{1}{8}},\ a_4 = 2^{\frac{1}{16}},\ a_5 = 2^{\frac{1}{32}}$

b) $a_n = 2^{\frac{1}{2^n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2^n}} = k \Rightarrow \log_2 k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Rightarrow k = 1$

El límite de la sucesión es 1.

d) Está acotada superiormente por $a_0 = 2$ e inferiormente por su límite, 1.

3. a) $a_1 = 5,\quad a_2 = 4,\quad a_3 = \frac{11}{3}$

$3 + \frac{2}{s} = \frac{28}{9} \Leftrightarrow \frac{2}{s} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow s = 18$

b) $a_{n+1} - a_n = \left(3 + \frac{2}{n+1}\right) - \left(3 + \frac{2}{n}\right) = \frac{-2}{(n+1)n} < 0$

La sucesión es estrictamente decreciente.

c) $\lim a_n = \lim\left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3 + 0 = 3$

$|a_n - 3| < \varepsilon;\ \left|3 + \frac{2}{n} - 3\right| < 0{,}001 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{n}\right| < 0{,}001$

$2 < 0{,}001n \Rightarrow n > 2000$. A partir de a_{2000}.

4. a) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2n^2 - 4n}{n^2 - 1} = -2$

b) $l = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$

c) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2}{3n} = -\infty$

d) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-2n}} = \frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$

e) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

f) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n}{2}n}{2n^2} = \frac{1}{4}$

5. a) $\lim\limits_{x\to -3^-} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -3^+} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^-} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\frac{x^2-3x}{x^2-x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{x^2-3x}{x^2-x}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x^2-3x}{x^2-x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x(x-3)}{x(x-1)}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-3}{x-1} = 3$

6. a) –1

b) –20

c) $+\infty$

d) $-\infty$

e) $-\infty$

f) $+\infty$

7. Estos límites son del tipo $\frac{0}{0}$:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{12+x}-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{12+x}+4\right)}{\left(\sqrt{12+x}-4\right)\left(\sqrt{12+x}+4\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 4} \frac{(x-4)\left(\sqrt{12+x}+4\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{12+x}+4\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)} = 2$

8. $\lim\limits_{x\to -1^-} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x}{-x-1}\right) = -1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{+x-1}\right) = 1$

9. a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^3-x^2-2x)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{0}{32} = 0$

Soluciones propuesta B

1. a) $a_6 = -5$, $a_7 = -8$, $a_8 = -11$, $a_n = 13 - 3n$

b) $a_6 = \frac{12}{13}$, $a_7 = \frac{14}{15}$, $a_8 = \frac{16}{17}$, $a_n = \frac{2n}{2n+1}$

c) $a_6 = 216$, $a_7 = 343$, $a_8 = 512$, $a_n = n^3$

d) $a_6 = 215$, $a_7 = 342$, $a_8 = 511$, $a_n = n^3-1$

2. a) $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3^2}$, $a_3 = -\frac{1}{3^3}$,

$a_4 = \frac{1}{3^4}$, $a_5 = -\frac{1}{3^5}$

b) $a_n = (-1)^n \frac{1}{3^n}$

c) $b_n = \frac{1}{3^n}$, $c_n = -\frac{1}{3^n}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3},\quad \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{-\frac{1}{3^{n+1}}}{-\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{n+1}}}{(-1)^n\frac{1}{3^n}} = -\frac{1}{3}$$

b_n y c_n son progresiones geométricas de razón $r = \frac{1}{3}$. a_n es una progresión geométrica de razón $r = -\frac{1}{3}$.

d) Como se puede ver en los primeros términos, a_n es oscilante.

e) Superior: $a_0 = 1$. Inferior: $a_1 = -\frac{1}{3}$.

f) $c_n \le a_n \le b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n \le \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3^n}\right) \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

3. a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2+1}{n-2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^2-n+1}{n^2-3n+2}\right) = -1$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n+1}\cdot\frac{n+4}{5n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+8n^2}{5n^3+5n^2} = \frac{2}{5}$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{n^2+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+1}} = +\infty$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2}{5n-3}\right)\left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)} = \left(e^{+\infty}\right) = +\infty$$

e) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n+3}{3-8n}} = \sqrt[3]{\frac{1}{-8}} = -\frac{1}{2}$$

f) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2+2n}{2}n}{n^2+1} = 1$$

4. a) 4 b) –3 c) +∞ d) –∞ e) +∞ f) +∞

5. Todos estos límites son del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

a) Simplificando por x^2:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} = 1$$

b) Simplificando por x:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4}{x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -\infty$$

6. a) $\lim\limits_{x\to-3^-}\left(\frac{x-3}{x+3}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-3^+}\left(\frac{x-3}{x+3}\right) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{x^4+3x}{x^2-x}\right) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{x^4+3x}{x^2-x}\right) = +\infty$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x^4+3x}{x^2-x}\right) = \lim_{x\to0}\frac{x\left(x^3+3\right)}{x(x-1)} = \frac{3}{-1} = -3$$

7. a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} = 0$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

8. $$\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = \lim_{x\to-1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{-x-1} = \lim_{x\to-1^-}\frac{x-1}{-1} = 2$$

$$\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = \lim_{x\to-1^+}\frac{x-1}{-1} = 2,\quad \lim_{x\to1}\left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = +\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = +\infty$$

9 Continuidad

Propuesta A

1. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$ y clasifícalos.

2. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}6-x & \text{si } x<-2\\ 6 & \text{si } -2\le x<3\\ x^2-3 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$ y efectúa una representación gráfica de la misma.

3. Halla el valor del parámetro *a* para que la función $f(x)=\begin{cases}x^3-1 & \text{si } x<1\\ ax-1 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

4. Determina los valores de *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases}x+2 & \text{si } x\le 0\\ \sqrt{ax+b} & \text{si } 0<x\le 2\\ -\dfrac{x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } x>2\end{cases}$ sea continua en todo **R**.

5. Calcula el verdadero valor de la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+9}-3}$ en $x = 0$.

6. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones a trozos:

a) $f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x<0\\ x-1 & \text{si } x\ge 0\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}2-x^2 & \text{si } x<1\\ x^2-x+1 & \text{si } 1\le x<3\\ x^2-4 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$

7. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=\dfrac{x-6}{2-\sqrt{x-2}}$, indica el tipo de discontinuidad, determina el salto de discontinuidad o, en su caso, el verdadero valor de la función en esos puntos y muestra los intervalos en los que la función es continua.

8. Demuestra que la función $f(x)=2x^3-5x^2+x+2$ corta al eje de abscisas en el intervalo [–1, 3]. ¿Puede afirmarse lo mismo de la función $g(x)=\dfrac{x^3-2}{x-2}$?

9. Estudia si la función $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si } -2\le x<0\\ 2x-1 & \text{si } 0\le x\le 2\end{cases}$ está acotada en el intervalo [–2, 2]. En caso afirmativo calcula su máximo y su mínimo absolutos.

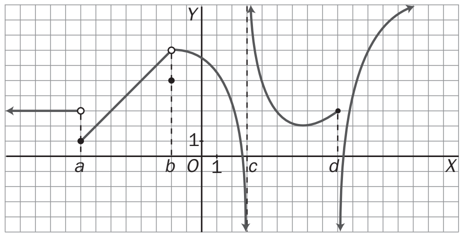
10. Estudia la continuidad de la función: $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\{-1,1\}\\ \dfrac{x}{|x|-1} & \text{si } x\in \mathbf{R}-\{-1,1\}\end{cases}$ y calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

11. Demuestra que las funciones $f(x)=x^3+x^2$ y $g(x)=3+\cos(\pi x)$ se cortan al menos en un punto cuya abscisa pertenece al intervalo [0, 2].

Propuesta B

1. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$. Indica el tipo de discontinuidad.

2. Indica los intervalos en los que la función $f(x)$, representada a continuación, es continua y clasifica los tipos de discontinuidad que presenta.



3. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{si } x\le 1 \\ x^2-3x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ y esboza su gráfica.

4. Halla el valor del parámetro a para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+a-1 & \text{si } x<2 \\ \ln(x-1) & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$ sea continua en todo **R**.

5. Determina para qué valores de los parámetros a y b la función $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x<0 \\ x^2+ax+b & \text{si } 0\le x<3 \\ x+9 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$ es continua en toda la recta real.

6. Calcula el verdadero valor de la función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}$ en $x = 0$.

7. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} x\cdot|x| & \text{si } x\le 1 \\ x & \text{si } 1<x\le 2 \\ 4-x & \text{si } x>2 \end{cases}$ y haz su representación gráfica.

8. Para cada una de las siguientes funciones calcula el valor de a que las hace continuas en todo **R**.

a) $f(x)=\begin{cases} a & \text{si } x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x\ne 1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-a & \text{si } x<3 \\ 4x+1 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$

9. Comprueba si la función $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ verifica las condiciones del teorema de Weierstrass en el intervalo [1, 4]. ¿Se puede asegurar que la función está acotada en ese intervalo? ¿Se puede asegurar que la función está acotada en todo su dominio? ¿Podría decirse lo mismo de la función $f(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$?

10. Demuestra que la ecuación $2^x-4x=0$ tiene al menos dos soluciones reales.

11. Construye una función adecuada para demostrar, por el teorema de Bolzano, que la función $f(x)=\sqrt{x^3+1}$ toma todos los valores del intervalo [0, 3].

Soluciones propuesta A

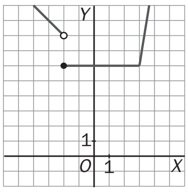
1. El dominio es $D(f) = \mathbf{R} - \{3\}$.

Como $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-3)}=4$,
en $x = 3$ hay límite; la función tiene una discontinuidad evitable y $f(3) = 4$ es su verdadero valor.

2. Para $x \neq -2$ y $x \neq 3$, la función es continua al estar definida por polinomios. Falta estudiar lo que ocurre en $x = -2$ y en $x = 3$.

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}(6-x)=8$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}(6)=6$



En x = –2 hay una discontinuidad inevitable de salto finito igual a

6 – 8 = = –2.

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3}(6)=6$

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3}(x^2-3)=6$

En $x = 3$ la función es continua.

3. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 1$, ya que fuera de este punto es continua al estar definida por polinomios.

Como $f(1)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(ax-1)=a-1$ y

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^3-1)=0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1$.

4. Para ser continua, los límites laterales en $x = 0$ y en $x = 2$ han de coincidir.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)\Rightarrow 2=\sqrt{b}\Rightarrow b=4$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+} f(x)\Rightarrow \sqrt{2a+4}=-\dfrac{2}{2\sqrt2}+\dfrac{3}{\sqrt2}$

$\sqrt{2a+4}=\sqrt2 \Rightarrow a=-1$.

5. El verdadero valor debe coincidir con el límite de la función en ese punto.

$$f(0)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+9}-3}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{\sqrt9+3}{\sqrt1+1}=3$$

6. a) $f(0)=-1$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-1$

En $x = 0$ tiene una discontinuidad inevitable de salto finito.

b) $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=1$. Es continua en $x = 1$ ya que $f(1)=\lim\limits_{x\to1} f(x)=1$.

$f(3)=5$, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=7$, $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=5$

Es discontinua en $x = 3$ con una discontinuidad inevitable de salto finito.

