1

Actividades complementarias

Índice

sm

BACHILLERATO

1 Números reales

Propuesta A

1. Indica el conjunto numérico más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números.

a) $-\sqrt{9}$ b) $\frac{12}{3}$ c) 12,24242424... d) 1,122333444455555... e) $3,14 + \pi$

2. Ordena de menor a mayor los siguientes números: $\frac{25}{8}$, $\frac{256}{81}$, $\frac{22}{7}$ y $\frac{377}{120}$.

3. La siguiente tabla muestra aproximaciones por exceso y por defecto del número real $\pi \cdot \sqrt{3}$. Complétala utilizando las aproximaciones correspondientes de los números π y $\sqrt{3}$, calculando en cada caso el error absoluto cometido.

	π	3	$\pi \cdot \sqrt{3}$	Error
Por defecto	3,141	1,732		
Por exceso	3,142	1,733		

4. Representa en la recta real los siguientes intervalos.

a) (3, 5) b) (4, 6] c) [2, 6] d) [−1, 3)

5. Utilizando el teorema de Tales, representa en la recta real los siguientes números racionales.

a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{5}{6}$

6. Escribe en forma de potencia y lo más simplificadamente posible las siguientes expresiones.

a) $4x^2 \cdot 3x^4$ d) $x^{-3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ g) $\frac{2x^3}{x\sqrt{x}}$ j) $\sqrt{\sqrt[3]{2x}}$

b) $5(x^3)^{\frac{1}{3}}$ e) $\frac{2}{\sqrt{2x}}$ h) $\frac{3x + 1}{\sqrt[3]{3x + 1}}$ k) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{x^2}}}$

c) $x^2 \cdot \sqrt{x^3}$ f) $\frac{2x^2}{\sqrt[4]{x}}$ i) $2^{2x} \cdot 3^{2x} \cdot 4^{2x}$ l) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{(x + 1)^2}}}$

7. Representa los siguientes conjuntos de números en la recta real.

a) $|x - 1| = 3$ b) $|x - 1| < 3$ c) $|x - 1| \geqslant 3$ d) $|x + 2| \leqslant 3$

8. Simplifica el valor de la expresión $\sqrt[3]{\frac{15\sqrt{8} + 3\sqrt{128}}{\sqrt{32} - \sqrt{18}}}$.

9. Calcula todos los números combinatorios $\binom{10}{0}, \binom{10}{1}, \binom{10}{2}, \ldots, \binom{10}{9}, \binom{10}{10}$.

10. Utilizando el binomio de Newton, calcula:

a) $(3 - \sqrt{2})^6$ b) $(\sqrt{3} - 2)^6$ c) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^5$

11. A partir de la definición de logaritmo, calcula el valor de x en las siguientes relaciones.

a) $\log_x 64 = -2$ b) $\log_6 \frac{1}{216} = x$ c) $\log_2 x = -5$

12. Toma logaritmos en las siguientes expresiones.

a) $A = xy^2z^4$ b) $B = \frac{2x^2 \cdot y^4}{z^6}$ c) $C = \sqrt[3]{\frac{2x^2 \cdot y^5}{3z^3}}$

Propuesta B

1. Clasifica los siguientes números decimales en racionales o irracionales.

a) 12,23232323232323...

b) 12,360360360360360...

c) 12,360360036000360000...

d) 12,135531135531135531...

e) 12,11212312341234512 3456...

f) 12,1314151617181920 2122...

2. La siguiente tabla muestra aproximaciones por exceso y por defecto del número real $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Complétala utilizando las aproximaciones correspondientes de los números π y $\sqrt{3}$, calculando en cada caso el error absoluto cometido.

	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	Error
Por defecto	1,414	1,732		
Por exceso	1,415	1,733		

3. Escribe los cuatro primeros intervalos encajados que determinan $\sqrt{5}$, con errores menores que una unidad, una décima, una centésima y una milésima (los intervalos encajados están determinados por las mejores aproximaciones por defecto y por exceso de un orden dado al número considerado).

4. Utiliza el teorema de Pitágoras para representar en la recta real los siguientes números irracionales.

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{29}$ d) $\sqrt{18}$

5. Representa los siguientes conjuntos de números en la recta real.

a) $|x - 5| < 3$ b) $|x - 5| \geqslant 3$ c) $|2x - 20| \leqslant 5$ d) $\left|\dfrac{x - 2}{4}\right| > 0{,}2$

6. Demuestra que el número $\sqrt{20 + 2\sqrt{19}} - \sqrt{20 - 2\sqrt{19}}$ es entero.

7. Racionaliza el denominador de las expresiones irracionales siguientes.

a) $\dfrac{2}{1 - \sqrt{5}}$ b) $\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$ c) $\dfrac{3 - \sqrt{7}}{(1 - \sqrt{3})^2}$ d) $\dfrac{a - 2\sqrt{b}}{2a + \sqrt{b}}$

8. Escribe en notación científica las siguientes cantidades utilizando solamente tres cifras significativas y redondeando la última cifra significativa.

a) 73 178 322 105

b) 13 976,28573

c) 0,000724598203

d) 0,000000000000849725

9. Calcula el valor de x en la siguiente igualdad: $\dbinom{x + 2}{7} - \dbinom{11}{x} = -\dbinom{10}{x}$.

10. Usando el desarrollo del binomio de Newton, calcula:

a) $(2 - \sqrt{2})^8$ b) $(\sqrt{3} - 1)^8$ c) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^5$

11. Conociendo que $\log 4 = 0{,}602$, calcula:

a) $\log 2$ b) $\log 400$ c) $\log 0{,}32$

12. Pasa a forma algebraica las siguientes expresiones logarítmicas.

a) $\log A = 2 \log 3 - 2 \log x + 3 \log y - \log z$

b) $\log B = \log(2x - 2y) + \log(x - 2y)$

c) $\log C = 3 \log(x + y) - \log 32 - \log\dfrac{(2x - 3)}{2}$

Soluciones propuesta A

1. a) Números enteros

b) Números naturales

c) Números racionales

d) Números irracionales (reales)

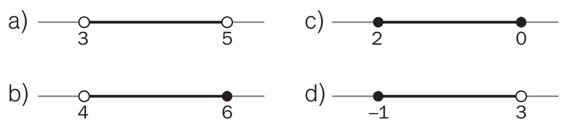
e) Números irracionales (reales)

2. $\frac{25}{8} < \frac{377}{120} < \frac{22}{7} < \frac{256}{81}$

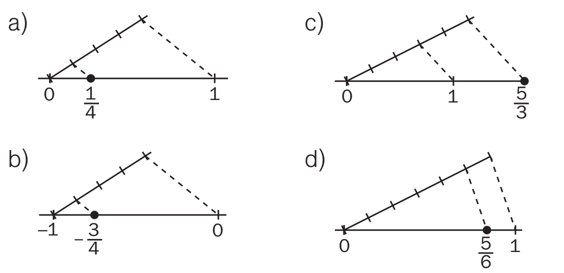
3.

	π	3	$\pi \cdot \sqrt{3}$	Error
Por defecto	3,141	1,732	5,440212	0,00119
Por exceso	3,142	1,733	5,445086	0,00369

4.



5.



6. a) $4x^2 \cdot 3x^4 = 12 \cdot x^6$

b) $5(x^3)^{\frac{1}{3}} = 5x^{\frac{3}{3}} = 5x$

c) $x^2 \cdot \sqrt{x^3} = x^{\frac{7}{2}}$

d) $x^{-3} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{-\frac{7}{3}}$

e) $\frac{2}{\sqrt{2x}} = 2^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$

f) $\frac{2x^2}{\sqrt[4]{x}} = 2x^{\frac{7}{4}}$

g) $\frac{2x^3}{x\sqrt{x}} = 2x^{\frac{3}{2}}$

h) $\frac{3x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} = (3x+1)^{\frac{2}{3}}$

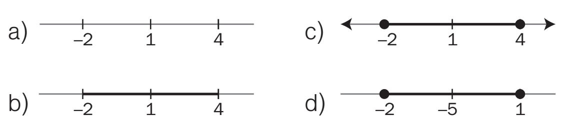
i) $2^{2x} \cdot 3^{2x} \cdot 4^{2x} = 24^{2x}$

j) $\sqrt{\sqrt[3]{2x}} = (2x)^{\frac{1}{6}}$

k) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{x^2}}} = x^{\frac{1}{9}}$

l) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{(x+1)^2}}} = (x+1)^{\frac{1}{4}}$

7.



8. $\sqrt[3]{\dfrac{15\sqrt{8}+3\sqrt{128}}{\sqrt{32}-\sqrt{8}}} = \sqrt[3]{\dfrac{15\cdot 2\sqrt{2}+3\cdot 2^3\sqrt{2}}{2^2\sqrt{2}-2\sqrt{2}}} =$

$= \sqrt[3]{\dfrac{30\sqrt{2}+24\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\dfrac{54\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\dfrac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$

9. $\binom{10}{0} = 1$, $\binom{10}{1} = 10$, $\binom{10}{2} = 45$, $\binom{10}{3} = 120$,

$\binom{10}{4} = 210$, $\binom{10}{5} = 252, 210, 120, 45,$

$\binom{10}{9} = 10$, $\binom{10}{10} = 1$

10. a) $(3-\sqrt{2})^6 = 3^6 - 6\cdot 3^5\cdot\sqrt{2} + 15\cdot 3^4\cdot(\sqrt{2})^2 -$
$- 20\cdot 3^3\cdot(\sqrt{2})^3 + 15\cdot 3^2\cdot(\sqrt{2})^4 -$
$- 6\cdot 3\cdot(\sqrt{2})^5 + (\sqrt{2})^6 =$
$= 729 - 1458\sqrt{2} + 2430 - 1080\sqrt{2} + 540 -$
$- 72\sqrt{2} + 8 = 3707 - 2610\sqrt{2}$

b) $(\sqrt{3}-2)^6 = 27 - 108\sqrt{3} + 540 - 480\sqrt{3} +$
$+ 720 - 192\sqrt{3} + 64 = 1351 - 780\sqrt{3}$

c) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^6 = 25\sqrt{5} - 125\sqrt{2} + 100\sqrt{5} -$
$- 100\sqrt{2} + 20\sqrt{5} - 4\sqrt{2} = 145\sqrt{5} - 229\sqrt{2}$

11. a) $\log_x 64 = -2 \Leftrightarrow x^{-2} = 64 \Rightarrow x^{-1} = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$
(La solución $x = -8$ no es válida, ya que la base negativa no está definida para el logaritmo.)

b) $\log_6 \frac{1}{216} = x \Rightarrow 6^x = 216 = 6^3 \Rightarrow x = 6$

c) $\log_2 x = -5 \Leftrightarrow 2^{-5} = x \Rightarrow x = \frac{1}{32}$

12. a) $A = xy^2z^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log A = \log x + 2\log y + 4\log z$

b) $B = \dfrac{2x^2\cdot y^4}{z^6} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log B = \log 2 + 2\log x + 4\log y - 6\log z$

c) $C = \sqrt[3]{\dfrac{2x^2\cdot y^5}{3z^3}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log C =$
$= \dfrac{\log 2 + 2\log x + 5\log y - \log 3 - 3\log z}{3}$

Soluciones propuesta B

1. a) Decimal periódico y, por tanto, racional

b) Decimal periódico y, por tanto, racional

c) Decimal ilimitado no periódico y, por tanto, irracional

d) Decimal periódico y, por tanto, racional

e) Decimal ilimitado no periódico y, por tanto, irracional

f) Decimal ilimitado no periódico y, por tanto, irracional

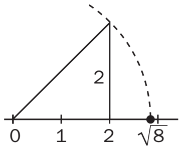
2.

	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	Error
Por defecto	1,414	1,732	3,146	0,00026
Por exceso	1,415	1,733	3,148	0,00174

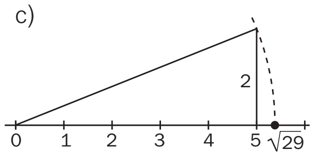
3.

Por defecto	2	2,2	2,23	2,236
Por exceso	3	2,3	2,24	2,237
Intervalo	(2, 3)	(2,2; 2,3)	(2,23; 2,24)	(2,236; 2,237)
Error < que...	1	0,1	0,01	0,001

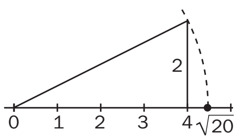
4. a)



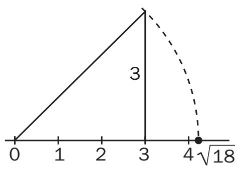
c)



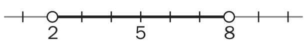
b)



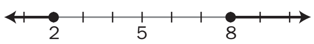
d)



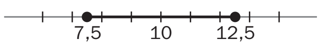
5. a) $|x - 5| < 3$ Es un entorno abierto de centro 5 y radio 3 $E(5, 3)$.