7. El dominio de la función es $D(f)=[2,\,6)\cup(6,+\infty)$, por lo que hay que estudiar su límite en $x = 6$.

$$\lim_{x\to6}\left(\frac{x-6}{2-\sqrt{x-2}}\right)=\lim_{x\to6}\frac{(x-6)(2+\sqrt{x-2})}{6-x}=-4$$

Como tiene límite, la discontinuidad es evitable y su verdadero valor es $f(6) = -4$. Así, la función es continua en el intervalo $[2, +\infty)$.

8. La función $f(x)=2x^3-5x^2+x+2$ es continua y tiene distinto signo en los extremos de $[-1, 3]$, ya que $f(-1) = -6 < 0$ y $f(3) = 14 > 0$. Por el teorema de Bolzano se puede asegurar que $\exists c\in(-1,\,3)$ tal que $f(c) = 0$.

Este razonamiento no es válido para la función g, ya que no es continua en el intervalo $[-1, 3]$ puesto que no está definida en $x = 2$; sin embargo, se puede observar directamente que la función corta al eje de abscisas:

$$0=\frac{x^3-2}{x-2}\Rightarrow x^3-2=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{2}\in[-1,\,3]$$

9. Se estudia la continuidad de la función en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(x^2-1\right)=-1\\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x-1)=-1,\quad f(0)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ continua en $[-2, 2] \Rightarrow f$ acotada. Por el teorema de Weierstrass f alcanza en dicho intervalo su máximo y su mínimo absolutos.

Como la función decrece en $(-2, 0)$ y crece en $(0, 2)$, basta con hallar $f(-2)$, $f(0)$ y $f(2)$.

$f(-2) = 3$, $f(0) = -1$ y $f(2) = 3$, por lo que el máximo es 3 y se alcanza en los extremos del intervalo. El mínimo, -1, se da en $x = 0$.

10. Se estudia la función en los valores que anulan el denominador: $|x|-1=0\Rightarrow x=\pm1$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x}{-x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x}{-x-1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{x-1}=+\infty$

f es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$ con una discontinuidad inevitable de salto infinito.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x-1}=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$

11. Si se cortan $\Rightarrow \exists c\in[0,\,2]$ tal que $f(c)=g(c)$.

Se construye la función $F(x)=f(x)-g(x)$ que es continua en el intervalo $[0, 2]$ y además $F(0)=-4<0$ y $F(2)=8>0$. Por el teorema de Bolzano $\exists c\in(0,\,2)$ que anulará la función, F, es decir $F(c)=f(c)-g(c)=0 \Leftrightarrow f(c)=g(c)$.

Soluciones propuesta B

1. El dominio de f es $D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 2\}$.

En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable, pues:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

El verdadero valor es $f(2) = \frac{5}{3}$.

En $x = -1$ la función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1^-}\frac{(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to -1^-}\frac{x+3}{x+1} = -\infty$$

2. La función es continua en $\mathbf{R} - \{a, b, c, d\}$.

$x = a$: discontinuidad inevitable de salto finito.

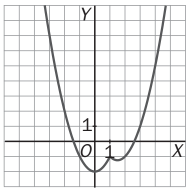
$x = b$: discontinuidad evitable ya que los límites laterales coinciden pero son distintos de $f(b)$.

$x = c$, $x = d$: discontinuidades inevitables de salto infinito.

3. Para $x \neq 1$, f es continua pues está definida por polinomios. Para $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2-2) =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2-3x+1)$$



Como $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = -1$, la función es continua en $\mathbf{R}$.

4. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 2$;

$$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+a-1) = 3+3a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\ln(x-1) = \ln 1 = 0\end{cases} \Rightarrow a = -1$$

5. Para que la función sea continua en todo $\mathbf{R}$, ha de ser continua en $x = 0$ y en $x = 3$,

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2+ax+b) = b = 0\end{cases} \Rightarrow b = 0$$

$$f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x^2+ax) = 9+3a \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x+9) = 12\end{cases} \Rightarrow a = 1$$

6. El verdadero valor es, si existe, el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x(1-\cos^2 x)\cos x}{\operatorname{sen} x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\cos x(1+\cos x) = 2$$

Luego el verdadero valor es $f(0) = 2$.

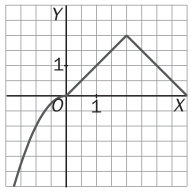
7. Posibles discontinuidades en $x = 1$ y $x = 2$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x|x| = 1$;

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x = 1$; $f(1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x = 2$;

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(4-x) = 2$; $f(2) = 2$



Por tanto, la función es continua en todo $\mathbf{R}$.

8. a) Para que sea continua en $x = 1$

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

b) Para que sea continua en $x = 3$

$$f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) \Rightarrow$$

$$f(3) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 13;\quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 9-a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 = 9-a \Rightarrow a = -4$$

9. La función es continua en su dominio, $D = \mathbf{R} - \{0\} \Rightarrow$ es continua en el intervalo [1, 4].

Como verifica las condiciones del teorema de Weierstrass, se puede asegurar que la función está acotada en ese intervalo; sin embargo, no está acotada en el dominio, ya que:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+1}{e^x-1} = -\infty \text{ y } \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+1}{e^x-1} = +\infty.$$

La función $f(x) = \dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$ es continua en toda la recta real y como $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1-e^x}{1+e^x} = 1$

y $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \dfrac{-1}{1} = -1 \Rightarrow f$ está acotada.

10. Se considera la función continua en toda la recta real $f(x) = 2^x - 4x$, y como $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -2 < 0$, por el teorema de Bolzano se puede asegurar que $\exists c \in (0, 1)$ que verifica $f(c) = 0$, es decir, $x = c$ es una solución de la ecuación $2^x - 4x = 0$. Además, $x = 4$ es otra solución porque $2^4 - 4\cdot 4 = 0$.

11. $\forall y_0 \in (0, 3)$ se construye $g(x) = f(x) - y_0$, que es continua. $g(-1) = f(-1) - y_0 = 0 - y_0 < 0$;

$g(2) = f(2) - y_0 = 3 - y_0 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x_0 \in (-1, 2) / g(x_0) = 0$

$g(x_0) = f(x_0) - y_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = y_0$

Además, $f(-1) = 0$ y $f(2) = 3$.

10 Derivadas

Propuesta A

1. Halla la tasa de variación media de la función $f(x)=x^2-4$ en los intervalos $[0,\ 2]$ y [*a*, *a* + *h*].

2. Halla la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x)=x^3+1$ en $x=-1$ b) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ en $x=-2$ c) $f(x)=\sqrt{x+2}$ en $x=2$

3. Calcula la pendiente de la tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos que se indican. ¿Qué ángulo forma la tangente con el eje de abscisas? ¿Cuál es su ecuación?

a) $f(x)=x^2+x-1$ en $x = 1$ b) $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$ en $x=-1$

4. Dadas dos funciones *f*(*x*) y *g*(*x*) de las que se conoce *f*(2) = 3, *g*(2) = –1, $g'(-1)=-3$, $g'(2)=0$, $g'(3)=5$, $f'(-1)=2$ y $f'(2)=4$, calcula:

a) $(f+g)'(-1)$ b) $(f\cdot g)'(2)$ c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$ d) $(f\circ g)'(2)$ e) $(g\circ f)'(2)$

5. Halla los valores de *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & \text{si } x\le 0 \\ ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea continua y derivable en *x* = 0.

6. Si $f(x)=\dfrac{1}{2x}$, $g(x)=\sqrt{x+1}$, $h(x)=x^2$, calcula:

a) $(g\circ h)'(2)$ b) $(h\circ g\circ f)'(1)$ c) $(f\circ h\circ g)'(4)$ d) $(g\circ f\circ h)'(x)$

7. Se considera la función $f(x)=x^3+x-11$. Calcula la derivada de la función inversa de *f*(*x*) en *x* = –9.

8. Halla la función derivada de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $a(x)=\text{sen}^2(x)$ c) $c(x)=\arccos^2(x)$ e) $e(x)=\text{tg}(2x)$

b) $b(x)=\text{arc sen}(2x)$ d) $d(x)=\arccos\left(x^2\right)$ f) $f(x)=\text{tg}\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

9. Calcula la derivada de las funciones:

a) $a(x)=\ln(x\cdot\cos x)$ c) $c(x)=\cos(x\cdot\ln x)$ e) $e(x)=x\cdot e^x$ g) $g(x)=2^x\cdot x^2$

b) $b(x)=\ln x\cdot\cos x$ d) $d(x)=e^{2x}$ f) $f(x)=e^{\ln x}$ h) $h(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1}{x}}$.

10. La posición respecto del origen, en metros, de un móvil viene dada por la función $s(t)=3t^2-1$, donde el tiempo *t* viene dado en segundos.

a) Halla la velocidad media del móvil en el intervalo temporal [1, 4].

b) Obtén la velocidad instantánea para *t* = 2 segundos.

11. Teniendo en cuenta que ln(50) ≈ 3,912, calcula mediante aproximación con diferenciales ln(54), ln(46) y ln(40). Compara los resultados obtenidos con los que se obtienen con la calculadora y halla el error relativo que se comete en cada caso. ¿Por qué se comete más error en unos casos que en otros?

12. Se tiene un globo esférico de radio *r* = 2 m. Por efecto de la dilatación de los gases que contiene, su radio aumenta un *dr* = 3 cm. ¿Cuánto ha aumentado su volumen?

Propuesta B

1. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^3$ en los intervalos [–3, 1] y [*a*, *a* + *h*].

2. Halla la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en los puntos que se indica.

a) $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 3$ b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ en $x = -2$ c) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$

3. Calcula la pendiente de la tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos que se indican. ¿Qué ángulo forma la tangente con el eje de abscisas? Halla la ecuación de la normal.

a) $f(x) = 3x + 2$ en $x = 2$ b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ en $x = 0$

4. Dadas dos funciones *f* (*x*) y *g* (*x*) de las que se conoce *f*(2) = *g*(2) = 1, $g'(1) = -\dfrac{3}{4}$, $g'(2) = -\dfrac{1}{3}$, $f'(1) = 2$ y $f'(2) = 4$, calcula:

a) $(f+g)'(1)$ b) $(f \cdot g)'(2)$ c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$ d) $(f \circ g)'(2)$ e) $(g \circ f)'(2)$

5. Halla los valores de *a* y *b* para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 2bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua y derivable en todo **R**.

6. Si $f^{-1}(x) = x \cdot e^x$ en (0, +∞), calcula la derivada de la función *f*(*x*) en *x* = ln 4, es decir, $f'(\ln 4)$, y la ecuación de la recta tangente a *f*(*x*) en ese punto.

7. Calcula la derivada de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $a(x) = \cos^2(x)$ c) $c(x) = \cos(2x)\,\text{tg}(2x)$ e) $e(x) = \text{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

b) $b(x) = \text{arcsen}(x^2)$ d) $d(x) = \sec^2 x$ f) $f(x) = \text{arctg}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

8. Calcula la derivada de las funciones:

a) $a(x) = 5^{2x}$ c) $c(x) = \ln(e^x)$ e) $e(x) = \text{arctg}\left(\sqrt{x}\right)$ g) $g(x) = \log\left(\dfrac{1}{x^2 - 3x}\right)$

b) $b(x) = (x-1)e^x$ d) $d(x) = 3^x \cdot x^3$ f) $f(x) = \ln\sqrt{x}$ h) $h(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-\text{sen}\,x}{1+\text{sen}\,x}}$

9. La curva de ecuación $x^3 + 3x^2y + y^2 + 28 = 0$ pasa por el punto (–2, –2). Calcula la derivada de la función *y* en ese punto. ¿Cuál es la ecuación de la tangente a la curva en ese punto?