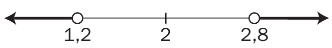
b) $|x - 5| \geqslant 3$ Es el complementario del entorno anterior.



c) $|2x - 20| \leqslant 5 \Leftrightarrow |x - 10| \leqslant \dfrac{5}{2}$



d) $\left|\dfrac{x-2}{4}\right| > 0{,}2 \Leftrightarrow |x - 2| > 0{,}8$



6. $\left(\sqrt{20 + 2\sqrt{19}} - \sqrt{20 - 2\sqrt{19}}\right)^2 =$

$= 20 + 2\sqrt{19} + 20 - 2\sqrt{19} -$

$- 2\sqrt{(20 + 2\sqrt{19}) \cdot (20 - 2\sqrt{19})} =$

$= 40 - 2\sqrt{400 - 76} = 40 - 36 = 4$

Por tanto, $\sqrt{20 + 2\sqrt{19}} - \sqrt{20 - 2\sqrt{19}} = 2$

7. a) $\dfrac{2}{1 - \sqrt{5}} = \dfrac{2(1 + \sqrt{5})}{(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})} = \dfrac{2(1 + \sqrt{5})}{-4} =$

$= \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

b) $\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \dfrac{(2 + \sqrt{2})^2}{2} = \dfrac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$

c) $\dfrac{3 - \sqrt{7}}{(1 - \sqrt{3})^2} = \dfrac{3 - \sqrt{7}}{4 - 2\sqrt{3}} =$

$= \dfrac{(3 - \sqrt{7})(4 + 2\sqrt{3})}{16 - 12} =$

$= \dfrac{12 + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{7} - 2\sqrt{21}}{4} =$

$= \dfrac{6 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{7} - \sqrt{21}}{2}$

d) $\dfrac{a - 2\sqrt{b}}{2a + \sqrt{b}} = \dfrac{(a - 2\sqrt{b})(2a - \sqrt{b})}{4a^2 - b} =$

$= \dfrac{2a^2 + 2b^2 - 5a\sqrt{b}}{4a^2 - b}$

8. a) $73\,178\,322\,105 = 7{,}32 \cdot 10^{10}$

b) $13\,976{,}28573 = 1{,}40 \cdot 10^4$

c) $0{,}000724598203 = 7{,}25 \cdot 10^{-4}$

d) $0{,}000000000000849725 = 8{,}50 \cdot 10^{-13}$

9. $\dbinom{x+2}{7} - \dbinom{11}{x} = -\dbinom{10}{x} \Rightarrow \dbinom{x+2}{7} + \dbinom{10}{x} = \dbinom{11}{x}$

y por la 4.ª propiedad de los números combinatorios resulta $x + 2 = 10 \Rightarrow x = 8$.

10. a) $(2 - \sqrt{2})^8 =$

$= 256 - 1024\sqrt{2} + 3584 - 3584\sqrt{2} + 4480 -$

$- 1792\sqrt{2} + 896 - 128\sqrt{2} + 16 =$

$= 9232 - 6528\sqrt{2}$

b) $(\sqrt{3} - \sqrt{1})^8 = 1552 - 896\sqrt{3}$

c) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^5 = 176\sqrt{6} - 304\sqrt{2}$

11. a) $\log 2 = \log \sqrt{4} = \dfrac{1}{2}\log 4 = 0{,}301$

b) $\log 400 = \log(4 \cdot 100) = \log 4 + \log 100 = 2{,}602$

c) $\log 0{,}64 = \log\left(\dfrac{4^3}{100}\right) = 3 \log 4 - \log 100 = -0{,}194$

12. a) $A = \dfrac{3^2 \cdot y^3}{x^2 \cdot z}$

b) $B = (2x - 2y) \cdot (x - 2y)$

c) $C = \dfrac{(x + y)^3}{32 \cdot \dfrac{2x - 3}{2}} = \dfrac{(x + y)^3}{32x - 48}$

2 Ecuaciones, sistemas e inecuaciones

Propuesta A

1. Sean los polinomios $A(x) = 3x^2 - 2x + 5$; $B(x) = x^2 + 5x - 2$ y $C(x) = 4x - x^3 + 2x^2 - 6$. Calcula:

a) $A(x) - B(x) - C(x)$ b) $C(x) - A(x) \cdot B(x)$ c) $B(x) \cdot [C(x) + A(x)]$

2. Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(4x - x^3 + 2x^2 - 6) : (x^2 + 5x - 2)$ b) $(3x - x^3 + 2x^5) : (x^4 - 2x^2 + 1)$ c) $(x^{10} + x^5 + x + 1) : (x + 1)$

3. Calcula un polinomio $P(x)$ de manera que $(2x^4 - 2x^3 + 10x^2) - P(x) = (2x^2 + 5) \cdot (x^2 - x + 2)$.

4. Descompón factorialmente los siguientes polinomios.

a) $x^4 - x^2$ c) $x^3 + 2x^2 + x$ e) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3$

b) $3x^3 + 30x + 75$ d) $12x^3 - 27x$ f) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

5. Efectúa y simplifica el resultado siempre que sea posible.

a) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{a^2 - 1}{b^2} + \dfrac{a^2 + b}{ab} - \dfrac{b^2}{a^2}$ b) $\left(\dfrac{1}{x} - x\right)\left(\dfrac{1}{x} + x\right)\left(\dfrac{1}{x + 1} - 1\right)$

6. Halla el valor de m en cada caso, sabiendo que:

a) $x^3 - 3x^2 + mx$ es divisible por $(x - 1)$.

b) El valor numérico de $2x^4 + 5x^3 - 30x^2 + mx - 14$ para $x = -2$ es 2008.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{2x}{5} - \dfrac{4x}{15} = 1 + \dfrac{22x}{15}$ b) $\dfrac{2x + 5}{5} = 2 + x - \dfrac{x + 3}{3}$ c) $\dfrac{5x - 2}{4} - \dfrac{7x - 3}{8} = \dfrac{x - 1}{2}$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $-25x^2 + 25x - 4 = 0$ b) $6x^3 + 13x^2 - 4 = 0$ c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

9. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones radicales. Recuerda que al final del proceso debes comprobar cuáles de las soluciones halladas son verdaderas y cuáles son falsas.

a) $x + \sqrt{x} = 132$ b) $3x + \sqrt{2x - 2} = 2\sqrt{2x - 2} + 23$ c) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x + 3} = 5$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales realizando previamente un cambio de incógnita en los casos que consideres necesario.

a) $4^{2x - 1} = 64$ b) $2^{2x^2 - 3x} = 4$ c) $3^{x + 1} + 3^{x - 1} = 30$

11. Resuelve las inecuaciones siguientes, representa las soluciones y exprésalas mediante intervalos.

a) $\dfrac{5x - 2}{3} - \dfrac{x - 8}{4} > \dfrac{x + 14}{2} - 2$ b) $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$ c) $\dfrac{3x - 3}{5} - \dfrac{4x + 8}{2} < \dfrac{x}{4} - 3x$

12. Calcula la solución e interpreta gráficamente los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -4x + 2y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -4x - 6y = 7 \end{cases}$

13. Resuelve los siguientes sistemas no lineales.

a) $\begin{cases} 8x = y^2 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + 2xy = 24 \\ y^2 + xy = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 9 \\ xy = 90 \end{cases}$

14. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss.

a) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x + y - 2z = -5 \\ 2x + y + 3z = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \\ x + 2y + 2z = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 16 \end{cases}$

15. La suma de las edades de tres amigos es 52 años. Se sabe que Juan y Eva tienen la misma edad y que la suma de las edades de Eva y de Ana es 35 años. Calcula las edades de los tres.

Propuesta B

1. Sean los polinomios $A(x) = 3x^2 - 2x + 5$ $B(x) = x^2 + 5x - 2$ $C(x) = 4x - x^3 + 2x^2 - 6$, efectúa:

a) $B(x) - A(x) + C(x)$ b) $[A(x)]^2$ c) $[B(x)]^2 - C(x)$

2. De una división de polinomios conocemos el cociente $C(x) = 2x^2 - 3x + 1$, el resto $R(x) = 5x - 7$ y el dividendo $D(x) = 2x^4 - x^3 + 4x^2 - 3x - 4$. ¿Cuál era el divisor?

3. Se consideran los polinomios $A(x) = 5x^3 - 9x + x^4 - 18$ y $B(x) = 9 + x^2 + 6x$. Halla otros dos polinomios $C(x)$ y $D(x)$ de manera que se cumpla la igualdad $A(x) - D(x) = B(x) \cdot C(x)$ y que grado de $D(x) <$ grado de $B(x)$.

4. Halla el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios.

a) $5x - 10$ $15x^2 - 60$ $3x^2 - 12x + 12$

b) $3x^4 - 3x^3$ $12x^3 - 12x^2$ $18x^3 - 18x$

5. Efectúa y simplifica el resultado siempre que sea posible.

a) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x + 3} \cdot \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x - 2)^3} \cdot \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 - 1}$ b) $\dfrac{a - \dfrac{1}{a}}{1 - \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{a^2}}$

6. Se considera el polinomio $P(x) = x^5 - 3x^4 + kx^3 + 2x^2 + tx - 9$ y se sabe que al dividirlo entre $(x - 3)$ se obtiene de resto 6. Su valor numérico para $x = 2$ es $P(2) = -9$. Calcula los coeficientes k y t, así como el valor numérico del polinomio para $x = -1$.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\dfrac{(3x + 1) \cdot (3x - 1)}{9} = \dfrac{(x - 5) \cdot (x + 1)}{2} + \dfrac{(9x - 1) \cdot (x + 3)}{18} + \dfrac{8}{9}$

b) $\dfrac{(3x - 7) \cdot (3x + 7)}{6} = \dfrac{(x - 2)^2}{2} + \dfrac{(2x + 1)^2}{4}$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $10x^2 + 11x - 6 = 0$ b) $(2x - 1) \cdot (3x + 1) = 6$ c) $12x^3 - 19x^2 + 8x - 1 = 0$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales. Recuerda que al final del proceso debes comprobar cuáles de las soluciones halladas son verdaderas y cuáles son falsas.

a) $2x - 3 + \sqrt{2x + 3} = 6$ b) $2x - 1 - \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$ c) $3\sqrt{3x - 1} = 2\sqrt{3 \cdot (2x - 1)}$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $5 \log x = 10$ b) $\log(x - 27) = \log x - 1$

11. Resuelve las inecuaciones siguientes, representa las soluciones y exprésalas mediante intervalos.

a) $\dfrac{2x + 1}{2} > 2 + \dfrac{x + 8}{2}$ b) $\dfrac{x - 1}{2} + \dfrac{x - 2}{4} - \dfrac{x - 3}{8} < \dfrac{59}{8}$ c) $2x^2 - x - 6 \leqslant 0$

12. Resuelve por distintos métodos los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 7x + 8y = 6 \\ 3x + 7y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x + 5y = 15 \\ -7x - 11y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -3x + 6y = 5 \end{cases}$

13. Aplicando el método de sustitución, resuelve los siguientes sistemas de segundo grado.

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x^2 + 3xy = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ y^2 + 2xy = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 6y = -6 \\ 2x^2 + y^2 = 76 \end{cases}$

14. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ x + 4y + z = -5 \\ x + 3y + z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ 2x - 3y + 5z = 6 \\ -x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 3y + 2z = 1 \\ x - 4y + 3z = 15 \\ 2x - y + 4z = 17 \end{cases}$

15. Entre Juan y Pedro tienen cierta cantidad de euros. Si Juan le da a Pedro 100 €, Pedro tendrá el doble de dinero que Juan, pero si Pedro le da a Juan 50 €, los dos tendrán la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos euros tienen entre los dos?

1. a) $A(x) - B(x) - C(x) = x^3 - 11x + 13$

b) $C(x) - A(x) \cdot B(x) = -3x^4 - 14x^3 + 13x^2 - 25x + 4$

c) $B(x) \cdot [C(x) + A(x)] = -x^5 + 29x^3 - x^2 - 9x + 2$

2. a) Cociente $C(x) = -x + 7$.
Resto $R(x) = -33x + 8$

b) Cociente $C(x) = 2x$.
Resto $R(x) = 3x^3 + x$

c) Cociente $C(x) = x^9 - x^8 + x^7 - x^6 + x^5 + 1$
Resto $R(x) = 0$

3. Basta despejar:

$P(x) = (2x^4 - 2x^3 + 10x^2) - (2x^2 + 5) \cdot (x^2 - x + 2) = x^2 + 5x - 10$

4. a) $x^4 - x^2 = x^2(x + 1)(x - 1)$

b) $3x^2 + 30x + 75 = 3(x + 5)^2$

c) $x^3 + 2x^2 + x = x(x + 1)^2$

d) $12x^3 - 27x = 3x(2x - 3)(2x + 3)$

e) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)(x^2 + 1)$

f) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x - 1)(x - 2)(x - 4)$

5. a) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{a^2 - 1}{b^2} + \dfrac{a^2 + b}{ab} - \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{-a^4 + 2a^3b + a^2 + ab^2 - b^4}{a^2b^2}$

b) $\left(\dfrac{1}{x} - x\right)\left(\dfrac{1}{x} + x\right)\left(\dfrac{1}{x + 1} - 1\right) = \dfrac{(x - 1)(x^2 + 1)}{x} = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x}$

6. a) $P(1) = 0 \Rightarrow 1 - 3 + m = 0 \Rightarrow m = 2$

b) $P(-2) = 2008 \Rightarrow 32 - 40 - 120 - 2m - 14 = 2008 \Rightarrow m = -1075$

7. a) $5x + 6x - 4x = 15 + 22x \Rightarrow -15x = 15 \Rightarrow x = -1$

b) $6x + 15 = 30 + 15x - 5x - 15 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$

c) $10x - 4 - 7x + 3 = 4x - 4 \Rightarrow -x = -3 \Rightarrow x = 3$

8. a) $x = \dfrac{-25 \pm \sqrt{625 - 400}}{-50} \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{5} \quad x_2 = \dfrac{4}{5}$

b) $6x^3 + 13x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (6x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = \dfrac{1}{2} \quad x_3 = -\dfrac{2}{3}$

c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (4x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = \dfrac{1}{2} \quad x_4 = -\dfrac{1}{2}$

9. a) $x = (132 - x)^2 \Rightarrow x^2 - 265x + 17424 = 0 \Rightarrow x = 121$ ($x = 144$ falsa)

b) $(3x - 23)^2 = 2x - 2 \Rightarrow 9x^2 - 140x + 531 = 0 \Rightarrow x = 9 \left(x = \dfrac{59}{9} \text{ falsa}\right)$

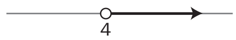
c) $2x + 3 = \left(5 - \sqrt{x + 1}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 146x + 429 = 0 \Rightarrow x = 3$ ($x = 143$ falsa)

10. a) $4^{2x - 1} = 4^3 \Rightarrow x = 2$

b) $2^{2x^2 - 3x} = 2^2 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -\dfrac{1}{2}$

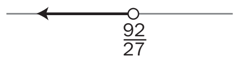
c) $3 \cdot 3^x + \dfrac{1}{3} \cdot 3^x = 30 \Rightarrow 3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2$

11. a) $4(5x - 2) - 3(x - 8) > 6(x + 14) - 24 \Rightarrow 11x > 44 \Rightarrow x > 4$



b) $(x - 2)(x - 3) \leqslant 0 \Rightarrow 2 \leqslant x \leqslant 3$

c) $4(3x - 3) - 10(4x + 8) < 5x - 60x \Rightarrow 27x < 92 \Rightarrow x < \dfrac{92}{27}$



12. a) Tiene infinitas soluciones. $S = (\lambda, 2\lambda - 2)\ \forall\lambda \in R$
Son dos rectas coincidentes.

b) Solución única: $S = (4, 0)$. Son dos rectas que se cortan en el punto $S = (4, 0)$.

c) No tiene solución, son dos rectas paralelas que no tienen puntos en común.