10. Halla la derivada de las funciones siguientes aplicando la derivación logarítmica.

a) $f(x) = \sqrt[x]{5-4x}$ b) $g(x) = (3x+1)^{2x}$

11. Halla la función diferencial de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{-7x+4}{x+5}$ b) $x = A\,\text{sen}(\omega t + \phi_0)$

12. Utiliza diferenciales para aproximar el valor de $3{,}001^5 - 4 \cdot 3{,}001^3 - 3 \cdot 3{,}001$ y compara el resultado con el número obtenido directamente con la calculadora.

Soluciones propuesta A

1. $TVM\ f[0,2]=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{0-(-4)}{2}=2$

$TVM\ f[a,a+h]=\dfrac{(a+h)^2-4-(a^2-4)}{h}=h+2a$

2. a) $TVI(-1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(-1+h)^3+1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h^2-3h+3)=3$

b) $TVI(-2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{h-2}{h-1}-2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{h-1}=1$

c) $TVI(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\dfrac{1}{4}$

3. a) $\operatorname{tg}\alpha=m=f'(1)=3\ \Rightarrow\ \alpha=71^\circ\ 33'\ 54''$
Ecuación de la tangente $y-1=3(x-1)$

b) $m=f'(-1)=\dfrac{-2}{(-1+3)^2}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=153^\circ\ 26'\ 6''$

Ecuación de la tangente: $y-1=-\dfrac{1}{2}(x+1)$

4. a) $(f+g)'(-1)=f'(-1)+g'(-1)=-1$

b) $(fg)'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=$
$=4\ (-1)+3\cdot 0=-4$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)=\dfrac{f'(2)g(2)-f(2)g'(2)}{[g(2)]^2}=-4$

d) $(f\circ g)'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(-1)g'(2)=0$

e) $(g\circ f)'(2)=g'(f(2))f'(2)=g'(-1)f'(2)=-12$

5. Para que sea continua en $x=0$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Rightarrow 1=b$

Para que sea derivable en $x = 0$, las derivadas laterales deben coincidir:

$f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow 0=a\ \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^3+1 & \text{si } x\le 0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$

6. $f'(x)=\dfrac{-1}{2x^2},\ g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}},\ h'(x)=2x$

a) $(g\circ h)'(2)=g'[h(2)]h'(2)=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\cdot 4=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

b) $(h\circ g\circ f)'(1)=h'[g(f(1))]\ g'(f(1))f'(1)=-\dfrac{1}{2}$

c) $(f\circ h\circ g)'(4)=f'[h(g(4))]\ h'(g(4))\cdot g'(4)=-\dfrac{1}{50}$

d) $(g\circ f\circ h)'(x)=\dfrac{-\sqrt{2}}{2x^2\sqrt{1+2x^2}}$

7. $f(c)=-9\Rightarrow c^3+c-11=-9\Rightarrow c=1$

$f'(x)=3x^2+1\Rightarrow f'(1)=4$

$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=x$. Derivando:

$f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)=1\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(f^{-1}\right)'(-9)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(-9)\right)}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{4}$

8. a) $a'(x)=\operatorname{sen}2x$ d) $d'(x)=\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

b) $b'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ e) $e'(x)=2\sec^2(2x)$

c) $c'(x)=\dfrac{-2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ f) $f'(x)=\dfrac{-2}{x^2}\sec^2\left(\dfrac{2}{x}\right)$

9. a) $a'(x)=-\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$ e) $e'(x)=e^x(x+1)$

b) $b'(x)=\dfrac{\cos x}{x}-\ln x\cdot\operatorname{sen}x$ f) $f'(x)=1$

c) $c'(x)=-(1+\ln x)\operatorname{sen}(x\ln x)$

d) $d'(x)=2e^{2x}$ g) $g'(x)=2^x\left(\ln 2\cdot x^2+2x\right)$

h) $h(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{1}{2}\ln x\Rightarrow h'(x)=-\dfrac{1}{2x}$

10. a) $v_m=\dfrac{s(4)-s(1)}{4-1}=\dfrac{47-2}{3}=15\ \text{ms}^{-1}$

b) $v_i=s'(2)=6\cdot 2=12\ \text{ms}^{-1}$

11. $y=\ln x\Rightarrow dy=\dfrac{dx}{x},\ f(x+dx)\approx f(x)+dy$

$\ln(54)\approx\ln(50)+\dfrac{1}{50}\cdot 4=3{,}912+0{,}08=3{,}992$

$Er=\dfrac{|3{,}992-3{,}98898|}{3{,}98898}=0{,}0756\%$

$\ln(46)\approx\ln(50)+\dfrac{1}{50}(-4)=3{,}912-0{,}08=3{,}832$

$Er=\dfrac{|3{,}832-3{,}82864|}{3{,}82864}\cdot 100=0{,}0877\%$

$\ln(40)\approx\ln(50)+\dfrac{1}{50}\cdot(-10)=3{,}912-0{,}2=3{,}712$

$Er=\dfrac{|3{,}872-3{,}68888|}{3{,}68888}\cdot 100=4{,}96\%$

cuanto más lejos de $x = 50$, mayor es el error.

12. $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3,\ dV=4\pi r^2dr$

$\Delta V\approx dV=4\pi 2^2\cdot 0{,}03=1{,}508\ \text{m}^3$

Soluciones propuesta B

1. $TVM\ f\left[-3,1\right]=\dfrac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)}=\dfrac{1-(-27)}{4}=7$

$TVM\ f\left[a,a+h\right]=\dfrac{(a+h)^3-a^3}{h}=h^2+3ha+3a^2$

2. a) $TVI(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-1-8}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h+6)=6$

b) $TVI(-2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{-2+h-1}{-2+h}-\dfrac{3}{2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{2(h-2)}=\dfrac{1}{4}$

c) $TVI(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\dfrac{1}{2}$

3. a) $m=f'(2)=3=\text{tg}\alpha\Rightarrow\alpha=71^{\circ}\ 33'\ 54''$

Ecuación de la normal: $y-8=-\dfrac{1}{3}(x-2)$

b) $m=f'(0)=\dfrac{0}{\sqrt{0^2+1}}=0=\text{tg}\alpha=0\Rightarrow\alpha=0^{\circ}$

La tangente es horizontal y la normal es la recta vertical x = 0.

4. a) $(f+g)'(1)=f'(1)+g'(1)=2+\left(-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$

b) $(f\,g)'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=\dfrac{11}{3}$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)=\dfrac{f'(2)g(2)-f(2)g'(2)}{\left[g(2)\right]^2}=\dfrac{13}{3}$

d) $(f\circ g)'(2)=f'(g(2))\cdot g'(2)=f'(1)\ g'(2)=-\dfrac{2}{3}$

e) $(g\circ f)'(2)=g'(f(2))f'(2)=g'(1)f'(2)=-3$

5. Si $x\neq 1$, f es derivable al estar definida por polinomios. Para que sea continua en x = 1:

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Rightarrow$

$\Rightarrow a+b-1=2b-2\Rightarrow a=b-1$

Para que sea derivable en x = 1, las derivadas laterales deben coincidir:

$f'(1^-)=f'(1^+)\Rightarrow 2a+b=2b\Rightarrow 2a-b=0$

Y de aquí: $\begin{cases}a-b=-1\\2a-b=0\end{cases}\Rightarrow a=1,\ b=2$

6. $f^{-1}(c)=\ln 4\Rightarrow c\cdot e^c=\ln 4\Rightarrow c=\ln 2$

$\left(f^{-1}\right)'(x)=e^x(1+x)\Rightarrow\left(f^{-1}\right)'(\ln 2)=2(1+\ln 2)$

$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$. Derivando la función compuesta:

$\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)=1\Rightarrow f'(\ln 4)=$

$=\dfrac{1}{\left(f^{-1}\right)'(f(\ln 4))}=\dfrac{1}{\left(f^{-1}\right)'(\ln 2)}=\dfrac{1}{2(1+\ln 2)}$

Ec. tangente : $y-\ln 2=\dfrac{1}{2(1+\ln 2)}(x-\ln 4)$

7. a) $a'(x)=-\text{sen}\,2x$ c) $c'(x)=2\cos(2x)$

b) $b'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ d) $d'(x)=2\,\text{tg}\,x\ \sec^2 x$

e) $e'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{-1}{x^2+1}$

f) $f'(x)=\dfrac{-2}{(1+x)^2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}=\dfrac{-1}{1+x^2}$

8. a) $a'(x)=2\ln 5\cdot 5^{2x}$ e) $e'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(1+x^2\right)}$

b) $b'(x)=x\cdot e^x$ f) $f'(x)=\dfrac{1}{2x}$

c) $c'(x)=1$ g) $g'(x)=\dfrac{-2x+3}{\left(x^2-3x\right)}\cdot\dfrac{1}{\ln 10}$

d) $d'(x)=3^x x^2\left(x\ln 3+3\right)$

h) $h(x)=\dfrac{1}{2}\left[\ln(1-\text{sen}\,x)-\ln(1+\text{sen}\,x)\right]$

$h'(x)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{-\cos x}{1-\text{sen}\,x}-\dfrac{\cos x}{1+\text{sen}\,x}\right]=-\dfrac{1}{\cos x}$

9. $3x^2+6xy+3x^2y'+2yy'=0\Rightarrow y'=\dfrac{-3x^2-6xy}{3x^2+2y}$

$f'(-2,-2)=-\dfrac{9}{2}$. Ecuación: $y+2=-\dfrac{9}{2}(x+2)$

10. a) $\ln f(x)=\dfrac{1}{x}\ln(5-4x)\Rightarrow$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\dfrac{1}{x^2}\ln(5-4x)+\dfrac{-4}{x(5-4x)}$

$f'(x)=\sqrt[x]{5-4x}\left[-\dfrac{1}{x^2}\ln(5-4x)+\dfrac{-4}{x(5-4x)}\right]$

b) $\ln g(x)=2x\cdot\ln(3x+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow g'(x)=(3x+1)^{2x}\left[2\ln(3x+1)+\dfrac{6x}{3x+1}\right]$

11. a) $dy=\dfrac{-39}{(x+5)^2}dx$

b) $dx=A\omega\cos(\omega t+\phi_0)dt$

12. $f(3+dx)=f(3)+\Delta y\approx f(3)+dy$

$dy=(5x^4-12x^2-3)dx$; $dy(3)=294\,dx$

$f(3{,}001)=3{,}001^5-4\cdot 3{,}001^3-3\cdot 3{,}001\approx$

$\approx f(3)+dy=126+294\cdot 0{,}001=126{,}294$

11 Funciones derivables

Propuesta A

1. La función $f(x)=\sqrt{\ln(\cos x)}$ existe para infinitos valores de *x*, pero no es derivable en ninguno. ¿Por qué?

2. Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=\left|x^3-3x^2\right|+5x-3$ haciendo un estudio especial en los puntos $x = 0$ y $x = 3$.

3. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y=x^2-5x+6$ que sea paralela a la recta de ecuación $3x-y+1=0$. ¿Cuál es el punto de tangencia?

4. Dada la función $f(x)=3x^2+4x-3$, halla el valor medio establecido por el teorema de Lagrange en el intervalo [1, 3].

5. Calcula el valor de *m, n* y *k*, con $k < 0$, para que la función $f(x)=\begin{cases}3x^2+3 & \text{si } x\le 0\\ x^3+mx+n & \text{si } x>0\end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [*k*, 1] y determina el valor $x = c$ que verifica la tesis del teorema.

6. Determina los valores de *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x-3} & \text{si } x<1\\ x^2+b & \text{si } x\ge 1\end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo [–1, 2] y halla el valor intermedio correspondiente.

7. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-4x^2-12x}{x^2-6x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,e^{2x}-e^{2x}-x+1}{e^{2x}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-\cos x}{1-\cos^2 x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}$

8. De todos los sectores circulares de perímetro 4, determina la amplitud y el radio del que tiene área máxima.

9. La producción de cierta hortaliza en un invernadero depende de la temperatura del mismo, según la expresión $Q(x) = (x + 1)^2(32 - x)$ en donde *x* representa la temperatura en ºC y *Q*(*x*) la producción de hortalizas en kg. Se prevé que la temperatura no pueda bajar de 0 ºC para evitar las heladas.

a) ¿Cuál deberá ser la temperatura óptima del invernadero para obtener la mayor cantidad de hortalizas?

b) ¿Qué cantidad de hortalizas se obtendrá en este último caso?

10. Estudia la curvatura y determina los puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x)=x-\dfrac{2}{x}-3\ln x$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$

11. Determina los extremos relativos y los intervalos de monotonía de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

b) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$

Propuesta B

1. La función $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen} x-1}$ existe para infinitos valores de *x*, pero no es derivable en ninguno. ¿Por qué?

2. Determina el valor de *k* para que la función $f(x)=\begin{cases} kx-x^2 & \text{si } x\le 2 \\ x^3-3x^2+6 & \text{si } x>2 \end{cases}$ sea derivable en *x* = 2 y, si fuera posible, calcula la ecuación de la tangente a la gráfica de la función en ese punto.

3. Desde el punto *P*(1, 0) se trazan las tangentes a la curva de ecuación $y=x^2+2$. Determina los puntos de tangencia y las ecuaciones de dichas tangentes.

4. Determina la ecuación de la parábola que pasa por los puntos *A*(0, 1), *B*(2, 3) y *C*(–2, 7) y halla un punto en el segmento de parábola de extremos *A* y *B* en el que la tangente a la curva sea paralela a la cuerda determinada por *A* y *B.*

5. Calcula el valor de *a, b* y *k*, con *k* > 1, para que la función $f(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } x\le 1 \\ ax^2+b(x-1)+4 & \text{si } x>1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [–2, *k*] y determina el valor *x* = *c* que verifica la tesis del teorema.

6. Demuestra que para cualquier número real *p,* la ecuación $2x^5+x+p=0$ tiene una y solamente una solución real.

7. Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+4x^2+4x}{3x^2+6x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x - x}{x-\operatorname{sen} 2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$

8. Dado un segmento $\overline{AC}=a$, divídelo en dos partes $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de modo que construyendo un cuadrado *ABED* sobre $\overline{AB}$ y un triángulo equilátero *BCF* sobre $\overline{BC}$ la suma de sus áreas sea mínima.

9. Halla, utilizando métodos de optimización de funciones, la distancia del punto *P*(2, 1, 6) a la recta de ecuación $r:\begin{cases} x=1-2k \\ y=-2+k \\ z=2+2k \end{cases}$. Determina el punto de la recta más próximo al punto *P.*

10. Estudia la curvatura y determina los puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$

b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

11. Determina los extremos relativos y los intervalos de monotonía de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$

b) $f(x)=x-\dfrac{2}{x}-3\ln x$

Soluciones propuesta A

1. El dominio $D(f) = \{x \in \mathbf{R},\ x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ está formado por puntos aislados. Por tanto, la función no es continua ni, por ende, derivable, en ningún punto.

2. La función es composición del valor absoluto y funciones polinómicas; por tanto, es continua en todo **R** y derivable excepto, quizás, en $x = 0$ y en $x = 3$, valores que anulan el polinomio afectado por el valor absoluto.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^3+3x^2+5x}{x} = 5$$

En $x = 3$ se estudian las derivadas laterales.

$$f'(3^-) = \lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{-x^3+3x^2+5x-15}{x-3} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(5-x^2)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}(5-x^2) = -4$$

$$f'(3^+) = \lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+5x-15}{x-3} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+5)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}(x^2+5) = 14$$

Por tanto, f es derivable en $\mathbf{R} - \{3\}$.

3. $m = f'(a) \Rightarrow 3 = 2a-5 \Rightarrow a = 4$

$f(a) = f(4) = 2$. El punto de tangencia es (4, 2) y la recta tangente $y-2 = 3(x-4)$.

4. La función $f(x)$ es continua y derivable porque es polinómica, por tanto, existe $c \in [1, 3]$ tal que $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{36-4}{2} = 16 = f'(c) = 6c+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 2 \in (1, 3)$

5. La función debe ser continua en $[k, 1]$ y derivable en $(k, 1)$. Basta con estudiar en $x = 0$:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow 3 = n$

$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow 0 = m$

Además $f(k) = f(1) \Rightarrow 3k^2+3 = 4 \Rightarrow k = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

El valor de c que verifica la tesis es $c = 0$, ya que $0 \in \left(-\sqrt{\dfrac{1}{3}},\ 1\right)$ y $f'(0) = 0$.

6. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \dfrac{a}{-2} = 1+b$

$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow \dfrac{-a}{4} = 2 \Rightarrow a = -8$, $b = 3$

$\dfrac{f(2)-f(-1)}{2+1} = \dfrac{7-2}{3} = \dfrac{5}{3} = f'(c)$.

Hay dos posibilidades: $\dfrac{5}{3} = \dfrac{8}{(c-3)^2} \Rightarrow c = 3 \pm \sqrt{\dfrac{24}{5}}$

Pero solo $c = 3-\sqrt{\dfrac{24}{5}} \in (-1, 1)$

De la otra posibilidad, $\dfrac{5}{3} = 2c \Rightarrow c = \dfrac{5}{6} \notin (1, 2)$

7. a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3-4x^2-12x}{x^2-6x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{3x^2-8x-12}{2x-6} = 2$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x e^{2x}-e^{2x}-x+1}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0}\dfrac{2xe^{2x}-e^{x}-1}{2e^{2x}} = -1$

c) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-\cos x}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^x+\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x\cos x} = +\infty$

d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{2e^x(e^x-1)} =$

$= \lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2e^x(e^x-1)+2e^xe^x} = \dfrac{1}{2}$

8. $S = \dfrac{r^2\alpha}{2}$. Pero $2r+\alpha r = 4 \Rightarrow \alpha = \dfrac{4-2r}{r}$

$S = \dfrac{1}{2}r^2\dfrac{4-2r}{r} = 2r-r^2 \Rightarrow S' = 2-2r$

El dominio de la función es (0, 2) y la derivada se anula para $r = 1$ y $S''(1) < 0$, por lo que hay un máximo relativo para $r = 1$ y $\alpha = 2$.

9. El dominio es $D(f) = [0, 32]$ ya que no puede haber una producción negativa. La derivada es $Q'(x) = 3(x+1)(21-x)$, que se anula para $x = 21 \in D(f)$. Como $Q(0) = 32$, $Q(21) = 5324$ y $Q(32) = 0$, la máxima producción es 5324 kg y se consigue a 21 ºC.

10. a) $D(f) = (0, +\infty)$

$f'(x) = 1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x}$

$f''(x) = \dfrac{-4+3x}{x^3}$

	0 → $\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$ → $+\infty$
f''	–	+
f	∩	∪

Punto de inflexión: $\frac{4}{3}$

b) $D(f) = \mathbf{R}$

$f'(x) = \dfrac{2x-x^2-1}{e^x}$

$f''(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{e^x}$

	$-\infty$ → 1	1 → 3	3 → $+\infty$
f''	+		+
f	∪	∩	∪

Ptos. de inflexión: 1, 3

11. a) $D(f) = (0, +\infty)$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

	0 → e	e → $+\infty$
f'	+	–
f	crece	decrece

Máximo relativo: e

b) $D(f) = \mathbf{R}$

$f(x) = \sqrt{x^2-2x+5}$

$f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

	$-\infty$ → 1	1 → $+\infty$
f'	–	+
f	decrece	crece

Mínimo relativo: 1

Soluciones propuesta B

1. El dominio, $D(f) = \{x \in \mathbf{R}, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, está formado por puntos aislados. Por tanto, la función no es continua ni, por ende, derivable, en ningún punto.

2. Para que sea derivable ha de ser continua.
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 2k-4=2 \Rightarrow k=3$
Para $k = 3$, $f'(2^-) = -1$ y $f'(2^+) = 0$, f no es derivable en $x = 2 \Rightarrow$ no tiene tangente.

3. Las tangentes en el punto $A(a, f(a))$ tienen una pendiente $m = f'(a) = 2a$, luego su ecuación es $y = 2a(x-1)$ ya que pasa por el punto (1, 0). La intersección de la tangente con la curva tiene que ser un único punto.
$\begin{cases} y = x^2+2 \\ y = 2a(x-1) \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2ax + 2(a+1) = 0$. Como la solución es doble, el discriminante es cero: $4a^2 - 8(a+1) = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{3}$

Para $a = 1+\sqrt{3}$, el punto de tangencia y la recta tangente son, respectivamente,
$A(1+\sqrt{3},\ 6+2\sqrt{3})$ e $y = \left(2+2\sqrt{3}\right)(x-1)$.

Para $a = 1-\sqrt{3}$ el punto de tangencia y la recta tangente son, respectivamente,
$A(1-\sqrt{3},\ 6-2\sqrt{3})$ e $y = \left(2-2\sqrt{3}\right)(x-1)$.

4. La ecuación será $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} c = 1 \\ 4a+2b+c=3 \\ 4a-2b+c=7 \end{cases}$

se obtiene $f(x) = x^2 - x + 1$.

$\frac{3-1}{2-0} = f'(c) \Rightarrow 1 = 2c-1 \Rightarrow c = 1 \in (0,\ 2)$

5. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow 3 = a+4 \Rightarrow a = -1$

$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 3 = -2+b \Rightarrow b = 5$

$f(-2) = f(k) \Rightarrow -6 = -k^2 + 5(k-1) + 4 \Rightarrow k = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$

$f'(c) = 0 \Rightarrow -2c+5 = 0 \Rightarrow c = \frac{5}{2} \in \left(-2, \frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)$

6. Si se considera la función $f(x) = 2x^5 + x + p$ cuya derivada, $f'(x) = 10x^4 + 1 > 0\ \ \forall x$, indica que es monótona creciente. Como
$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(2x^5 + x + p\right) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(2x^5 + x + p\right) = +\infty$, la función corta solo una vez al eje de abscisas.