13. a) $S_1 = (2, -4)$ $\quad S_2 = (8, 8)$
b) $S_1 = (-4, -1)$ $\quad S_2 = (4, 1)$
c) $S_1 = (-6, -15)$ $\quad S_2 = (15, 6)$

14. a) $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ x + 4y + z = -5 \\ x + 3y + z = -3 \end{cases} \underset{E_3 \to E_3 - E_1}{\overset{E_2 \to E_2 - E_1}{\Rightarrow}} \begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 2y + 2z = 0 \\ y + 2z = 2 \end{cases} \underset{E_3 \to E_2 - E_3}{\Rightarrow} \begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ y + z = 0 \\ y = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x + y - 2z = -5 \\ 2x + y + 3z = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = -5 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 2x + y + 3z = 16 \end{cases} \Rightarrow$

$\underset{E_3 \to E_3 - 2E_1}{\overset{E_2 \to E_2 - 3E_1}{\Rightarrow}} \begin{cases} x + y - 2z = -5 \\ -y + 5z = 18 \\ -y + 7z = 26 \end{cases} \overset{E_3 \to E_3 - E_2}{\Rightarrow} \begin{cases} x + y - 3z = -5 \\ -y + 5z = 18 \\ 2z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$

b) $S = \left(6, \dfrac{25}{2}, -17\right)$ $\qquad$ c) $\left(-\dfrac{51}{7}, \dfrac{94}{7}, \dfrac{40}{7}\right)$

15. Edades: Juan, x años; Eva, x años, y Ana, $35 - x$ años. Por tanto: $x + x + 35 - x = 52 \Rightarrow x = 17$. Juan y Eva tienen 17 años cada uno, y Ana, 18.

Soluciones propuesta B

1. a) $B(x) - A(x) + C(x) = -x^3 + 11x - 13$

b) $[A(x)]^2 = 9x^4 - 12x^3 + 34x^2 - 20x + 25$

c) $[B(x)]^2 - C(x) = x^4 + 11x^3 + 19x^2 - 24x + 10$

2. Como dividendo = divisor × cociente + resto, el divisor y el cociente se pueden intercambiar siempre que el grado de ambos sea mayor que el grado del resto. Basta dividir $d(x) = 2x^4 - x^3 + 4x^2 - 3x - 4$ entre $c(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y resulta de cociente el divisor buscado: $x^2 + x + 3$.

3. Se divide $A(x) : B(x)$ y los polinomios buscados son el cociente $C(x) = x^2 - x - 3$ y el resto $D(x) = 18x + 9$.

4. a) $5x - 10 = 5(x - 2)$

$15x^2 - 60 = 15(x + 2)(x - 2)$

$3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$

m.c.d. $= (x - 2)$; m.c.m. $= 15(x + 2)(x - 2)^2$

b) $3x^4 - 3x^3 = 3x^3(x - 1)$

$12x^3 - 12x^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot x^2(x - 1)$

$18x^3 - 18x = 2 \cdot 3^2 \cdot x(x + 1)(x - 1)$

m.c.d. $= 3x(x - 1)$ m.c.m. $= 36(x + 1)(x - 1)x^3$

5. a) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x + 3} \cdot \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x - 2)^3} \cdot \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 - 1} = 1$

b) $\dfrac{a - \dfrac{1}{a}}{1 - \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{(a + 1) \cdot a}{(a - 1)} = \dfrac{a^2 + a}{a - 1}$

6. $\begin{cases} P(3) = 6 \\ P(2) = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 243 - 243 + 27k + 18 + 3t - 9 = 6 \\ 32 - 48 + 8k + 8 + 2t - 9 = -9 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 9k - t = -1 \\ 4k + t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ t = 8 \end{cases}$

$P(-1) = -18$

7. a) $2(9x^2 - 1) =$

$= 9(x^2 - 4x - 5) + 9x^2 + 26x - 3 + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 = -10x - 32 \Rightarrow x = -3$

b) $2(9x^2 - 49) =$

$= 6(x^2 - 4x + 4) + 3(4x^2 + 4x + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{125}{12}$

8. a) $x = \dfrac{-11 \pm \sqrt{121 + 240}}{20} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{2}{5} \quad x_2 = -\dfrac{3}{2}$

b) $6x^2 - x - 7 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 168}}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{7}{6} \quad x_2 = -1$

c) $12x^3 - 19x^2 + 8x - 1 = (x - 1) \cdot (12x^2 - 7x + 1) =$

$= 0 \Rightarrow x_1 = 1 \; x_2 = \dfrac{1}{3} \; x_3 = \dfrac{1}{4}$

9. a) $2x + 3 = (9 - 2x)^2 \Rightarrow 2x^2 - 19x + 39 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 3$ ($x = 6{,}5$ falsa)

b) $(2x - 1)^2 = 6x^2 - 12x + 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad x = 3$

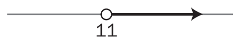
c) $9 \cdot (3x - 1) = 12 \cdot (2x - 1) \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ($x = -1$ *falsa*) La ecuación no tiene ninguna solución.

10. a) $\log x = 2 = \log 100 \Rightarrow x = 100$

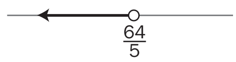
b) $\log(x - 27) = \log x - \log 10 = \log\left(\dfrac{x}{10}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 27 = \dfrac{x}{10} \Rightarrow x = 30$

11. a) $x > 11$



b) $5x - 5 < 59 \Rightarrow x > \dfrac{64}{5}$



c) $(x - 2) \cdot (2x + 3) \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2$

12. a) $S = \left(\dfrac{2}{25}, \dfrac{17}{25}\right)$ b) $S = \left(\dfrac{180}{31}, -\dfrac{123}{31}\right)$ c) Sin solución

13. a) $\begin{cases} y = 5 - 2x \\ 2x^2 + 3x(5 - 2x) = 14 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x^2 + 15x - 14 = 0 \Rightarrow S_1 = (2, 1)$,

$S_2 = \left(\dfrac{7}{4}, \dfrac{3}{2}\right)$

b) $\begin{cases} x = 4 + 3y \\ y^2 + 2y \cdot (4 + 3y) = -1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 7y^2 + 8y + 1 = 0 \Rightarrow S_1 = \left(\dfrac{25}{7}, -\dfrac{1}{7}\right)$,

$S_2 = (1, -1)$

c) $\begin{cases} x = 6y - 6 \\ 2 \cdot (6y - 6)^2 + y^2 = 76 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 73y^2 - 144y - 4 = 0 \Rightarrow S_1 = (6, 2)$,

$S_2 = \left(-\dfrac{450}{73}, -\dfrac{2}{73}\right)$

14. a) $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ x + 4y + z = -5 \\ x + 3y + z = -3 \end{cases} \xRightarrow[E_3 \to E_3 - E_1]{E_2 \to E_2 - E_1}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 2y + 2z = 0 \\ y + 2z = 2 \end{cases} \xRightarrow{E_3 \to E_2 - E_3} \begin{cases} x = -1 \\ z = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

$S = (-1, -2, 2)$

b) $S = (-1, -1, 1)$

c) $S = (2, -1, 3)$

15. Pedro tiene x €, y Juan, y €.

$\begin{cases} x + 100 = 2(y - 100) \\ x - 50 = y + 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -300 \\ x - y = 100 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 500 \text{ €} \\ y = 400 \text{ €} \end{cases}$

3 Trigonometría

Propuesta A

1. Con ayuda de la calculadora científica, halla las siguientes razones trigonométricas expresándolas con cuatro decimales.

a) sen 32° c) tg 17° e) sec 153° g) sen 23° 15′ i) tg 133° 43′ k) sec 121° 32′ 33″

b) cos 43° d) cosec 213° f) cotg 320° h) cos 47° 32′ j) cosec 34° 43′ 12″ l) cotg 2° 2′ 2″

2. Con la ayuda de la calculadora científica, halla los ángulos α positivos y menores de 2π rad y tales que:

a) $\text{sen } \alpha = -0{,}42$ b) $\cos \alpha = 0{,}4$ c) $\text{tg } \alpha = -1{,}25$ d) $\text{cosec } \alpha = 1{,}34$ e) $\sec \alpha = 1{,}35$ f) $\text{cotg } \alpha = -1$

3. Halla, sin utilizar la calculadora, las restantes razones trigonométricas de los ángulos:

a) $90° < \alpha < 180°$ $\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ b) $270° < \beta < 360°$ $\text{tg } \beta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

4. Simplifica todo lo que puedas la siguiente expresión trigonométrica: $\dfrac{\cos a + \cos b}{\text{sen}(a + b) \cdot \text{sen}(a - b)}$.

5. Sabiendo que $\text{sen } \alpha = h$, y que $0 < \alpha < 90°$, calcula en función de h el valor de $\dfrac{\cos^4 \alpha - \text{sen}^4 \alpha}{\cos 2\alpha - \text{sen } 2\alpha}$.

6. Resuelve la ecuación trigonométrica $\text{sen } x + \dfrac{4}{3}\cos^2 x = \dfrac{3}{2}$.

7. Para los siguientes triángulos rectángulos, calcula el valor de las incógnitas indicadas.

a) Datos: $a = 12$ cm, $b = 13$ cm y $\widehat{B} = 90°$; Incógnitas: c, $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$.

b) Datos: $a = 16$ cm, $\widehat{A} = 36°$ y $\widehat{B} = 90°$; Incógnitas: b, c y $\widehat{C}$.

8. La sombra de una torre, cuando los rayos del sol tienen una inclinación de 42°, mide 12,5 metros. Calcula la altura de la torre.

9. Resuelve los siguientes triángulos.

a) $\widehat{A} = 30°$, $b = 30$ cm, $S = 150$ cm^2 b) $a = 11$ cm, $b = 8$ cm, $\widehat{A} = 30°$.

10. En el triángulo ABC, los lados miden: $a = 13$ m, $b = 14$ m y $c = 15$ m. Halla:

a) Los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$

b) La tangente del ángulo $\dfrac{\widehat{C}}{2}$

c) El seno del ángulo $\widehat{C}$

d) El área del triángulo

e) El radio, r, de la circunferencia inscrita al triángulo

f) El radio, R, de la circunferencia circunscrita al triángulo

11. Calcula el radio de la circunferencia circunscrita a un heptágono regular de lado 10 cm.

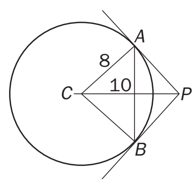
12. Calcula el área de un triángulo isósceles sabiendo que la altura mide 10 cm y que el ángulo desigual es de 80°.

13. Desde un punto P situado a 10 cm del centro C de una circunferencia de radio 8 cm se trazan las dos tangentes a la misma, siendo A y B los dos puntos de contacto de las tangentes. Determina:

a) El ángulo que forman las dos tangentes entre sí.

b) La distancia del punto P a los puntos de tangencia.

c) El área del triángulo ABC.



Propuesta B

1. Con ayuda de la calculadora científica, halla las siguientes razones trigonométricas expresándolas con cuatro decimales. Los ángulos están dados en radianes.

a) sen 2 c) tg 4 e) sec 6 g) sen 2,5 i) tg 4,5 k) sec 3,25

b) cos 3 d) cosec 5 f) cotg 1,5 h) cos 3,5 j) cosec 5,5 l) cotg 4,75

2. Con la ayuda de la calculadora científica, halla los ángulos positivos y menores de 360° y tales que:

a) sen $\alpha = 0{,}32$ b) cos $\alpha = -0{,}43$ c) tg $\alpha = 1{,}05$ d) cosec $\alpha = -1{,}1$ e) sec $\alpha = 2$ f) cotg $\alpha = -2$

3. Halla, sin utilizar la calculadora, las restantes razones trigonométricas de los ángulos:

a) $90° < \alpha < 180°$ sen $\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$ b) $180° < \beta < 270°$ tg $\beta = \dfrac{3}{4}$

4. Demuestra que si tg $\alpha = \dfrac{b}{a}$, entonces es $a\cos 2\alpha + b\,\text{sen}\, 2\alpha = a$.

5. Simplifica todo lo que puedas la siguiente expresión trigonométrica: $\dfrac{\cos(2a - b) - \cos(2a + b)}{\text{sen}(2a + b) + \text{sen}(2a - b)}$.

6. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica: $\cos x = \cos 2x$.

7. Calcula el valor de las incógnitas indicadas en los siguientes triángulos rectángulos.

a) Datos: $a = 8$ cm, $b = 15$ cm, $\widehat{C} = 90°$. Incógnitas: c, $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$.

b) Datos: $b = 25$ cm, $\widehat{C} = 73°\ 45'$, $\widehat{B} = 90°$. Incógnitas: a, c y $\widehat{A}$.

8. Desde un punto situado a 10 m de un edificio, una persona que mide 180 cm ve el extremo más alto del mismo bajo un ángulo de 43°. Calcula la altura del edificio.

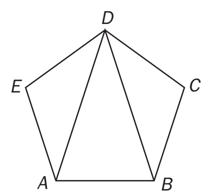
9. Resuelve los siguientes triángulos.

a) $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $\widehat{C} = 35°$ b) $a = 10$ cm, $\widehat{B} = 30°$, $\widehat{C} = 50°$

10. Las medidas de los lados de un triángulo son 10, 20 y 25 cm, respectivamente. Calcula la longitud de la mediana de dicho triángulo que parte del ángulo mayor.

11. Desde un cierto punto del suelo se ve la copa de un pino bajo un ángulo de 45°. Si nos alejamos 2 m hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie del pino, vemos la copa bajo un ángulo de 25°. Calcula la altura del pino.

12. Desde los extremos A y B de un lado de un pentágono regular se trazan las diagonales hasta el vértice opuesto D, formando un triángulo isósceles ABD. Halla el área del triángulo sabiendo que el lado del pentágono mide 5 cm.



13. En el triángulo ABC, los lados miden: $a = 24$ m, $b = 28$ m y $c = 36$ m. Halla:

a) Los ángulos del triángulo.

b) La tangente del ángulo $\dfrac{\widehat{C}}{2}$.

c) El seno del ángulo $\widehat{C}$.

d) El área del triángulo.

e) El radio, r, de la circunferencia inscrita al triángulo.

f) El radio, R, de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Soluciones propuesta A

1. a) 0,5299 e) $-1{,}1223$ i) $-1{,}0458$
b) 0,7314 f) $-1{,}1918$ j) 1,7557
c) 0,3057 g) 0,3947 k) $-1{,}9116$
d) $-1{,}8361$ h) 0,6752 l) 28,1587

2. a) $\alpha \approx 3{,}58$ ó $5{,}85$ rad d) $\alpha \approx 0{,}84$ ó $2{,}30$ rad
b) $\alpha \approx 1{,}16$ ó $5{,}12$ rad e) $\alpha \approx 0{,}74$ ó $5{,}55$ rad
c) $\alpha \approx 2{,}25$ ó $5{,}39$ rad f) $\alpha \approx 2{,}36$ ó $5{,}50$ rad

3. a) $\text{sen } \alpha = +\sqrt{1 - \frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$,

$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3} : \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{14}}{2}$,

$\text{cotg } \alpha = -\frac{\sqrt{14}}{7}$, $\sec \alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\text{cosec } \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

b) $\sec \beta = +\sqrt{1 + \frac{3}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\text{cotg } \beta = -\sqrt{3}$, $\text{sen } \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2}$,

$\text{cosec } \beta = -2$

4. $$\frac{\cos a + \cos b}{\text{sen}(a + b) \cdot \text{sen}(a - b)} =$$
$$= \frac{\cos a + \cos b}{(\text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b) \cdot (\text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b)}$$
$$= \frac{\cos a + \cos b}{\text{sen}^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \text{ sen}^2 b} =$$
$$= \frac{\cos a + \cos b}{\cos^2 b - \cos^2 a \cos^2 b - \cos^2 a + \cos^2 a \cos^2 b} =$$
$$= \frac{\cos a + \cos b}{(\cos b + \cos a) \cdot (\cos b - \cos a)} = \frac{1}{\cos b - \cos a}$$

5. $$\frac{\cos^4 \alpha - \text{sen}^4 \alpha}{\cos 2\alpha - \text{sen } 2\alpha} =$$
$$= \frac{(\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha) \cdot (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha - 2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha} =$$
$$= \frac{1 - h^2 - h^2}{1 - h^2 - h^2 - 2h\sqrt{1 - h^2}} = \frac{1 - 2h^2}{1 - 2h^2 - 2h\sqrt{1 - h^2}}$$

6. $\text{sen } x + \frac{4}{3}\cos^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow 6 \text{ sen } x + 8 \cos^2 x = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 \text{ sen } x + 8(1 - \text{sen}^2 x) = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 \text{ sen } x + 8 - 8 \text{ sen}^2 x - 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8 \text{ sen}^2 x - 6 \text{ sen } x + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen } x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{16} = \frac{6 \pm 2}{16} = \frac{3 \pm 1}{8} =$

$$= \begin{cases} \text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{sen } x = \frac{1}{4} \Rightarrow x \approx 0{,}25 + 2k\pi, \ x \approx 2{,}89 + 2k\pi \end{cases}$$

$k \in Z$

7. a) $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ cm

$\cos \widehat{C} = \frac{a}{b} = \frac{12}{13} \Rightarrow \widehat{C} \approx 22° \ 37' \ 12''$;

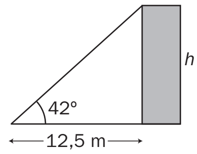
$\widehat{A} = 90 - \widehat{C} = 67° \ 22' \ 49''$

b) $\text{sen } 36° = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{16}{\text{sen } 36°} \approx 27{,}2$ cm

$\text{tg } 36° = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{16}{\text{tg } 36°} \approx 22$ cm;

$\widehat{C} = 90 - \widehat{A} = 54°$

8. Del dibujo resulta:



$\text{tg } 42° = \frac{h}{12{,}5} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 12{,}5 \cdot \text{tg } 42° \approx 11{,}26$ m

9. a) $c = \frac{2S}{b \cdot \text{sen } \widehat{A}} = 20$ cm,

$a^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos 30° \Rightarrow$
$\Rightarrow a \approx 16{,}15$ cm

$30^2 = 16{,}15^2 + 20^2 - 2 \cdot 16{,}15 \cdot 20 \cdot \cos \widehat{B} \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos \widehat{B} = 0{,}9289 \Rightarrow \widehat{B} = 111° \ 44' \ 9''$,
$\widehat{C} \approx 38° \ 15' \ 51''$.

b) $a \text{ sen } \widehat{B} = b \text{ sen } \widehat{A} \Rightarrow \text{sen } \widehat{B} = \frac{8 \text{ sen } 30°}{11} = 0{,}3636 \Rightarrow$

1ª: $\widehat{B} = 158{,}68°$, imposible ya que $\widehat{A} + \widehat{B} > 180°$

2ª: $\widehat{B} = 21{,}32° \Rightarrow \widehat{C} = 180 - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 128{,}68°$

$c \text{ sen } \widehat{B} = b \text{ sen } \widehat{C} \Rightarrow c = \frac{8 \text{ sen } 128{,}68°}{\text{sen } 21{,}32°} = 17{,}18$ cm

10. a) $\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5}{13} \Rightarrow \widehat{C} \approx 67° \ 22' \ 48''$

$\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3}{5} \Rightarrow \widehat{A} \approx 53° \ 7' \ 49''$:

$B \approx 112° \ 37' \ 12''$

b) $\text{tg}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1 - \cos \widehat{C}}{1 + \cos \widehat{C}}} = \frac{2}{3}$

c) $\text{sen } \widehat{C} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{C}} = \frac{12}{13}$

d) $S = \frac{1}{2} ab \text{ sen } \widehat{C} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 \cdot \frac{12}{13} = 84 \text{ cm}^2$

e) $S = \frac{r(a + b + c)}{2} \Rightarrow r = \frac{2S}{a + b + c} = 4$ cm

f) $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = R = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8} = 8{,}125$ cm

11. $\alpha = \frac{360°}{14} \approx 25° \ 42' \ 51'' \Rightarrow r = \frac{5}{\text{sen } \alpha} \approx 11{,}52$ cm

12. Sea $2x$ la medida de la base, entonces:

$\text{tg } 40 = \frac{x}{10} \Rightarrow x \approx 8{,}39 \text{ cm} \Rightarrow$

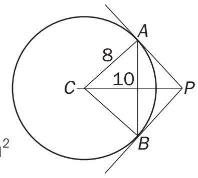
$\Rightarrow S = \frac{2x \cdot 10}{2} \approx 83{,}9 \text{ cm}^2$

13. a) $\text{sen}\left(\frac{\widehat{P}}{2}\right) = \frac{8}{10} \Rightarrow \widehat{P} \approx 106° \ 15' \ 37''$

b) $AP = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ cm

c) $S_{TOT} = \frac{AC^2 \cdot \text{sen}(180 - \widehat{P})}{2} =$

$= \frac{64 \cdot \text{sen}(73{,}74°)}{2} = 30{,}72 \text{ cm}^2$



1. a) 0,9093   e) 1,0415   i) 4,6373

b) $-0{,}9900$ f) 0,0709   j) $-1{,}4174$

c) 1,1578   g) 0,5985   k) $-1{,}0059$

d) $-1{,}0428$ h) $-0{,}9365$ l) $-0{,}0376$

2. a) $\alpha \approx 18° \; 39' \; 47''$ ó $161° \; 20' \; 13''$

b) $\alpha \approx 115° \; 28' \; 3''$ ó $244° \; 31' \; 57''$

c) $\alpha \approx 46° \; 23' \; 50''$ ó $226° \; 23' \; 50''$

d) $\alpha \approx 245° \; 22' \; 48''$ ó $294° \; 37' \; 12''$

e) $\alpha \approx 60°$ ó $300°$

f) $\alpha \approx 153° \; 26' \; 6''$ ó $333° \; 26' \; 6''$

3. a) $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{4}{7}} = -\frac{\sqrt{21}}{7}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sec \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{3}$, $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$

b) $\sec^2 \beta = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta \Rightarrow \sec \beta = -\frac{5}{4}$, $\cos \beta = -\frac{4}{5}$,

$\operatorname{sen} \beta = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{cosec} \beta = -\frac{5}{3}$, $\operatorname{cotg} \beta = \frac{4}{3}$

4. $$\left.\begin{array}{l} \cos \alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos 2\alpha = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \\ \operatorname{sen} 2\alpha = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2} \end{array}\right. \Rightarrow a \cos 2\alpha + b \operatorname{sen} 2\alpha =$$

$$= \frac{a^3 - ab^2 + 2ab^2}{a^2 + b^2} = \frac{a(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = a$$

5. $$\frac{\cos(2a - b) - \cos(2a + b)}{\operatorname{sen}(2a + b) + \operatorname{sen}(2a - b)} =$$

$$= \frac{\cos 2a \cos b + \operatorname{sen} 2a \operatorname{sen} b - \cos 2a \cos b + \operatorname{sen} 2a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} 2a \cos b + \cos 2a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} 2a \cos b - \cos 2a \operatorname{sen} b}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} 2a \operatorname{sen} b}{2 \operatorname{sen} 2a \cos b} = \operatorname{tg} b$$

6. $\cos x = \cos 2x \Rightarrow \cos x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$\cos x = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos x = 1 \Rightarrow x = 0 + 2k\pi \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right.$$

$k \in Z$

7. a) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64 + 225} = 17$ cm

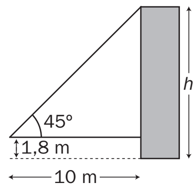
$\operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} \Rightarrow \widehat{B} \approx 61° \; 55' \; 39''$; $\widehat{C} \approx 28° \; 4' \; 21''$

b) $a = b \cdot \cos \widehat{C} \approx 7$ cm; $c = b \cdot \operatorname{sen} \widehat{C} \approx 24$ cm

$\widehat{A} = 16° \; 15'$

8. Del dibujo se deduce:

$\operatorname{tg} 43° = \frac{h - 1{,}8}{10} \Rightarrow h = 11{,}13$ m



9. a) $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}} = 8{,}61$ cm

$\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0{,}60 \Rightarrow \widehat{A} = 53° \; 5' \; 16'' \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{B} = 91° \; 54' \; 44''$

b) $\widehat{A} = 100°$, $\quad b = \frac{10 \cdot \operatorname{sen} 30}{\operatorname{sen} 100} = 5{,}08$ cm,

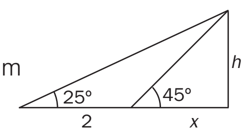
$c = \frac{10 \cdot \operatorname{sen} 50}{\operatorname{sen} 100} = 7{,}78$ cm

10. Sea m la medida de la mediana. Aplicando dos veces el teorema del coseno:

$$m = \sqrt{10^2 + 12{,}5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12{,}5 \cdot \frac{25^2 + 10^2 - 20^2}{2 \cdot 25 \cdot 10}} \approx 9{,}68 \text{ cm}$$

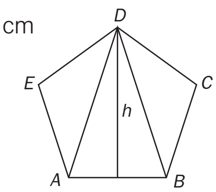
11. Sea h la altura del pino y x la distancia del pie del pino al primer punto:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} 45 = \dfrac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 25 = \dfrac{h}{2 + x} \end{array}\right\} \Rightarrow h = x \approx 1{,}75 \text{ m}$$



12. $\widehat{B} = 72° \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot 72° \approx 7{,}69$ cm

$S = \frac{l \cdot h}{2} \approx 19{,}24$ cm^2



13. a) $\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{21} \Rightarrow \widehat{C} \approx 87° \; 16' \; 14''$

$\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{47}{63} \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{A} \approx 41° \; 45' \; 8''$: $\widehat{B} = 50° \; 58' \; 38''$

b) $\operatorname{tg}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1 - \cos \widehat{C}}{1 + \cos \widehat{C}}} = \sqrt{\frac{10}{11}} = \frac{\sqrt{110}}{11}$

c) $\operatorname{sen} \widehat{C} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{C}} = \frac{\sqrt{440}}{21} \approx 0{,}999$

d) $S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \widehat{C} \approx \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 28 \cdot 0{,}999 = 335{,}66$ cm^2

e) $S = \frac{r(a + b + c)}{2} \Rightarrow r = \frac{2S}{a + b + c} = 7{,}63$ cm

f) $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \Rightarrow R = \frac{24 \cdot 28 \cdot 36}{4 \cdot 335{,}66} = 18{,}02$ cm

4 Vectores

Propuesta A

1. Se consideran los puntos $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(4, 0)$, $D(4, 5)$ y $E(1, 5)$.

a) Representa los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{EA}$.

b) Determina sus coordenadas y calcula sus módulos.

c) Si consideramos los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{EA}$ como representantes de los vectores libres $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$, e $\vec{y}$, respectivamente, calcula $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{x} + \vec{y}$ y justifica gráficamente el resultado.