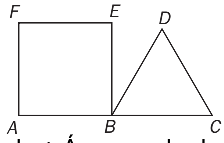
7. a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+4x^2+4x}{3x^2+6x} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{3x^2+8x+4}{6x+6} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - x}{x - \operatorname{sen} 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sec^2 2x - 1}{1 - 2\cos 2x} = -1$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln\frac{a}{b}$

8. Llamando $x = BC$,
$AB = a - x$
Lado del cuadrado:
$l = a - x$



Área total = Área triángulo + Área cuadrado:
$S = S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + (a-x)^2$, con $D = (0,\ a)$

$S' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 2(a-x) = 0 \Rightarrow x_a = \frac{4a}{4+\sqrt{3}}$. Como

$S(0) = a^2 > S(a) = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4} > S(x_a) = \frac{4\sqrt{3}+9}{(4+\sqrt{3})^2}a^2$

Área mínima: $AB = \frac{\sqrt{3}a}{4+\sqrt{3}}$, $BC = \frac{4a}{4+\sqrt{3}}$

9. Punto genérico de r: $A(1-2k,\ -2+k,\ 2+2k)$.
Hay que minimizar
$d(k) = \left|\overrightarrow{PA}\right| = \sqrt{(-1-2k)^2 + (-3+k)^2 + (-4+2k)^2}$

$d'(k) = \frac{9(k-1)}{\sqrt{9k^2 - 18k + 26}} = 0 \Rightarrow k = 1$, que da el mínimo de $d(k)$: $d(P, r) = \sqrt{17}$ y $A(-1,\ -1,\ 4)$.

10. a) $D(f) = \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{(x^2-2x+5)^2}}$

$f''(x) = \frac{4}{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}} > 0\ \ \forall x \in \mathbf{R}$

f no tiene puntos de inflexión y es cóncava hacia arriba ($\cup$) en todo **R**.

b) $D(f) = (0,\ +\infty)$

$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$,

$f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$

	$-\infty$ … $\sqrt{e^3}$	$\sqrt{e^3}$ … $+\infty$
f''	–	+
f	$\cap$	$\cup$

Inflexión: $\sqrt{e^3}$

11. a) $D(f) = \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{-(x-1)^2}{e^x} \le 0\ \ \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ siempre decrece y no tiene extremos relativos.

b) $D(f) = (0,\ +\infty)$

$f'(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2}$

	$-\infty$ … 1	1 … 2	2 … $+\infty$
f'	+	–	+
f	crece	decrece	crece

Máximo relativo: 1
Mínimo relativo: 2

12 Representación de funciones

Propuesta A

1. Determina el dominio, los puntos de discontinuidad, los puntos singulares y los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^3+3x^2}$ b) $g(x)=\ln(\text{sen}(2x))$

2. Halla los puntos de corte con los ejes y el signo de las funciones:

a) $f(x)=1+\text{tg}\,x$ b) $g(x)=\dfrac{2-e^x}{2+e^x}$

3. Determina el período de las funciones:

a) $f(x)=\text{sen}\,3x$ b) $g(x)=4\cos 2x+\text{sen}\,3x$

4. Estudia las simetrías de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-9}$ b) $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{x\cos x}$ c) $h(x)=\ln(x^2-1)$

5. Halla las asíntotas de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x^3}{1+x^2}$ b) $g(x)=\dfrac{4+e^x}{1-e^x}$

6. Representa conjuntamente las gráficas de las funciones polinómicas $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(x^3-3x\right)$, $f'(x)$ y $f''(x)$.

7. Realiza el estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y represéntalas.

a) $f(x)=x^4-3x^2-4$ b) $g(x)=3(x-1)-(x-1)^3$

8. Representa las siguientes funciones racionales e irracionales tras realizar el estudio completo de las mismas.

a) $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+1}$ b) $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2}$ c) $h(x)=\sqrt{x^2-x-6}$

9. Haz un estudio completo y representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=(x+2)e^x$ b) $g(x)=\ln\left(x^2+x-2\right)$

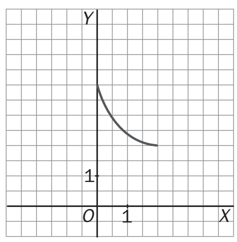
10. Realiza el estudio completo de las siguientes funciones trigonométricas y represéntalas.

a) $f(x)=\cos^2 x\,\text{sen}\,x$ b) $g(x)=\text{sen}\,x\,\text{tg}\,x$

11. La gráfica de la derecha corresponde a una función $f(x)$. Representa, razonadamente, las gráficas de las funciones:

a) $-f(x)$ c) $2+f(x)$ e) $f^{-1}(x)$

b) $2f(x)$ d) $f(x+2)$ f) $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$



Propuesta B

1. Determina el dominio, los puntos de discontinuidad, los puntos singulares y los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}$ b) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}}$

2. Halla los puntos de corte con los ejes y el signo de las funciones:

a) $f(x)=2-\ln(x-1)$ b) $g(x)=\dfrac{x+2}{e^x}$

3. Determina el período de las funciones:

a) $f(x)=\text{sen}^2\, x+\cos x$ b) $g(x)=\left(\dfrac{x}{2}-\text{Ent}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$

4. Estudia las simetrías de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{\ln\left|x^2-5\right|}{x}$ b) $g(x)=\dfrac{x^3+2x}{x^2-1}$ c) $h(x)=\text{tg}(x^2+1)$

5. Halla las asíntotas de las funciones:

a) $f(x)=x-\dfrac{2}{x}-3\ln x$ b) $g(x)=\sqrt{x^2-x}$

6. Representa conjuntamente las gráficas de las funciones polinómicas $f(x)=\dfrac{1}{4}\left(4x^2-x^4\right)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ y compara el signo de $f'(x)$ y $f''(x)$ con el crecimiento y la curvatura de $f(x)$.

7. Representa las siguientes funciones polinómicas tras realizar un estudio completo de las mismas.

a) $f(x)=x^3-3x+2$ b) $g(x)=(x+1)-(x+1)^3$

8. Haz el estudio completo y representa las siguientes funciones racionales e irracionales.

a) $f(x)=\dfrac{x-4}{2x+4}$ b) $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ c) $h(x)=\sqrt{9-x^2}$

9. Realiza el estudio de las funciones siguientes y represéntalas.

a) $f(x)=(x^2-1)e^x$ b) $g(x)=\ln\left(4-x^2\right)$

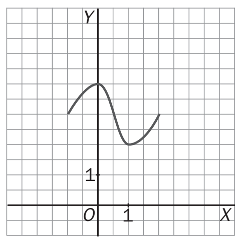
10. Representa las siguientes funciones trigonométricas tras realizar su estudio completo.

a) $f(x)=\dfrac{1}{\text{sen}(2x)}$ b) $g(x)=\text{sen}^2\, x\cos x$

11. La gráfica de la derecha corresponde a una función $f(x)$. Representa, razonadamente, las gráficas de las funciones:

a) $-f(x)$ c) $f(x)-3$ e) $f^{-1}(x)$

b) $\dfrac{f(x)}{2}$ d) $f(x+3)$ f) $f(2x)$



Soluciones propuesta A

1. a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-3, 0\}$. Es continua en todo D.

$f'(x) = \dfrac{2(3-x)^2}{x^3(x+3)^2} \Rightarrow$ puntos singulares y críticos: $x = \pm\sqrt{3}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbf{R} \,/\, \text{sen}\,2x > 0\} = \left(k\pi,\ k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$

Continua en $D(f)$. $g'(x) = 2\cot g(2x) \Rightarrow$ ptos. singulares y críticos: $x = \dfrac{\pi}{4}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$

2. a) Eje X: $\left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Eje Y: (0, 1)

$f'(x) > 0$ si $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

b) Eje X: (ln 2, 0). Eje Y: $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$

$g(x) > 0$ si $x \in (2, +\infty)$

3. a) $f(x) = \text{sen}\,3x = \text{sen}(3x + 2\pi) = \text{sen}\left(3\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$

Período $T = \dfrac{2\pi}{3}$

b) $g(x) = 4\cos 2x + \text{sen}\,3x = g_1(x) + g_2(x)$

$T_1 = \pi,\ T_2 = \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow T = \text{m.c.m.}(T_1, T_2) = 2\pi$

4. a) $f(-x) = \dfrac{-x^3 + 2x^2}{x^2 - 9} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ Ni par ni impar

b) $g(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{-x\cos(-x)} = -g(x) \Rightarrow$ Impar

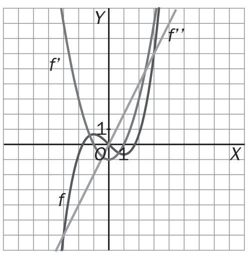
c) $h(-x) = \ln((-x)^2 - 1) = h(x) \Rightarrow$ Par

5. a) $f(x) = \dfrac{2x^3}{1+x^2} = 2x - \dfrac{2x}{x^2+1}$. Solo tiene la asíntota oblicua $y = 2x$.

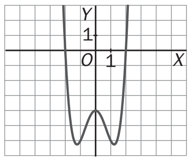
b) Vertical en $x = 0$, al ser $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \pm\infty$.

Horizontales: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4+e^x}{1-e^x} = 4 \Rightarrow y = 4 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4+e^x}{1-e^x} = -1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$

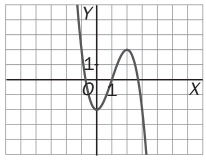
6.



7. a)



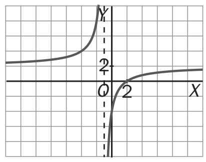
b)



8. a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-1\}$

Cortes: (2, 0), (0, –4)

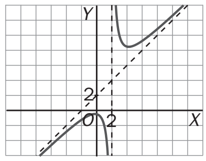
AV: $x = -1$, AH: $y = 2$



b) $D(g) = \mathbf{R} - \{2\}$

Cortes: $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

AV: $x = 2$, AO: $y = x + 2$

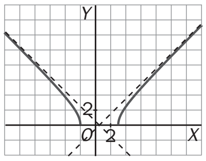


c) $D(f) = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

Cortes: (–2, 0), (3, 0)

AO: $y = x - \dfrac{1}{2}$, si $x \to +\infty$

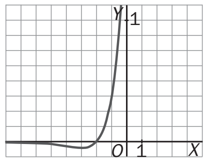
$y = \dfrac{1}{2} - x$, si $x \to -\infty$



9. a) $D(f) = \mathbf{R}$

Cortes: (–2, 0), (0, 2)

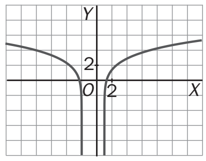
AH: $y = 0$, si $x \to -\infty$



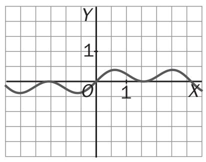
b) $D(g) = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

Cortes: no hay

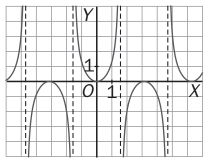
AV: $x = -2$, $x = 1$



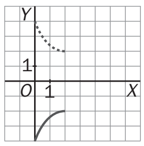
10. a)



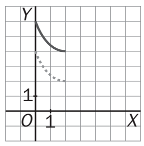
b)



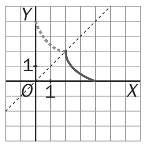
11. a)



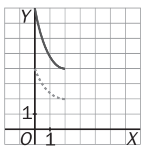
c)



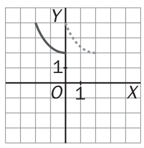
e)



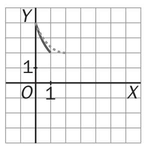
b)



d)



f)



Soluciones propuesta B

1. a) $D(f) = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$. Continua en $D(f) - \{3\}$. $f'(x) = \dfrac{5}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}}(x-3)^{-\frac{1}{2}} \neq 0 \Rightarrow$ no hay puntos singulares. Tampoco hay críticos.

b) $D(g) = [3, +\infty)$. Continua en $D(g) - \{3\}$.

$g'(x) = \dfrac{5}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}}(x-3)^{-\frac{1}{2}} \neq 0 \Rightarrow$ no hay puntos singulares. Tampoco hay críticos.

2. a) Eje X: $\left(1+e^2, 0\right)$. Eje Y: no hay.

$f'(x) > 0$ si $x \in \left(1, 1+e^2\right)$

b) Eje X: (–2, 0). Eje Y: (0, 2)

$g(x) > 0$ si $x \in (2, +\infty)$

3. a) $f(x) = \text{sen}^2 x + \cos x = f_1(x) + f_2(x)$

$T_1 = \pi,\ T_2 = 2\pi \Rightarrow T = \text{m.c.m}(T_1, T_2) = 2\pi$

b) $T = 2$ porque

$$h(x+2) = \left(\frac{x+2}{2} - \text{Ent}\left(\frac{x+2}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{x}{2} + 1 - \text{Ent}\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{x}{2} - \text{Ent}\left(\frac{x}{2}\right) = h(x)$$

4. a) $f(-x) = \dfrac{\ln\left|x^2-5\right|}{-x} = -f(x) \Rightarrow$ Impar

b) $h(-x) = \dfrac{-x^3-2x}{x^2-1} = -h(x) \Rightarrow$ Impar

c) $h(-x) = \text{tg}((-x)^2+1) = h(x) \Rightarrow$ Par

5. a) Vertical en $x = 0$, ya que

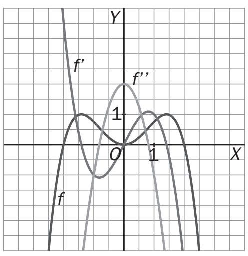
$$\lim_{x\to 0^+}\left(x - \frac{2}{x} - 3\ln x\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-2-3x\ln x}{x}\right) = -\infty$$

b) $m_+ = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = 1,\ m_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = -1$

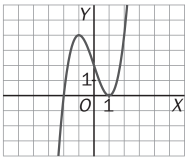
$$n_\pm = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-x} \mp x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\mp x}{\sqrt{x^2-x}+x} = \mp\frac{1}{2}$$

$$\text{Asíntotas oblicuas: } \begin{cases} y = x - \dfrac{1}{2} & \text{si } x \to +\infty \\ y = -x + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \to -\infty \end{cases}$$

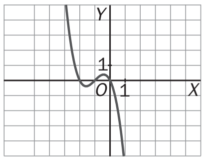
6.



7. a)



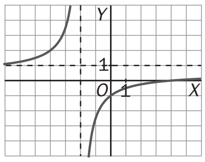
b)



8. a) $D(f)$ = **R** – {–2}

Cortes: (4, 0), (0, –1)

AV: x = –2, AH: $y = \dfrac{1}{2}$

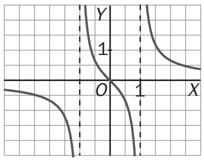


b) $D(g)$ = **R** – {–1, 1}

Cortes: (0, 0)

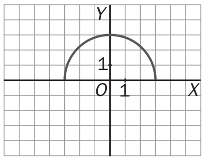
AV: x = –1, x = 1

AH: y = 0



c) $D(h)$ = [–3, 3]

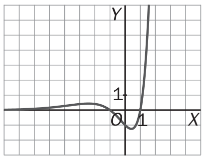
Cortes: (–3, 0), (3, 0), (0, 3)



9. a) $D(f)$ = **R**

Cortes: (–1, 0), (1, 0), (0, –1)

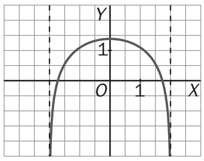
AH: y = 0, si $x \to -\infty$



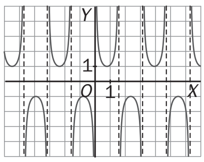
b) $D(g)$ = (–2, 2)

Cortes: (0, ln 4)

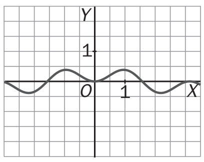
AV: x = –2, x = 2



10. a)

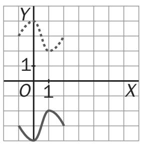


b)

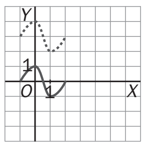


11.

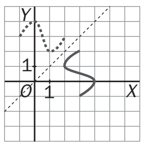
a)



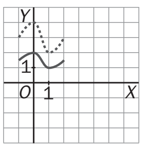
c)



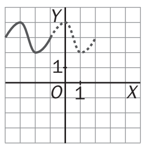
e)



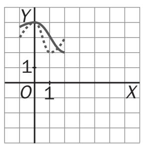
b)



d)



f)



En el apartado e se representa la correspondencia inversa de f al no existir f^{-1}.

13 Cálculo de primitivas

Propuesta A

1. De todas las funciones primitivas de $f(x) = 15x^2 - 2$, escribe la expresión algebraica de la que pasa por el punto $P(-2,-23)$.

2. La función $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $M(-3,\ 17)$ y su derivada segunda es $f''(x) = 6x + 6$. Determina de qué función se trata y halla las coordenadas del punto de inflexión y del mínimo relativo de la misma. ¿En qué punto corta la gráfica de la función al eje de ordenadas?

3. En un determinado movimiento se sabe que la aceleración es constante $a = -10$ ms^{-2} y que a los 2 s el móvil se encuentra en una posición $s(2) = 25$ m y lleva una velocidad de 15 m/s. Determina:

a) La expresión de la velocidad en cualquier instante.

b) La velocidad inicial.

c) La expresión de la posición en cualquier instante.

d) La posición inicial.

e) La posición y la velocidad a los 4 segundos.

4. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{6}{x+1}\,dx$ c) $\int \frac{\cos x}{3+\operatorname{sen} x}\,dx$ e) $\int \frac{1}{x \ln x}\,dx$

b) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2\right) dx$ d) $\int x \cdot e^{x^2+2}\,dx$ f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

5. Resuelve aplicando el método de integración por partes las integrales:

a) $\int \cos^2 x\ dx$ b) $\int (\ln x)^3\,dx$ c) $\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

6. Resuelve por descomposición en fracciones simples las integrales de las funciones racionales:

a) $\int \frac{4}{x^2-4}\,dx$ b) $\int \frac{2x-1}{x+2}\,dx$ c) $\int \frac{2x+2}{(x-1)^2}\,dx$

7. Calcula las integrales de las funciones racionales:

a) $\int \frac{x-1}{x^2+4x+3}\,dx$ b) $\int \frac{x-1}{x^2+4x+4}\,dx$ c) $\int \frac{x-1}{x^2+4x+5}\,dx$

8. Calcula las integrales de las funciones racionales con raíces complejas en el denominador:

a) $\int \frac{2x^3}{1+x^2}\,dx$ b) $\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$ c) $\int \frac{3x^2+4x-1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$

9. Calcula las integrales de las funciones trigonométricas:

a) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$ b) $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$ c) $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

10. Calcula las integrales:

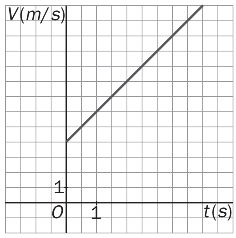
a) $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$ b) $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x\ dx$ c) $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

Propuesta B

1. Escribe la expresión algebraica de la función $F(x)$ sabiendo que $f(x) = F'(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ y que pasa por el punto $Q\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$.

2. La derivada de una función $f(x)$ es $f'(x) = 6x^2 - 4x + 5$ y se sabe que la función pasa por el punto $P(1, 0)$. Halla la función y calcula $f(0)$.

3. En un determinado movimiento rectilíneo la velocidad en función del tiempo viene dada por la gráfica de la derecha. Además se sabe que para t = 4 s, el móvil se encuentra en la posición $s(4)$ = 50 m. Determina:



a) La velocidad inicial.

b) La expresión de la velocidad en cualquier instante.

c) La expresión de la posición en cualquier instante.

d) La posición inicial.

e) La aceleración.

4. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \left(10x + \sqrt{x}\right) dx$ c) $\int \frac{1}{\cos^2 x \operatorname{tg} x} dx$ e) $\int \frac{5 \ln x}{x} dx$

b) $\int \left(x^2 + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$ d) $\int e^x (e^x + 2)^4 dx$ f) $\int \frac{2x+5}{x^2+1} dx$

5. Resuelve aplicando el método de integración por partes a las siguientes integrales:

a) $\int \operatorname{arctg} 2x \, dx$ b) $\int (x+1) e^x \, dx$ c) $\int \ln x^2 \, dx$

6. Resuelve por descomposición en fracciones simples las integrales de las funciones racionales:

a) $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$ b) $\int \frac{2x+1}{x+4} dx$ c) $\int \frac{x+2}{(x+1)^2} dx$

7. Calcula las integrales de las funciones racionales:

a) $\int \frac{x-1}{x^2-6x+8} dx$ b) $\int \frac{x-1}{x^2-6x+9} dx$ c) $\int \frac{x-1}{x^2-6x+10} dx$

8. Calcula las integrales de las funciones racionales con raíces complejas en el denominador:

a) $\int \frac{2x^2}{4+x^2} dx$ b) $\int \frac{x}{x^2-2x+5} dx$ c) $\int \frac{4x^2-x+3}{x^3-x^2+x-1} dx$

9. Calcula las integrales de las funciones trigonométricas:

a) $\int \operatorname{sen} 3x \cos(2x-5) \, dx$ b) $\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x} dx$ c) $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^5 x} dx$

10. Calcula las integrales:

a) $\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} dx$ b) $\int \frac{3^x}{3^{2x}-1} dx$ c) $\int x\sqrt{2x+1} \, dx$

Soluciones propuesta A

1. $F(x)=\int\left(15x^2-2\right)dx=5x^3-2x+C$

$F(-2)=5\cdot(-2)^3-2\cdot(-2)+C=-23\Rightarrow$

$\Rightarrow C=13\Rightarrow F(x)=5x^3-2x+13$

2. $f''(x)=6x+6\Rightarrow f'(x)=3x^2+6x+C$. Como hay un máximo relativo en $x=-3$, entonces $f'(-3)=0\Rightarrow C=-9$ y es $f'(x)=3x^2+6x-9$.

$f(x)=x^3+3x^2-9x+K$ y como $f(-3)=17\Rightarrow$

$\Rightarrow K=-10\Rightarrow f(x)=x^3+3x^2-9x-10$.