2. a) Si P es el punto $P(-1, 2)$ y $= \overrightarrow{PQ}(5, 3)$, calcula las coordenadas del punto extremo Q.

b) Si el punto extremo del vector $\overrightarrow{AB} = (-2, 6)$ es $B(-2, -4)$, calcula las coordenadas del punto origen A.

3. Con los puntos $A(3, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(-3, 0)$ y un cuarto punto D se pueden formar tres paralelogramos distintos. Calcula las coordenadas del punto D y las del centro del paralelogramo en los tres casos. Expresa el área del triángulo formado por los centros de los tres paralelogramos en función del área del triángulo ABC.

4. Calcula la medida de los lados del hexágono de vértices $A(2, 1)$, $B(1, 2)$, $C(-1, 2)$, $D(-2, -1)$, $E(-1, -3)$ y $F(2, -2)$.

5. Efectúa las siguientes operaciones con vectores.

a) $(5, -3) + (-3, -1)$

b) $(1, 2) + (-2)(3, 4) + (-3)(5, -6)$

c) $(-2, 4) + (-1)[(2, -1) + (-1)(-3, -4)]$

d) $3[2(-2, 3) + (-2)(3, -4)] + (-1, -2)$

e) $(-2)(3, -3) + 3(-3, 3) + (1, 0)$

f) $\frac{1}{2}(-1, 3) + (-2)\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

6. Calcula el producto escalar de los siguientes vectores.

a) $\vec{u} = (3, 4)$ $\vec{v} = (2, 5)$

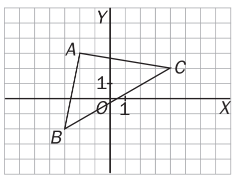
b) $\vec{u} = (-2, 4)$ $\vec{v} = (2, -1)$

c) $\vec{u} = (-3, -4)$ $\vec{v} = (2, 0)$

7. Calcula un vector unitario y que sea ortogonal a $\vec{u} = (15, -8)$.

8. Calcula dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, de módulo igual a 5 y que sean ortogonales a $\vec{u} = (-1, -2)$.

9. Calcula la medida de los lados y de los ángulos del triángulo de la figura..



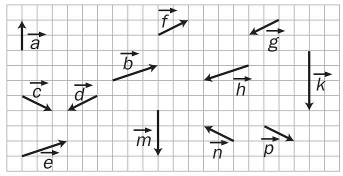
10. Expresa el vector $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ como suma de un vector que tenga la misma dirección que $\vec{a} = (3, 1)$ y de otro que sea perpendicular a este último.

11. Completa la siguiente tabla.

	$\lvert\vec{u}\rvert$	$\lvert\vec{v}\rvert$	$\alpha(\vec{u}, \vec{v})$	$\cos\alpha$	$\vec{u}\cdot\vec{v}$
$\vec{u} = (1, 1)$ $\vec{v} = (-1, 1)$					
$\vec{u} = (4, -3)$ $\vec{v} = (-1, 0)$					
$\vec{u} = (-6, 8)$ $\vec{v} = (3, -4)$					
$\vec{u} = (4, 4)$ $\vec{v} = (0, -5)$					

Propuesta B

1. Dados los vectores de la figura, indica las coordenadas de cada uno de ellos y decide cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.



a) $\vec{a} = \vec{m}$ d) $\vec{m} = -\vec{k}$ g) $\vec{b} = -\vec{h}$

b) $\vec{b} = \vec{e}$ e) $\vec{f} = \vec{g}$ h) $\vec{g} = \vec{d}$

c) $\vec{c} = -\vec{n}$ f) $\vec{c} = -\vec{p}$ l) $\vec{n} = \vec{p}$

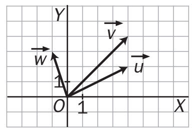
2. En cada uno de los siguientes casos, calcula las coordenadas del vector de origen el punto A y extremo el punto B.

a) $A(2, 3)$ y $B(4, 5)$ b) $A(-1, 2)$ y $B(4, -3)$ c) $A(-2, -4)$ y $B(-4, 5)$ d) $A(-2, 3)$ y $B(-2, 4)$

3. Con los puntos $A(-2, 4)$, $B(1, 6)$, $C(5, 0)$ y $D(3, -8)$ se forma un cuadrilátero irregular (trapezoide). Comprueba gráfica y vectorialmente que con los puntos medios de cada lado se forma un paralelogramo. ¿Ocurrirá lo mismo con todos los cuadriláteros que formemos? Compruébalo con otro ejemplo y demuestra con vectores que esta propiedad siempre se verifica.

4. Calcula los ángulos del cuadrilátero cuyos vértices son $A(2, 2)$, $B(2, 4)$, $C(-1, 1)$ y $D(-1, -1)$.

5. Dados los vectores de la figura, calcula el resultado de las siguientes operaciones.



a) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) - \vec{w} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

c) $\vec{u} \cdot (2\vec{v} + 3\vec{w}) - \vec{w} \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v})$

6. Calcula el módulo de los siguientes vectores.

a) $\vec{u} = (3, 4)$ b) $\vec{v} = (-6, 8)$ c) $\vec{w} = (-24, -32)$

7. Calcula un vector unitario y que tenga la misma dirección y sentido opuesto que $\vec{u} = (16, -30)$.

8. Expresa el vector $\vec{x} = \vec{i} + \vec{j}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ y $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.

9. El vector $\vec{t} = (-1, 2)$ lo hemos descompuesto como suma de dos vectores, uno de ellos en la dirección del vector $\vec{x} = (-3, 2)$ y el otro en dirección perpendicular al vector $\vec{y} = (1, 2)$. Averigua cuáles son esos vectores.

10. Completa la tabla siguiente.

$\lvert\vec{u}\rvert$	$\lvert\vec{v}\rvert$	$\alpha(\vec{u}, \vec{v})$	$\cos \alpha$	$\vec{u} \cdot \vec{v}$
2	3	60°		
1	5			-5
$\sqrt{3}$		45°		3
	4		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

11. Tres de los vértices del paralelogramo $ABCD$ son los puntos $A(-5, 4)$, $C(7, 1)$ y $D(-1, -3)$. Determina:

a) Las coordenadas del cuarto vértice B.

b) La longitud de los lados del paralelogramo.

c) La longitud de las diagonales.

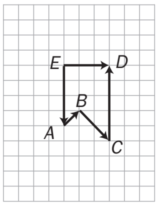
d) Las coordenadas del centro del paralelogramo

e) Los ángulos del paralelogramo.

f) Los ángulos que forman sus diagonales.

g) El área del paralelogramo.

Soluciones propuesta A

1. a) 

b) $\overrightarrow{AB} = (1, 1) \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{BC} = (2, -2) \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{8}$

$\overrightarrow{CD} = (0, 5) \quad |\overrightarrow{CD}| = 5$

$\overrightarrow{DE} = (-3, 0) \quad |\overrightarrow{DE}| = 3$

$\overrightarrow{EA} = (0, -4) \quad |\overrightarrow{EA}| = 4$

c) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{x} + \vec{y} = (0, 0)$. El origen del primero coincide con el extremo del último.

2. a) $\vec{q} = \vec{p} + [\overrightarrow{PQ}] \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{q} = (-1, 2) + (5, 3) = (4, 5) \Rightarrow Q(4, 5)$

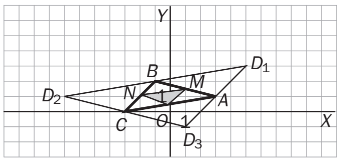
b) $\vec{a} = \vec{b} - [\overrightarrow{AB}] \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{a} = (-2, -4) - (-2, 6) = (0, -10) \Rightarrow A(0, -10)$

3. a) Paralelogramo AD_1BC

Si se toma $D_1(x, y)$, entonces $\overrightarrow{AD_1}$ es equipolente a $\overrightarrow{CB} \Rightarrow (x - 3, y - 1) = (2, 2) \Rightarrow D_1(5, 3)$

El centro es el punto medio de la diagonal $\overline{AB}$: $M\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$



b) Paralelogramo ABD_2C

Con $D_2(x, y)$, es $\overrightarrow{AB}$ equipolente a $\overrightarrow{CD_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-4, 1) = (x + 3, y) \Rightarrow D_2(-7, 1)$

El centro será ahora el punto medio de $\overline{BC}$: $N(-2, 1)$.

c) Paralelogramo AD_3CB

Si $D_2(x, y)$, será $\overrightarrow{AB}$ equipolente a $\overrightarrow{D_3C} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-4, 1) = (-3 - x, -y) \Rightarrow D_3\ (1, -1)$

El centro es el punto medio de $\overline{AC}$: $P\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

$S_{MNP} = \dfrac{1}{4} S_{ABC}$

4. $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1 - 2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{2}$

$\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{4} = \sqrt{2}$

$\overline{CD} = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-2 + 1)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{10}$

$\overline{DE} = |\overrightarrow{DE}| = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (-3 + 1)^2} = \sqrt{5}$

$\overline{EF} = |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-2 + 3)^2} = \sqrt{10}$

$\overline{FA} = |\overrightarrow{FA}| = \sqrt{(2 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{9} = 3$

5. a) $(5, -3) + (-3, -1) = (2, -4)$

b) $(1, 2) + (-2)(3, 4) + (-3)(5, -6) = (-20, 12)$

c) $(-2, 4) + (-1)[(2, -1) + (-1)(-3, -4)] = (-7, 1)$

d) $3[2(-2, 3) + (-2)(3, -4)] + (-1, -2) = (-31, 40)$

e) $(-2)(3, -3) + 3(-3, 3) + (1, 0) = (-14, 15)$

f) $\dfrac{1}{2}(-1, 3) + (-2)\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{7}{6}, \dfrac{5}{2}\right)$

6. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (2, 5) = 6 + 20 = 26$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2, 4) \cdot (2, -1) = -4 - 4 = -8$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, -4) \cdot (2, 0) = -6$

7. El vector $\vec{v} = (8, 15)$ es ortogonal a $\vec{u} = (15, -8)$, ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 120 - 120 = 0$.

Para obtener un vector en la dirección de $\vec{v}$ y que sea unitario, basta dividir $\vec{v}$ por su módulo:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{8}{\sqrt{8^2 + 15^2}}, \frac{15}{\sqrt{8^2 + 15^2}}\right) = \left(\frac{18}{17}, \frac{15}{17}\right)$$

8. Un vector ortogonal a $\vec{u} = (-1, -2)$ es $\vec{x} = (2, -1)$.

Los vectores buscados son $\vec{a} = 5\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \left(\dfrac{10}{\sqrt{5}}, \dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right)$

y $\vec{b} = -5\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \left(\dfrac{-10}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

9. $A(-2, 3)$; $B(-3, -2)$; $C(4, 2)$

$\overrightarrow{AB} = (-1, -5)$; $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$

$\overrightarrow{BC} = (7, 4)$; $d(B, C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$

$\overrightarrow{CA} = (-6, 1)$; $d(C, A) = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37}$

$$\cos \widehat{A} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-6 + 5}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{37}}$$

$= -0{,}032 \Rightarrow \widehat{A} \approx 91°\ 50'\ 51''$.

$$\cos \widehat{B} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{27}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{65}} =$$

$= 0{,}657 \Rightarrow \widehat{B} \approx 48°\ 56'\ 43''$;

$\widehat{C} = 180 - \widehat{A} - \widehat{B} \approx 39°\ 12'\ 26''$.

10. Sea $\vec{a} = (3, 1)$

Un vector $\vec{b}$ perpendicular a $\vec{a}$ es $\vec{b} = (-1, 3)$

$\vec{u} = (2, -3) = \lambda(3, 1) + \mu(-1, 3) = (3\lambda - \mu, \lambda + 3\mu) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\lambda - \mu = 2 \\ \lambda + 3\mu = -3 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{10} \quad \mu = -\frac{11}{10}$$

Por tanto, $\vec{u} = \dfrac{3}{10}\vec{a} - \dfrac{11}{10}\vec{b}$

11.