Inflexión: $6x+6=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow I(-1,1)$

$f'(x)=3x^2+6x-9$

$\Rightarrow\begin{cases}x_1=-3,\ \text{máximo}(-3,\ 17)\\ x_2=1,\ \text{mínimo}(1,-15)\end{cases}$

Punto de corte con el eje Y: P (0, –10)

3. $v=\int a\,dt=\int -10\,dt=-10t+C$,

$v(2)=15\Rightarrow C=35$

$s=\int v dt=\int(-10t+35)dt=-5t^2+35t+k$

$s(2)=25\Rightarrow -20+70+K=25\Rightarrow K=-25$

a) $v(t)=-10t+35$ m/s

b) $v_0=v(0)=35$ m/s

c) $s(t)=-5t^2+35t-25$ m

d) $s_0=s(0)=-25$ m

e) $s(4)=35$ m, $v(4)=-5$ m/s

4. a) $I=6\ln|x+1|+C$

b) $I=-\frac{1}{x}+\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+K$

c) $I=\ln|3+\operatorname{sen}x|+K$

d) $I=\frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2+2}dx=\frac{1}{2}e^{x_2+2}+C$

e) $I=\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}dx=\ln|\ln x|+C$

f) $I=\sqrt{x^2+1^2}+C$

5. a) $I=\operatorname{sen}x\cos x+\int\operatorname{sen}^2x\,dx=\operatorname{sen}x\cos x+$

$+\int(1-\cos^2x)dx=\operatorname{sen}x\cos x+x-I\Rightarrow$

$\Rightarrow I=\frac{x+\operatorname{sen}x\cos x}{2}+C$

b) $I=x(\ln x)^3-\int 3(\ln x)^2dx$

$=x(\ln x)^3-3x(\ln x)^2+\int 6\ln x\,dx=$

$=x\left[(\ln x)^3-3(\ln x)^2+6\ln x+6\right]+C$

c) $I=-x\operatorname{cotg}x+\int\operatorname{cotg}x\,dx=$

$=-x\operatorname{cotg}x+\ln|\operatorname{sen}x|+C$

6. a) $I=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

b) $I=\int\left(2-\frac{5}{x+2}\right)dx=2x-5\ln|x+2|+C$

c) $I=\int\frac{2x+2}{(x-1)^2}dx=\int\frac{2x-2+4}{(x-1)^2}dx=$

$=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}\right)dx=2\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+C$

7. a) $\int\frac{x-1}{x^2+4x+3}dx=\int\left(\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x+1}\right)dx=$

$=2\ln|x+3|-\ln|x+1|+C$

b) $I=\int\frac{x+2-3}{(x+2)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}\right)dx=$

$=\ln|x+2|+3(x+2)^{-1}+C$

c) $I=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4-6}{x^2+4x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx-$

$-\int\frac{3}{1+(x+2)^2}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)-$

$-3\operatorname{arctg}(x+2)+C$

8. a) $I=\int\left(2x-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=x^2-\ln(x^2+1)+C$

b) $I=\int\frac{1}{4+(x-1)^2}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$

c) $I=\int\left(\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$

$=3\ln|x-1|+4\operatorname{arctg}x+C$

9. a) $I=\int\left[(1+\operatorname{tg}^2x)-1\right]dx=\operatorname{tg}x-x+C$

b) $I=\int\frac{(1+\operatorname{sen}x)^2}{1-\operatorname{sen}^2x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{2\operatorname{sen}x}{\cos^2x}+\right.$

$\left.+\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\right)dx=2\operatorname{tg}x+2\sec x-x+C$

c) $I=\int\operatorname{sen}^{-2}x\cos x\,dx=-\operatorname{cosec}x+C$

10. a) Si $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ y $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$I=\int\frac{1}{1+\cos x}dx=\int\frac{1+t^2}{2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=t+C=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

b) $I=\frac{1}{4}\int(2\operatorname{sen}x\cos x)^2dx=\frac{1}{4}\int\operatorname{sen}^2 2x\,dx=$

$=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{\operatorname{sen}4x}{4}\right)+C$

c) $I=\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx==\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=$

$=x-\ln\left(1+e^x\right)+C$

Soluciones propuesta B

1. $F(x)=\int(\operatorname{sen}x+\cos x)\,dx=-\cos x+\operatorname{sen}x+C$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+C=1+C=-2 \Rightarrow$

$C=-3\Rightarrow F(x)=-\cos x+\operatorname{sen}x-3$

2. La función es $f(x)=2x^3-2x^2+5x+K$ porque su derivada es $f'(x)=6x^2-4x+5$. Para hallar la constante *K*, se impone $f(1)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow K=-5$.

$f(x)=2x^3-2x^2+5x-5\Rightarrow f(0)=-5$

3. a) De la gráfica: $v_0=v(0)=4$ m/s

b) De la gráfica: $v(t)=2t+4$ m/s

c) $s=\int v\,dt=\int(2t+4)\,dt=t^2+4t+K$

$s(4)=50\Rightarrow 16+16+K=50\Rightarrow K=18$

$s(t)=t^2+4t+18$ m

d) $s_0=s(0)=18$ m

e) $a=v'(t)=2$ m/s^2

4. a) $I=\int(10x+x^{\frac{1}{2}})\,dx=5x^2+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+K$

b) $I=\int(x^2+2x^{\frac{1}{3}})\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}+K$

c) $I=\ln|\operatorname{tg}x|+K$

d) $I=\frac{1}{5}(e^x+2)^5+K$

e) $I=\frac{5}{2}(\ln x)^2+K$

f) $I=\int\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{5}{x^2+1}\right)dx=$

$=\ln(x^2+1)+5\operatorname{arctg}x+K$

5. a) $I=x\operatorname{arctg}2x-\int\frac{2x}{1+4x^2}dx=$

$=x\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)+C$

b) $I=(x+1)e^x-\int e^x dx=$

$=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C$

c) $I=x\ln x^2-\int 2\,dx=x\ln x^2-2x+C$

6. a) $\int\frac{x+5}{x^2+x-2}dx=2\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+2}=$

$=2\ln|x-1|-\ln|x+2|+C=\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x+2}\right|+C$

b) $I=\int\left(2-\frac{7}{x+4}\right)dx=2x-7\ln|x+4|+C$

c) $I=\int\frac{x+1+1}{(x+1)^2}dx=\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=$

$=\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+C$

7. a) $I=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-4}dx=$

$=-\frac{1}{2}\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln|x-4|+C$

b) $I=\int\frac{x-3+2}{(x-3)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x-3}+\frac{2}{(x-3)^2}\right)dx=$

$=\ln|x-3|-\frac{2}{x-3}+C$

c) $I=\frac{1}{2}\int\frac{2x-6+4}{x^2-6x+10}dx=$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2x-6}{x^2-6x+10}dx+\int\frac{2}{1+(x-3)^2}dx=$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+10)+2\operatorname{arctg}(x-3)+C$

8. a) $I=\int\left(2+\frac{-8}{4+x^2}\right)dx=2x-4\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

b) $I=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2+2}{x^2-2x+5}dx=$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx+\int\frac{1}{4+(x-1)^2}dx=$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$

c) $I=\int\left(\frac{3}{x-1}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx=$

$=3\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

9. a) $I=\int\frac{\operatorname{sen}(5x-5)+\operatorname{sen}(x+5)}{2}dx=$

$=-\frac{\cos(5x-5)}{10}-\frac{\cos(x+5)}{2}+C$

b) $I=\int\frac{(1+\cos x)^2}{1-\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}+\frac{2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}+\right.$

$\left.+\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)=-2(\operatorname{cotg}x+\operatorname{cosec}x+x)+C$

c) $I=\int\frac{\cos x-\cos x\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^5 x}dx=\int\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^5 x}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\right)dx=$

$=-\frac{\operatorname{cosec}^4 x}{4}+\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{2}+C$

10. a) Si $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ y $\operatorname{sen}x=\frac{2t}{1+t^2}$

$I=\int\frac{1+t^2}{(1+t)^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\frac{-2}{1+t}+C=\frac{-2}{1+\operatorname{tg}(x/2)}+C$

b) Haciendo $3^x=t,\ 3^x\ln 3\,dx=dt$,

$I=\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{3^x-1}{3^x+1}\right|+C$

c) Si $2x+1=t^2\Rightarrow 2dx=2tdt$

$I=\frac{t^3(3t^2-5)}{30}+C=\frac{3x-1}{15}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C$

14 Integral definida

Propuesta A

1. Considera la función $f(x) = x^2 + 1$ definida en el intervalo [–3, 2] y la partición *P* del mismo formada por los puntos de abscisas –3, –2, –1, 0, 1 y 2.

a) Determina utilizando dicha partición una aproximación por exceso y otra por defecto al área encerrada entre la curva de *f* y el eje *X*.

b) Obtén el valor exacto del área anterior usando la regla de Barrow.

2. Calcula las siguientes integrales definidas mediante la aplicación de la regla de Barrow y señala cuáles de ellas representan un área y cuáles no.

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx$ b) $\int_0^2 (2x-1)\,dx$ c) $\int_1^e \ln x\, dx$

3. Demuestra que $\frac{2}{3} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

4. Halla los máximos y mínimos relativos, si es que existen, de la función $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+2\cos t}\,dt$.

5. Calcula los valores de *a* y de *b* que hacen continua las siguientes funciones en todo **R** y determina para los valores hallados $\int_0^5 [f(x)-g(x)]\,dx$.

a) $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \ne 1 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} x^2+b & \text{si } x < 3 \\ 4x+1 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

6. Calcula las integrales definidas siguientes y justifica si representan un área o no.

a) $\int_0^4 |2x-4|\,dx$ b) $\int_0^4 \sqrt{x^2-4x+4}\,dx$ c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 x}\,dx$

7. Representa y calcula el área limitada por el eje de abscisas y la gráfica de la función $y = 2x - x^2$.

8. La gráfica de la función $y = \ln x$, la recta *y* = 1 y los ejes de coordenadas delimitan un recinto con forma de trapecio mixtilíneo. Determina:

a) El área de dicho recinto utilizando la integración respecto de la variable *x*.

b) El área del recinto utilizando la integración respecto de la variable *y*.

c) El volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje *X*.

d) El volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje *Y*.

9. Sea el recinto acotado y limitado por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, las rectas *x* = 1, *x* = –1 y el eje *X*.

a) Determina el área del recinto.

b) Calcula el volumen del sólido de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje *X*.

c) Calcula el volumen del sólido de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje *Y*.

10. Se considera la función $y = 2\ln x$ definida para valores de $x \in [1, e]$. Determina:

a) La longitud del arco de curva.

b) El área del recinto limitado por el arco y su cuerda.

Propuesta B

1. Sea la función $y = \dfrac{2}{x+1}$ definida en el intervalo [2, 4], en el que se toma una partición *P* dividiéndolo en cuatro partes iguales.

a) Obtén el área encerrada por la curva de *f* y el eje *X* en el intervalo usando la regla de Barrow.

b) Determina una aproximación por exceso y otra por defecto al área anterior usando la partición *P*.

2. Calcula las integrales definidas mediante la aplicación de la regla de Barrow y justifica cuáles de ellas representan un área y cuáles no.

a) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$ b) $\int_{-2}^{2} (2x+2)\, dx$ c) $\int_{-1}^{1} e^{-x}\, dx$

3. Determina para qué valores de los parámetros *a* y *b* la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \\ x + 9 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$ es continua en toda la recta real. Para los valores obtenidos calcula $\int_{-\pi}^{6} f(x)\, dx$.

4. Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^5} \int_0^x t^2 \ln(1 + 4t^3)\, dt$.

5. Halla la derivada de la función $F(x) = \int_x^{x^2} \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt$.

6. Calcula las siguientes integrales definidas y justifica si representan un área o no.

a) $\int_0^4 |x-4|\, dx$ b) $\int_0^3 \sqrt{x^2 - 2x + 1}\, dx$ c) $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

7. Representa y calcula el área del recinto limitado por las funciones $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$.

8. La gráfica de la función *y* = arctg *x*, la recta $y = \dfrac{\pi}{4}$ y el eje *Y* delimitan un recinto con forma de triángulo mixtilíneo. Determina:

a) El área de dicho recinto utilizando la integración respecto de la variable *x.*

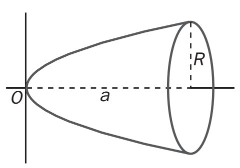
b) El área del recinto utilizando la integración respecto de la variable *y*.

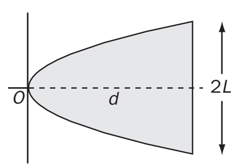
c) El volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje *Y*.

9. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje *X*, el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x \operatorname{sen} x}$ y el eje de abscisas en el intervalo [0, π].

10. a) Calcula por integración el volumen de un paraboloide de altura *a* y radio de la base *R*.

b) Calcula el área del recinto plano limitado por una parábola y una cuerda de la parábola de longitud 2*L* perpendicular a su eje y a una distancia *d* del vértice.





Soluciones propuesta A

1. a) $S = 1\cdot(f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(1)+f(2)) =$
$= 10+ 5 + 2 + 2 + 5 = 24$

$s = 1\cdot(f(-2)+f(-1)+f(0)+f(0)+f(1)) = 11$

b) $A = \int_{-3}^{2}(x^2+1)dx = \left[\dfrac{x^3}{3}+x\right]_{-3}^{2} = \dfrac{50}{3}\ \text{u}^2$

2. a) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx = [\operatorname{sen} x]_{-\pi}^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}(-\pi) = 0$

b) $\int_0^2 (2x-1)dx = \left[x^2-x\right]_0^2 = 4-2 = 2$

c) $\int_1^e \ln x\,dx = \left[x\ln x - x\right]_1^e = (e\cdot\ln e - e)-(-1) = 1$

Solamente en el caso c la integral representa un área porque en los otros casos la función no es positiva en todo el intervalo de integración.

3. El máximo de $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$ es $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

Por tanto, $f(x)\le\dfrac{3}{2}$ en (0, 1) $\Rightarrow$

$\dfrac{1}{f(x)}\ge\dfrac{2}{3}\Rightarrow\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx\ge\int_0^1\dfrac{2}{3}dx=\dfrac{2}{3}$

4. Por el teorema fundamental del cálculo, será $F'(x)=\dfrac{1}{1+2\cos x}\neq 0$ para cualquier valor de x, por lo que F no tiene extremos relativos.

5. a) $f(1)=a=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$

b) $\lim\limits_{x\to3^-}g(x)=\lim\limits_{x\to3}(x^2+b)=9+b$

$\lim\limits_{x\to3^+}g(x)=\lim\limits_{x\to3}(4x+1)=13=9+b\Rightarrow b=4$

Así, $\int_0^5[f(x)-g(x)]dx=\int_1^3(x-3-x^2)dx+\int_3^5(-3x)dx=$

$=\left[-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-3x\right]_0^3+\left[\dfrac{-3x^2}{2}\right]_3^5=-\dfrac{75}{2}$

6. a) $\int_0^4|2x-4|\,dx=\int_0^2(-2x+4)dx+\int_2^4(2x-4)dx=$

$=\left[-x^2+4x\right]_0^2+\left[x^2-4x\right]_2^4=4-(-4)=8$

b) $\int_0^4\sqrt{x^2-4x+4}\,dx=\int_0^4\sqrt{(x-2)^2}\,dx=$

$=\int_0^4|x-2|\,dx=\int_0^2(2-x)dx+\int_2^4(x-2)dx=$

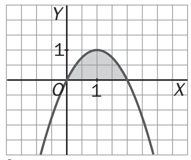
$=\left[2x-\dfrac{x^2}{2}\right]_0^2+\left[\dfrac{x^2}{2}-2x\right]_2^4=2+(0+2)=4$

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2x}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\operatorname{sen}x|\,dx=$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}x\,dx=2\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2(0+1)=2$

Todas representan un área: las funciones son positivas en el intervalo de integración.

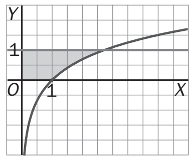
7. La parábola corta al eje de abscisas en los puntos $x = 0$ y $x = 2$, y es continua y positiva en este intervalo.



Por tanto:

$A=\int_0^2(2x-x^2)\ dx=\left[x^2-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2=\dfrac{4}{3}\ \text{u}^2$

8. a) $A=1+\int_1^e(1-\ln x)dx=$



$=1+\left[x(2-\ln x)\right]_1^e=$

$=1+(e-2)=e-1\ \text{u}^2$

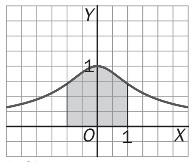
b) $A=\int_0^1 e^y dy=\left[e^y\right]_0^1=e-1\ \text{u}^2$

c) $V=\pi\int_0^e 1^2dx-\pi\int_1^e(\ln x)^2dx=$

$=\pi e-\pi\left[x(\ln^2x-2\ln x+2\right]_1^e=2\pi\ \text{u}^3$

d) $V=\pi\int_0^1\left(e^y\right)^2dy=\dfrac{\pi}{2}\left[e^{2y}\right]_0^1=\dfrac{\pi(e^2-1)}{2}\ \text{u}^3$

9. a) $A=2\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$



Se toma: $x=\operatorname{tg}t$

$A=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2t}{\sec t}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec t\,dt=$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec t(\sec t+\operatorname{tg}t)}{\sec t+tg\,t}dt=2\left[\ln(\sec t+\operatorname{tg}t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=$

$=2(\ln(\sqrt{2}+1)-\ln1)=2\left(\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$

b) $V=\pi\int_{-1}^1\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2dx=\pi\int_{-1}^1\dfrac{dx}{1+x^2}=$

$=\pi\left[\operatorname{arctg}x\right]_{-1}^1=\pi\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi^2}{2}\ \text{u}^3$

c) Se despeja x en función de y: $x=\sqrt{\dfrac{1}{y^2}-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow V=\pi\int_{y_1}^{y_2}x^2dy=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}1^2dy+\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\left(\dfrac{1}{y^2}-1\right)dy=$

$=\pi\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\pi\left[-\dfrac{1}{y}-y\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1=2\pi\left(\sqrt{2}-1\right)\ \text{u}^3$

10. a) $L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}dx=$

$=\int_1^e\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$. Con el cambio $x^2+1=t^2$

se llega a $L=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}}\dfrac{t^2}{t^2-1}dt\approx 2{,}0035$.

Soluciones propuesta B

1. a) $A=\int_2^4 \frac{2dx}{x+1}=2\left[\ln|x+1|\right]_2^4=2\ln\left(\frac{5}{3}\right)\approx 1{,}02$

b) $S=\frac{1}{4}\left(f(2)+f\left(\frac{5}{2}\right)+f(3)+f\left(\frac{7}{2}\right)\right)=\frac{275}{504}$

$s=\frac{1}{4}\left(f\left(\frac{5}{2}\right)+f(3)+f\left(\frac{7}{2}\right)+f(4)\right)=\frac{1207}{2520}$

$S\approx 0{,}55;\ \ s\approx 0{,}479$

2. a) $\int_0^{\pi}\operatorname{sen}x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2$

b) $\int_{-2}^{2}(2x+2)\,dx=\left[x^2+2x\right]_{-2}^{2}=8$

c) $\int_{-1}^{1}e^{-x}\,dx=\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}$

La a y la c representan un área porque las dos funciones son positivas en el intervalo de integración, mientras que la b no.

3. a) Para que f sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 0$ y en $x = 3$;

$f(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}0=0\\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+ax+b)=b=0\end{cases}\Rightarrow b=0$$

$f(3)=\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^+}f(x)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2+ax)=9+3a\\ \lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x+9)=12\end{cases}\Rightarrow a=1$$

b) $\int_{-\pi}^{6}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{0}\operatorname{sen}x\,dx+\int_0^3(x^2+x)\,dx+$

$+\int_3^6(x+9)\,dx=\left[-\cos x\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^3+$

$+\left[\frac{x^2}{2}+9x\right]_3^6=-2+9+\frac{9}{2}+\left(72-\frac{9}{2}-27\right)=52$

4. Llamando $F(x)=\int_0^x t^2\ln(1+4t^2)\,dt$, hay que calcular $L=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^5}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{5x^4}=$

$=\lim_{x\to o}\frac{x^2\ln(1+4x^3)}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{10x(1+4x^3)}=\frac{4}{5}$

Se han aplicado la regla de L'Hôpital dos veces y el teorema fundamental del cálculo.

5. Aplicando el teorema fundamental del cálculo y teniendo en cuenta que los límites de integración son funciones de x,

$F'(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}x^2}\cdot 2x-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\cdot 1=\frac{2x}{\operatorname{sen}x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}$

6. a) $\int_0^4|x-4|\,dx=\int_0^4(4-x)\,dx=\left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_0^4=8$

b) $\int_0^3\sqrt{x^2-2x+1}\,dx=\int_0^3|x-1|\,dx=$

$=\int_0^1(1-x)\,dx+\int_1^3(x-1)\,dx=$

$=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

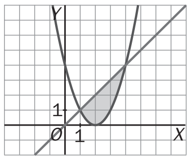
c) $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2x}\,dx=\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\,dx=\left[\operatorname{sen}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+$

$+\left[-\operatorname{sen}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1+1=2$

Las tres representan un área porque las funciones son positivas en el intervalo de integración.

7. Se hallan los puntos de corte entre f y g:
$f(x)=g(x)\Rightarrow(1,1),(4,4)$



Al ser $g > f$ en [1, 4], el área buscada es:

$A=\int_1^4\left[x-\left(x^2-4x+4\right)\right]dx=$

$=\int_1^4(-x^2+5x-4)\,dx=$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^4\approx 4{,}83\ \text{u}^2$

8. a) $A=\int_0^1\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}x\right)dx=$

$=\left[\frac{\pi}{4}x-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1\approx 0{,}35\ \text{u}^2$

b) $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}y\,dy=\left[-\ln(\cos y)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\approx 0{,}35\ \text{u}^2$

c) $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2y\,dy=\pi\left[\operatorname{tg}y-y\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\ \text{u}^3$

9. $V=\pi\int_0^{\pi}(x\operatorname{sen}x)\,dx=\pi\left[-x\cos x+\operatorname{sen}x\right]_0^{\pi}=\pi^2\ \text{u}^3$

10. a) De acuerdo a la figura, la parábola que engendra el paraboloide es $y^2=2px$. Al pasar por $P(a,R)\Rightarrow 2p=\frac{R^2}{a}\Rightarrow y^2=\frac{R^2}{a}x$

$V=\pi\int_0^a\left(\frac{R^2}{a}x\right)dx=\frac{\pi R^2}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\frac{\pi R^2a}{2}$

b) En este caso la parábola es:

$y^2=\frac{L^2}{d}x\Rightarrow y=\pm\frac{L}{\sqrt{d}}\sqrt{x}$ y el área:

$A=2\int_0^d\left(\frac{L}{\sqrt{d}}\sqrt{x}\right)dx=\frac{2L}{\sqrt{d}}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^d=\frac{4}{3}Ld$