	$\lvert\vec{u}\rvert$	$\lvert\vec{v}\rvert$	$\alpha(\vec{u}, \vec{v})$	$\cos \alpha$	$\vec{u} \cdot \vec{v}$
$\vec{u} = (1, 1)$ $\vec{v} = (-1, 1)$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	90°	0	0
$\vec{u} = (4, -3)$ $\vec{v} = (-1, 0)$	5	1	≈143°	$\dfrac{-4}{5}$	-4
$\vec{u} = (-6, 8)$ $\vec{v} = (3, -4)$	10	5	180°	-1	-50
$\vec{u} = (4, 4)$ $\vec{v} = (0, -5)$	$4\sqrt{2}$	5	135°	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	-20

Soluciones propuesta B

1. $\vec{a} = (0, 2)$ $\vec{b} = (3, 1)$ $\vec{c} = (2, -1)$

$\vec{d} = (-2, -1)$ $\vec{e} = (3, 1)$ $\vec{f} = (2, 1)$

$\vec{g} = (-2, -1)$ $\vec{h} = (-3, -1)$ $\vec{k} = (0, -4)$

$\vec{m} = (0, -3)$ $\vec{n} = (-2, 1)$ $\vec{p} = (2, -1)$

(Verdadero: V; falso: F)

a) $\vec{a} = \vec{m}$ F d) $\vec{m} = -\vec{k}$ F g) $\vec{b} = -\vec{h}$ V

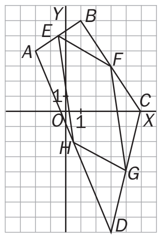
b) $\vec{b} = \vec{e}$ V e) $\vec{f} = \vec{g}$ F h) $\vec{g} = \vec{d}$ V

c) $\vec{c} = -\vec{n}$ V f) $\vec{c} = -\vec{p}$ F l) $\vec{n} = \vec{p}$ F

2. a) $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$ c) $\overrightarrow{AB} = (-2, 9)$

b) $\overrightarrow{AB} = (5, -5)$ d) $\overrightarrow{AB} = (0, 1)$

3. Si suponemos que los puntos son $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ y $D(d_1, d_2)$, los puntos E, F, G y H son:



$$E\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right), F\left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2}\right),$$

$$G\left(\frac{c_1 + d_1}{2}, \frac{c_2 + d_2}{2}\right), H\left(\frac{a_1 + d_1}{2}, \frac{a_2 + d_2}{2}\right),$$

Y de aquí, es inmediato comprobar que los vectores

$$\overrightarrow{EF} = \left(\frac{c_1 - a_1}{2}, \frac{c_2 - a_2}{2}\right) \quad \overrightarrow{HG} = \left(\frac{c_1 - a_1}{2}, \frac{c_2 - a_2}{2}\right)$$

son equipolentes, con lo que se demuestra que esta propiedad siempre se verifica.

4. $\overrightarrow{AB} = (0, 2)$ $\overrightarrow{BC} = (-3, -3)$ $\overrightarrow{CD} = (0, -2)$ $\overrightarrow{DA} = (3, 3)$

Por tanto, se trata de un paralelogramo.

$$\cos \widehat{A} = \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{-6}{2\sqrt{18}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C} = 135°, \quad \widehat{B} = \widehat{D} = 45°$$

5. De la figura resulta $\vec{u} = (4, 2)$, $\vec{v} = (4, 4)$, $\vec{w} = (-1,3)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} =$
$= (4, 2)(4, 4) + (4, 2)(-1, 3) = 24 + 2 = 26$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) - \vec{w} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) =$
$= (4, 2)(3, 7) - (-1, 3)(0, -2) = 32$

c) $\vec{u} \cdot (2\vec{v} + 3\vec{w}) - \vec{w} \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v}) =$
$= (4, 2)(5, 17) -(-1, 3)(4, -2) = 64$

6. a) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$

c) $|\vec{w}| = \sqrt{(-24)^2 + (-32)^2} = \sqrt{1600} = 40$

7. Para obtener un vector en la dirección de $\vec{u}$ y que sea unitario, basta dividir $\vec{u}$ por su módulo, y para que tenga sentido contrario se multiplica por (-1):

$$\frac{-\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{16^2 + (-30)^2}}(-16, 30) = \left(-\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$$

8. $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Rightarrow \vec{i} + \vec{j} = \alpha(2\vec{i} - \vec{j}) + \beta(3\vec{i} - 2\vec{j}) =$
$= (2\alpha + 3\beta)\vec{i} + (-a - 2\beta)\vec{j} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 1 \\ -\alpha - 2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

Luego $\vec{x} = 5\vec{u} - 3\vec{v}$

9. El vector $\vec{w} = (2, -1)$ es ortogonal a $\vec{y}$, así:

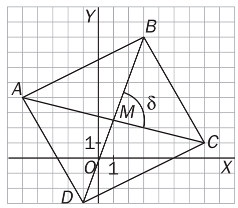
$$\vec{t} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{w} \Rightarrow \begin{cases} -1 = -3\alpha + 2\beta \\ 2 = 2\alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

Los vectores son: $3\vec{x} = (-9, 6)$ y $4\vec{w} = (8, -4)$.

10.

$\lvert\vec{u}\rvert$	$\lvert\vec{v}\rvert$	$\alpha(\vec{u}, \vec{v})$	$\cos \alpha$	$\vec{u} \cdot \vec{v}$
2	3	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$3\sqrt{3}$
1	5	180°	-1	-5
$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	3
$\frac{\sqrt{12}}{12}$	4	150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

11. a) Si B es el punto $B(x, y)$:



$\overrightarrow{AB}$ es equipolente a $\overrightarrow{DC} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 5, y - 4) = (8, 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow B(3, 8)$ con lo que

$\overrightarrow{AB} = (8, 4)$, $\overrightarrow{AD} = (4, -7)$

b) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{65}$

c) $\overrightarrow{AC} = (12, -3)$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{153}$

$\overrightarrow{DB} = (4, 11)$; $|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{137}$

d) Punto medio de AC: $N\left(1, \frac{5}{2}\right)$

e) $$\cos \widehat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{4}{4\sqrt{5} \cdot \sqrt{65}} = 0{,}055 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C} \approx 86°\ 49'\ 13'' \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D} = 180° - \widehat{A} \approx 93°\ 19'\ 47''$

f) $$\cos \delta = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{DB}|} = \frac{15}{\sqrt{153} \cdot \sqrt{137}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \delta = 89°\ 36'\ 15''$

g) $S = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|$ sen $\widehat{A} =$
$= 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{65} \cdot \text{sen}(86°\ 49'\ 13'') = 72u^2$

5 Geometría analítica plana

Propuesta A

1. Calcula la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas, la ecuación general y la ecuación explícita de la recta r en los siguientes casos.

a) r pasa por el punto $A(-1, 3)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (-3, -2)$.

b) Pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(-3, 4)$.

c) Pasa por el punto $A(-3, 4)$ y su pendiente vale $m = 2$.

d) Corta los ejes coordenados en los puntos $P(0, -3)$ y $Q(4, 0)$.

2. Calcula el punto de intersección de las siguientes rectas.

a) $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ -4x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + 4y - 12 = 0 \\ x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 4y - 7 = 0 \\ -4x + 3y + 26 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x + 13y - 33 = 0 \\ -4x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$

3. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, -3)$ y es paralela a la recta r en los siguientes casos.

a) r: $2x + y = 0$ b) r: $2x - 3y + 7 = 0$ c) r: $-2x + 3y + 17 = 0$ d) r: $y + 8 = 0$

4. Decide en cuáles de los siguientes casos los puntos A, B y C están alineados y en cuáles forman triángulo.

a) $A(-1, -5)$ $B(0, -3)$ $C(-2, -7)$ b) $A(1, 2)$ $B(2, 7)$ $A(-1, 3)$

5. Tenemos una recta de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 5t \end{cases}$. Para $t = -2$ y para $t = 8$ obtenemos dos puntos que son los extremos del segmento AB. Calcula:

a) Las coordenadas de los puntos A y B.

b) La longitud del segmento AB.

c) Las coordenadas del punto medio del segmento AB.

d) Las coordenadas de otros cuatro puntos M, N, P y Q que dividen el segmento en cinco partes iguales.

e) ¿Para qué valor del parámetro t se obtiene el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas?

6. Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas.

a) $\begin{array}{l} r: x + y - 5 = 0 \\ s: 3x - y - 1 = 0 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} r: y = \dfrac{2}{3}x - 1 \\ s: y = -x + 8 \end{array}$ c) r: $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -5t \end{cases}$ s: $4x - 7y - 6 = 0$

7. Dado el triángulo de vértices $A(3, 1)$ $B(2, -2)$ $C(0, 0)$:

a) Calcula las coordenadas de su baricentro.

b) Calcula las ecuaciones de las rectas que pasan por el baricentro y son paralelas a cada uno de los lados del triángulo.

c) Escribe la ecuación del haz de rectas cuyo vértice es el baricentro del triángulo.

8. Calcula el valor de k para que la recta $-2kx + (3k - 2)y - k = 0$ pase por el punto $A(-1, 5)$.

9. Dadas las rectas r: $3x - y + 5 = 0$ y s: $2x + 3y - 4 = 0$ y el punto $P(3, 4)$:

a) Calcula la suma de las distancias que separan a P de cada una de las rectas.

b) Calcula la distancia que separa a P del punto de corte de ambas rectas.

10. Calcula las coordenadas de un punto situado en el eje de ordenadas y que equidiste de los puntos que tienen por coordenadas $A(2, 1)$ y $B(4, 5)$.

11. Calcula las coordenadas de un punto que pertenezca a la recta r: $x - 2y + 3 = 0$ y tal que la distancia que le separa del punto $P(6, -1)$ sea igual a 5 unidades de longitud.

12. Se considera la recta que tiene por ecuación r: $x - y + 4 = 0$ y los puntos que tienen por coordenadas $A(0, 7)$ y $B(3, 2)$:

a) Calcula la ecuación de la recta s que pasa por A y por B.

b) Calcula las ecuaciones de las bisectrices determinadas por las rectas r y s.

Propuesta B

1. Calcula las ecuaciones vectorial, paramétricas, general y explícita de la recta r en los siguientes casos.

a) Pasa por el punto $A(2, 0)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (1, 2)$.

b) Pasa por los puntos $A(4, 2)$ y $B(1, 4)$.

c) Pasa por el punto $A(5, -4)$ y su pendiente vale $m = -\frac{3}{5}$.

d) Corta los ejes coordenados en los puntos $P(0, 5)$ y $Q(2, 0)$.

2. Comprueba si las siguientes rectas son secantes, paralelas o coincidentes. En el caso de que sean secantes, calcula el correspondiente punto de corte.

a) $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ -4x - 6y + 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + 4y - 12 = 0 \\ 3x - 6y + 18 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ -7x - \frac{21y}{2} + 26 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ -2x + 4y - 6 = 0 \end{cases}$

3. Calcula el valor de k para que la recta $x + (1 + k)y - 3 - k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo de cuatro unidades cuadradas de área.

4. Calcula las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices $A(1, 2)$ $B(2, 7)$ $C(-1, 3)$.

5. La pendiente de una recta es $m = -\frac{2}{5}$ y su ordenada en el origen es $n = 13$.

a) Escribe la ecuación explícita de la recta.

b) Determina dos puntos de la recta de coordenadas enteras.

c) Transforma la ecuación y escribe la ecuación general con coeficientes enteros.

d) Indica un vector director de la recta.

e) ¿Qué ángulo forma la recta con el eje positivo de abscisas?

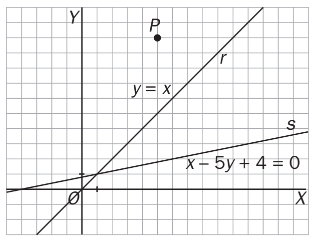
6. Demuestra que las siguientes rectas son paralelas y calcula después la distancia que las separa.

r: $2x + y - 2 = 0$ $\qquad$ s: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 4t \end{cases}$

7. Si $m > 0$ y la recta determinada por los puntos $A(m, 4)$ y $B(1, m)$ tiene pendiente m, determina el valor de m, los puntos A, B y la ecuación general de la recta.

8. El punto $P(5, 10)$ se refleja sucesivamente en las rectas r: $x - y = 0$ y s: $x - 5y + 4 = 0$, es decir, hallamos el simétrico de P respecto de r y luego el simétrico de P' respecto de s. Calcula las coordenadas del punto P''.

La composición de las dos simetrías equivale a un giro de centro C y ángulo de giro α. Calcula las coordenadas de C y el valor de α.



9. El baricentro de un triángulo es $G(4, 5)$. Si el punto medio de un lado es $M(1, 3)$ y uno de los extremos de ese lado es $B(3, -6)$, determina las coordenadas de los otros vértices y los ángulos del triángulo.

10. Halla la ecuación general de la mediatriz del segmento de extremos $A(3, -4)$ y $B(1, -8)$. ¿A qué distancia del origen de coordenadas se encuentra la mediatriz hallada?

11. Calcula las proyecciones ortogonales de los puntos $A(5, 3)$ y $B(1, 4)$ sobre la recta r: $3x + y - 3 = 0$.

12. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(7, 1)$ y dista 2 unidades del punto $Q(1, 5)$. ¿Cuántas soluciones tiene el problema? Represéntalo gráficamente.

Soluciones propuesta A

1. a) $\vec{x} = (-1, 3) + t(-3, -2) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x + 1}{-3} = \dfrac{y - 3}{-2} \Rightarrow 2x - 3y + 11 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{11}{3}$

b) $\vec{x} = (-1, 2) + t(-2, 2) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 + 2t \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x + 1}{-2} = \dfrac{y\ \ 2}{2} \Rightarrow x + y - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -x + 1$

c) $y - 4 = 2(x + 3) \Rightarrow y = 2x + 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - y + 10 = 0 \Rightarrow \vec{x} = (0, 10) + t(1, 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 10 + 2t \end{cases}$

d) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3} = 1 \Rightarrow y = \dfrac{3}{4}x - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 4y - 12 = 0 \Rightarrow \vec{x} = (0, -3) + t(4, 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; P(1, 1)$

b) $\begin{cases} -x + 2y = 6 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 6 \\ 5y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}; Q(-2, 2)$

c) $\begin{cases} 12x + 16y = 28 \\ -12x + 9y = -78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 16y = 28 \\ 25y = -50 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}; R(5, -2)$

d) $\begin{cases} 28x + 52y = 132 \\ -28x + 21y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28x + 52y = 132 \\ 73y = 146 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}; S(1, 2)$

3. a) r: $2x + y - 1 = 0$ c) r: $-2x + 3y + 13 = 0$

b) r: $2x - 3y - 13 = 0$ d) r: $y + 3 = 0$

4. a) Están alineados, ya que $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$ y $\overrightarrow{BC} = (-2, -4)$ son paralelos. A, B y C pertenecen a la recta $y = 2x - 3$.

b) Forman triángulo, ya que $\overrightarrow{AB} = (1, 5)$ y $\overrightarrow{BC} = (-3, -4)$ no son paralelos.

5. a) $A(-8, 11)$ y $B(22, -39)$

b) $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{30^2 + (-50)^2} = 10\sqrt{34}$

c) $C(7, -14)$

d) $t = 0 \Rightarrow M(-2, 1)$; $t = 2 \Rightarrow N(4, -9)$
$t = 4 \Rightarrow P(10, -19)$; $t = 6 \Rightarrow Q(16, -29)$

e) $0 = -2 + 3t \Rightarrow t = \dfrac{2}{3}$

6. a) A partir de los vectores perpendiculares a cada recta, $\vec{u} = (-1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 3)$, respectivamente: $\cos\alpha =$

$= \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{|-1 + 3|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{2}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 63° 26' 6''$

b) A partir de las pendientes de las rectas $m_1 = \dfrac{2}{3}$ y $m_2 = -1$, respectivamente:

$\operatorname{tg}\beta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\dfrac{\frac{2}{3} + 1}{1 - \frac{2}{3}}\right| = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta \approx 78° 41' 24''$

c) A partir de los vectores directores de cada recta, $\vec{u} = (-3, -5)$ y $\vec{v} = (7, 4)$, respectivamente

$\cos\delta = \dfrac{|-41|}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{65}} \Rightarrow \delta \approx 29° 17' 29''$

7. a) $G\left(\dfrac{3 + 2 + 0}{3}, \dfrac{1 - 2 + 0}{3}\right) \Rightarrow G\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

b) Paralela a AB por G: $\dfrac{x - \frac{5}{3}}{-1} = \dfrac{y + \frac{1}{3}}{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 3x - \dfrac{16}{3}$

Paralela a AC por G: $\dfrac{x - \frac{5}{3}}{-3} = \dfrac{y + \frac{1}{3}}{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{8}{9}$

Paralela a BC por G: $\dfrac{x - \frac{5}{3}}{-2} = \dfrac{y + \frac{1}{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -x + \dfrac{4}{3}$

c) $\alpha(9x - 3y - 16) + \beta(3x - 9y - 8) = 0$

8. Sustituyendo las coordenadas de A en la ecuación:

$2k + 5(3k - 2) - k = 0 \Rightarrow 16k - 10 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{5}{8}$

9. a) $d(P, r) + d(P, s) = \dfrac{|9 - 4 + 5|}{\sqrt{10}} + \dfrac{|6 + 12 - 4|}{\sqrt{13}} =$

$= \sqrt{10} + \dfrac{14\sqrt{13}}{13}$

b) Punto de corte $Q(-1, 2)$

$P(P, Q) = \sqrt{(3 + 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

10. El punto será el de corte del eje con la mediatriz del segmento AB:

$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 5)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 2y - 9 = 0$

$\begin{cases} x + 2y - 9 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{9}{2}$ El punto es $T\left(0, \dfrac{9}{2}\right)$

11. r: $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = t \end{cases}$ Sea $Q(-3 + 2t, t)$ $d(Q, P) = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(9 - 2t)^2 + (-1 - t)^2} = 5 \Rightarrow t = \dfrac{19}{5}$; $t = 3$

Hay dos soluciones: $Q_1\left(\dfrac{23}{5}, \dfrac{19}{5}\right)$ y $Q_2(3, 3)$.

12. a) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y - 7}{2 - 7} \Rightarrow s$: $5x + 3y - 21 = 0$

b) $P(x, y)$ es de la bisectriz si $d(P, r) = d(P, s)$.

$\dfrac{|x - y + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|5x + 3y - 21|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{17} - 5)x - (\sqrt{17} + 3)y + 4\sqrt{17} + 21 = 0 \\ (\sqrt{17} - 5)x - (\sqrt{17} - 3)y + 4\sqrt{17} - 21 = 0 \end{cases}$

1. a) $\vec{x} = (2, 0) + t(1, 2) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} \Rightarrow 2x - y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2x - 4$

b) $\vec{x} = (4, 2) + t(-3, 2) \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2 + 2t \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x-4}{-3} = \dfrac{y-2}{2} \Rightarrow 2x + 3y - 14 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{14}{3}$

c) $y + 4 = -\dfrac{3}{5}(x - 5) \Rightarrow y = -\dfrac{3}{5}x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 5y + 5 = 0 \Rightarrow \vec{x} = (5, -4) + t(-5, 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 5t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$

d) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{5} = 1 \Rightarrow y = -\dfrac{5}{2}x + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x + 2y - 10 = 0 \Rightarrow \vec{x} = (0, 5) + t(-2, 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = 5 + 5t \end{cases}$

2. a) $\dfrac{2}{-4} = \dfrac{3}{-6} \neq \dfrac{-5}{2} \Rightarrow$ paralelas

b) $\dfrac{-2}{3} = \dfrac{4}{-6} = \dfrac{-12}{18} \Rightarrow$ coincidentes

c) $\dfrac{2}{-7} = \dfrac{3}{-\frac{21}{2}} \neq \dfrac{-1}{26} \Rightarrow$ paralelas

d) $\dfrac{1}{-2} \neq \dfrac{2}{4} \Rightarrow$ secantes con punto de corte $P\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$

3. Escribimos la ecuación en su forma segmentaria y calculamos el área del triángulo:

$x + (1 + k)y = 3 + k \Rightarrow \dfrac{x}{3 + k} + \dfrac{y}{\frac{3 + k}{1 + k}} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \dfrac{(3 + k)^2}{2 + 2k} = 4 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = 1$

4. Calculamos los puntos medios y después las correspondiente medianas:

Punto medio de BC: $M\left(\dfrac{1}{2}, 5\right)$; punto medio de AC: $N\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$; punto medio de AB: $P\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$

$\overline{MA}$: $y = -6x + 8$ $\qquad$ $\overline{NB}$: $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{5}{2}$

$\overline{PC}$: $y = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{18}{5}$

5. a) $y = -\dfrac{2}{5}x + 13$ $\qquad$ d) $\vec{u} = (-5, 2)$

b) $A(0, 13)$, $B(5, 11)$ $\qquad$ e) $\alpha = \text{arct}\left(-\dfrac{2}{5}\right) \approx 158° \, 11' \, 55''$

c) $2x + 5y - 65 = 0$

6. Obtenemos la forma general de la recta s:

$\left.\begin{array}{l} s\colon \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+1}{4} \Rightarrow 2x + y - 3 = 0 \\ r\colon 2x + y - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Las rectas son paralelas. $d(r, s) = \dfrac{|-2 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

7. $\dfrac{1 - m}{m - 4} = m \Rightarrow m = 2$; $A(2, 4)$, $B(1, 2)$.

La ecuación de la recta es $2x - y = 0$.

8. $P'(10, 5)$; $P''\left(\dfrac{141}{13}, \dfrac{10}{13}\right)$

Centro de giro $C(1, 1)$, punto de corte de las dos rectas. Ángulo $\alpha = 67° \, 22' \, 48{,}5''$, el doble del ángulo que forman las rectas.

9. Vértices:

$\overrightarrow{BM} \parallel \overrightarrow{MA} \Rightarrow A(-1, 12)$ y $[\overrightarrow{MC}] = 3[\overrightarrow{MG}] \Rightarrow C(10, 9)$.

Ángulos:

$\cos \widehat{A} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{89}{\sqrt{340} \cdot \sqrt{130}} = 0{,}466 \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{A} = 62° \, 12' \, 58''$

$\cos \beta = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{242}{\sqrt{340} \cdot \sqrt{274}} = 0{,}793 \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{B} = 37° \, 32' \, 45''$ $\qquad$ $\widehat{C} = 180 - \widehat{A} - \widehat{B} = 80° \, 14' \, 17''$.

10. $[\overrightarrow{AB}] = (-2, -4)$ $\quad$ Punto medio de $\overrightarrow{AB}$: $M(2, -6)$.

Mediatriz:

$[\overrightarrow{AB}] \cdot [\overrightarrow{MX}] = 0 \Rightarrow (-2, -4) \cdot (x - 2, y + 6) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow r\colon x + 2y + 10 = 0$

Distancia del origen a r: $d(O, r) = \dfrac{|10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 2\sqrt{5}$

11. $r\colon 3x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$

Un punto genérico de r es $P(t, 3 - 3t)$, $\overrightarrow{AA'} = (t_1 - 5, -3t_1)$, $\overrightarrow{BB'} = (t_2 - 1, -1 - 3t_2)$ y un vector director de r es $\vec{u} = (1, -3)$

Como $\begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0 \\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{BB'} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 - 5 + 9t_1 = 0 \\ t_2 - 1 + 3 + 9t_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{2} \\ t_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \\ B'\left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{18}{5}\right) \end{cases}$

12. $r\colon y - 1 = m(x - 7) \Leftrightarrow mx - y + (1 - 7m) = 0$

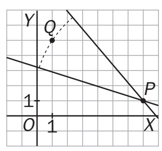
$d(Q, r) = 2 \Rightarrow \dfrac{|m - 5 + (1 - 7m)|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8m^2 + 12m + 3 = 0$

$m = \dfrac{-12 \pm \sqrt{48}}{16} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3}}{4}$ Hay dos soluciones

$r_1\colon y - 1 = \dfrac{-3 + \sqrt{3}}{4}(x - 7)$

$r_2\colon y - 1 = \dfrac{-3 - \sqrt{3}}{4}(x - 7)$



6 Cónicas

Propuesta A

1. Halla la ecuación general de las siguientes circunferencias.

a) De centro $C(-3, 2)$ y radio $r = 3$

b) De centro $C(1, -2)$ y pasa por $P(-3, 1)$

c) De diámetro AB, en donde $A(4, -1)$ y $B(6, 5)$

d) De centro $C(0, 4)$ y tangente a la recta r: $2x + y - 9 = 0$

2. Indica cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a una circunferencia y calcula en ese caso su centro y su radio.

a) $x^2 + y^2 - 8 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 10 = 0$

d) $x^2 + 2y^2 + 2x - 5 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 26 = 0$

f) $2x^2 + 2y^2 + 5x - 10y - 1 = 0$

3. Halla la ecuación de la circunferencia concéntrica con $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ y radio $r = 6$. Determina la potencia y la posición relativa del punto $P(7, 1)$ respecto de cada una de las circunferencias.

4. La recta r: $y = 2x$ corta la circunferencia de centro $C(-1, 2)$ y radio $r = 5$ en dos puntos P y Q. Calcula:

a) La ecuación general de la circunferencia

b) Las coordenadas de los puntos P y Q.

c) La longitud de la cuerda PQ

d) La ecuación de la mediatriz del segmento PQ

5. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $A(2, -1)$ es doble que al punto $B(5, 5)$. Identifica el lugar geométrico y represéntalo.

6. Halla el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son $A(2, 2)$, $B(-2, 5)$ y $C(8, 10)$.

7. Determina el foco, el vértice, la directriz y el eje de la parábola $x^2 - 2x - y + 1 = 0$. Represéntala gráficamente e indica sus elementos.

8. Determina todos los elementos y representa la elipse de ecuación: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

9. Los focos de una hipérbola son $F(1, -1)$ y $F'(-1, 1)$, y su excentricidad es $e = \sqrt{2}$. Determina:

a) La distancia focal.

b) La longitud del eje real $2a$.

c) La ecuación general de la hipérbola.

10. La excentricidad de una elipse es $e = \dfrac{1}{2}$ y pasa por el punto $P\left(6 \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}}, -3\right)$. Se sabe que la elipse tiene su centro en el origen de coordenadas y que los focos están sobre el eje OX. Determina:

a) La ecuación reducida de la elipse.

b) Las coordenadas de los vértices y los focos.

11. La ecuación $16x^2 - 25y^2 - 400 = 0$ corresponde a una cónica. Encuentra su ecuación reducida, identifícala, determina todos sus elementos y represéntala gráficamente.

Propuesta B

1. Halla la ecuación general de las siguientes circunferencias.

a) De centro $C(0, 2)$ y radio $r = 2$

b) De centro $C(6, 1)$ y pasa por $P(3, 1)$

c) De diámetro OA, en donde $O(0, 0)$ y $A(6, -8)$

d) De centro $C(1, -5)$ y tangente a la recta r: $x + y - 4 = 0$

2. Indica cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a una circunferencia y calcula en ese caso su centro y su radio.

a) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 49$

b) $x^2 + y^2 = 4x - 2y + 4$

c) $x^2 + y^2 + xy - 2y + 10 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 2y - 5 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 26 = 0$

f) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 10y - 1 = 0$

3. Determina la posición relativa de las circunferencias C_1 y C_2 entre sí y respecto a las rectas r y s.

C_1: $x^2 + y^2 - 14x - 12y + 60 = 0$ C_2: $x^2 + y^2 - 14x + 2y + 46 = 0$

r: $y = 4x + 3y - 21 = 0$ s: $y = x - 2$

4. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $P(8, 0)$ es el triple que a la recta $x = 0$. Identifica el lugar geométrico y represéntalo.

5. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(8, 2)$, $B(0, 6)$ y $C(8, 10)$. Determina su centro y su radio.

6. Halla la ecuación, el resto de elementos y haz la representación gráfica de la parábola de foco $F(3, 3)$ y directriz r: $x + 1 = 0$.

7. Los focos de una elipse son $F(1, 1)$ y $F'(-1, -1)$, y su excentricidad es $e = \frac{1}{2}$. Determina:

a) La distancia focal.

b) La longitud del eje mayor $2a$.

c) La ecuación general de la elipse.

8. La excentricidad de una hipérbola es $e = \sqrt{2}$ y pasa por el punto $P\left(-3, \sqrt{5}\right)$. Se sabe que la hipérbola tiene su centro en el origen de coordenadas y que los focos están sobre el eje X. Determina:

a) La ecuación reducida de la hipérbola.

b) Las coordenadas de los vértices y los focos.

c) La ecuación de las asíntotas.

d) Efectúa una representación gráfica (aproximada) de la misma.

9. La recta $y = x$ corta la elipse de focos $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$ y eje menor $2b = 6$ en dos puntos P y Q. Determina la longitud del segmento PQ.

10. Identifica y representa en los mismos ejes de coordenadas las cónicas cuyas ecuaciones son:

a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$

b) $16x^2 + 4y^2 - 64 = 0$

c) $x^2 - y^2 - 4 = 0$

11. Desde el origen de coordenadas se trazan las dos rectas tangentes a la circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 - 14x - 12y + 60 = 0$$

Determina:

a) La ecuación de las dos rectas.

b) La distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto de tangencia.

1. a) Radio $r = |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$,

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

b) Centro el punto medio de AB: $C(5, 2)$.

Radio $= d(A, C) = \sqrt{10}$

$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{10})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$

c) Radio: $d(C, r) = \dfrac{|2 \cdot 0 + 4 - 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$,

$x^2 + (y - 4)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 11 = 0$.

2. a) $C(0, 0)$, $r = \sqrt{8}$

b) $C(2, 0)$, $r = 3$

c) $C(-1, 5)$, $r = 4$

d) No es circunferencia.

e) $C(-1, 5)$, $r = 0$. Se reduce al punto C.

f) $C\left(-\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{2}\right)$ $r = \dfrac{\sqrt{133}}{4}$

3. Centro $C(2, 0)$. Ecuación

$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 6^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 32 = 0$

$Pot_{C_1}(P) = 7^2 + 1^2 - 4 \cdot 7 - 5 = 17 > 0$

P es exterior a la circunferencia C_1.

$Pot_{C_2}(P) = 7^2 + 1^2 - 4 \cdot 7 - 32 = -10 < 0$

P es interior a la circunferencia C_2.

4. a) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 52 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} P\left(\dfrac{3+\sqrt{109}}{5}, \dfrac{6+2\sqrt{109}}{5}\right) \\ Q\left(\dfrac{3-\sqrt{109}}{5}, \dfrac{6-2\sqrt{109}}{5}\right) \end{cases}$$

c) $d(P, Q) = \sqrt{\dfrac{4 \cdot 109}{25} + \dfrac{16 \cdot 109}{25}} = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{109}{5}} = \dfrac{2\sqrt{545}}{5}$

d) Perpendicular a la recta $y = 2x$ que pasa por C.

$y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x + 1) \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$

5. $\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} = 2\sqrt{(x - 5)^2 + (y - 5)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x - 14y + 65 = 0$

Circunferencia de centro $C(6, 7)$ y radio $r = 2\sqrt{5}$

6. Como $[\overrightarrow{AB}] \cdot [\overrightarrow{AC}] = 0$ es un triángulo rectángulo en A, por lo que el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa BC, $M\left(3, \dfrac{15}{2}\right)$ y el radio

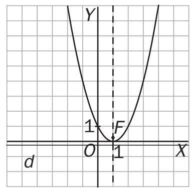
$r = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{1^2 + \left(\dfrac{11}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{122}}{2}$

$(x - 3)^2 + \left(y - \dfrac{15}{2}\right)^2 = \dfrac{122}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 60y + 139 = 0$

7. $x^2 - 2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = y$

Corresponde a una parábola de la forma $(x - \alpha)^2 = 2p(y - \beta)$ de vértice $V(\alpha, \beta)$, parámetro p y eje $x = \alpha$.



Por tanto, $V(1, 0)$, $p = \dfrac{1}{2}$ y eje $x = 1$

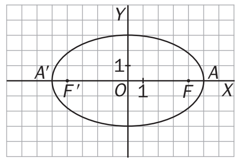
Foco $F\left(1, \dfrac{1}{4}\right)$. Directriz r: $y = -\dfrac{1}{4}$

8. $\left.\begin{array}{l} a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \\ b^2 = \ \ 9 \Rightarrow b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{25 - 9} = 4$

Vértices: $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$, $B(0, 3)$, $B'(0, -3)$

Focos $F(4, 0)$ $F'(-4, 0)$

Excentricidad $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$



9. a) $d(F, F') = 8 = 2\sqrt{2} = 2c \Rightarrow c = \sqrt{2}$

b) $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow a = 1$ y $2a = 2$

c) Ecuación

$\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} - \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} = 2$

Elevando al cuadrado dos veces se llega a la ecuación: $2xy + 1 = 0$.

10. a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ Como $e = \dfrac{1}{2} = \dfrac{c}{a} \Rightarrow a = 2c$ y además $b^2 = a^2 - c^2$. Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{24}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1 \\ a = 2c \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3\sqrt{3} \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{27} = 1$$

b) Vértices $A(6, 0)$, $A'(-6, 0)$, $B(0, 3\sqrt{3})$, $B'(0, -3\sqrt{3})$

Focos $F(3, 0)$ $F'(-3, 0)$

11. $16x^2 - 25y^2 - 400 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{16} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

Se trata de una hipérbola centrada en el origen y con los focos en el eje OY.

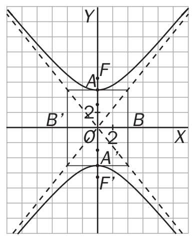
Vértices $\begin{cases} A(0, 5) \quad A'(0, -5) \\ B(4, 0) \quad B'(-4, 0) \end{cases}$

Focos $F(0, \sqrt{41})$

$F'(0, -\sqrt{41})$

$e = \dfrac{\sqrt{41}}{5}$

Asíntotas $y = \pm\dfrac{5}{4}x$



Soluciones propuesta B

1. a) $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0$

b) Radio $r = |\overrightarrow{CP}| = 3$

$(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 3^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x - 2y + 28 = 0$

c) Centro $C(3, -4)$. Radio $r = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}| = \dfrac{1}{2}10 = 5$

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

d) Radio $d(C, r) = \dfrac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 32 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 10y - 6 = 0$

2. a) $C(4, -2)$, $r = 7$

b) $C(2, -1)$, $r = 3$

c) No es circunferencia.

d) $C(0, -1)$, $r = \sqrt{6}$

e) No es circunferencia.

f) $C\left(-1, \dfrac{5}{2}\right)$, $r = \dfrac{\sqrt{31}}{2}$

3. C_1: $C_1(7, 6)$, $r_1 = 5$; C_2: $C_2(7, -1)$, $r_2 = 2$.

$d(C_1, C_2) = 7 = r_1 + r_2$ Son tangentes exteriores.

$d(C_1, r) = \dfrac{|4 \cdot 7 + 3 \cdot 6 - 21|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{25}{5} = 5 = r_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow r$ y C_1 tangentes

$d(C_2, r) = \dfrac{|4 \cdot 7 + 3 \cdot (-1) - 21|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{4}{5} = < r_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r$ y C_2 secantes

$d(C_1, s) = \dfrac{|7 - 6 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = < r_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow s$ y C_1 secantes

$d(C_2, s) = \dfrac{|7 - (-1) - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = > r_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow s$ exterior a C_2

4. Sustituimos las coordenadas de los puntos en la ecuación general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$:

$$\begin{cases} 64 + 4 + 8D + 2E + F = 0 \\ 36 + 6E + F = 0 \\ 64 + 100 + 8D + 10E + F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = -10 \\ E = -12 \\ F = 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0$

$x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 25$

Centro $C(5, 6)$ y radio $r = 5$

5. $\sqrt{(x - 8)^2 + y^2} = 3 \cdot \dfrac{|x|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 = 9x^2 \Rightarrow$

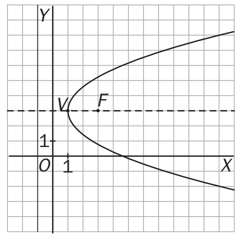
$\Rightarrow 8x^2 - y^2 + 16x - 64 = 0$

Agrupando términos:

$8(x + 1)^2 - y^2 = 72 \Leftrightarrow \dfrac{(x + 1)^2}{9} - \dfrac{y^2}{72} = 1.$

Es una hipérbola de centro $C(-1, 0)$ y semiejes $a = 3$, $b = 6\sqrt{2}$ con focos en el eje de abscisas.

6. Para un punto $P(x, y)$ de la parábola se cumplirá:



$d(P, F) = d(P, r) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 3)^2} =$

$= \dfrac{|x + 1|}{1} \Rightarrow (y - 3)^2 =$

$= 8(x - 1)$, que es la ecuación de la curva.

El vértice es el punto $V(1, 3)$, el eje la recta $y = 3$ y el parámetro $p = 4$.

7. a) $d(F, F') = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2c \Rightarrow c = \sqrt{2}$

b) $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$ $2a = 4\sqrt{2}$

c) Ecuación

$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} =$

$= 4\sqrt{2} - \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2}$

Elevando al cuadrado dos veces y simplificando:

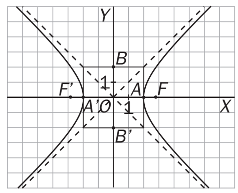
$7x^2 + 7y^2 - 2xy - 48 = 0$

8. a) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ Como $e = \sqrt{2} \Rightarrow a = b$ y además $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$.

Resolvemos $\dfrac{9}{a^2} - \dfrac{5}{a^2} = 1 \Rightarrow a = b = 2$

La ecuación es $x^2 - y^2 = 4$.

b) Vértices $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$, $B(0, 2)$, $B'(0, -2)$



Focos $F\left(2\sqrt{2}, 0\right)$

$F'\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$

c) Asíntotas $y = \pm x$

9. $2c = d(F, F') = 8 \Rightarrow c = 4$. Como $b = 3 \Rightarrow a = 5$

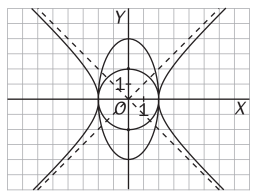
La ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$

Los puntos de corte con la recta

$\begin{cases} 9x^2 + 25y^2 = 225 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = \pm\dfrac{15}{\sqrt{34}} = y \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(\dfrac{15}{\sqrt{34}}, \dfrac{15}{\sqrt{34}}\right) Q\left(-\dfrac{15}{\sqrt{34}}, -\dfrac{15}{\sqrt{34}}\right) \Rightarrow d(P, Q) = \dfrac{30}{\sqrt{17}}$

10. a) Circunferencia de centro $C(0, 0)$ y radio $r = 2$



b) Elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

c) Hipérbola $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 10$

11. a) Centro $C(7, 6)$. Radio $r = 5$.

Las rectas tangentes serán de la forma t: $y = mx$.

$d(C, t) = r \Rightarrow \dfrac{|7m - 6|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5 \Rightarrow 24m^2 - 84m + 11 = 0$

$\Rightarrow m = \dfrac{21 \pm 5\sqrt{15}}{12}$. Las rectas son $y = \dfrac{21 \pm 5\sqrt{15}}{12}x$

b) Si el punto de tangencia es A, será

$OA = \sqrt{OC^2 - AC^2} = \sqrt{85 - 25} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15} = OB$

7 Números complejos

Propuesta A

1. Realiza las siguientes operaciones.

a) $(3 - 2i) + (-5 + 6i)$
b) $(-4 + 2i) - (6 - 3i)$
c) $2\,(2 + 3i)(4 - 2i) - 5i$
d) $\dfrac{5 + i}{2 + 3i}$
e) $\dfrac{15 - 5i}{2 - i}$
f) $(1 + i) - 2\,(2 + i)(3 + i)(4 + i)$

2. Resuelve en el conjunto de los números complejos las ecuaciones siguientes.

a) $z^2 + 2z + 2 = 0$ b) $z^2 - 4z + 13 = 0$ c) $z^3 + z = 0$

3. Calcula en cada caso el valor del número real k para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $(2 + ki) - (3 + k - 5i) = (1 + 3i)$ b) $(3 - 2i) \cdot (k + i) = (8 - i)$ c) $|2 + ki| = \sqrt{29}$

4. Calcula el inverso de los siguientes números complejos.

a) $2 + 2i$ b) $-8 + 6i$ c) $1 - 3i$ d) $-12 - 5i$

5. Realiza las siguientes operaciones con números complejos utilizando la forma polar.

a) $(1 + i)(1 - \sqrt{3}i)$ b) $\dfrac{2 + 2\sqrt{3}i}{i}$ c) $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10}$ d) $\sqrt[3]{(-4 + 4\sqrt{3}i)}$ e) $\sqrt{-16i}$

6. En cada caso, representa geométricamente el conjunto de puntos del plano definido por los afijos de los números complejos z tales que verifican:

a) $2 \leqslant |z - 1| \leqslant 4$ b) $1 \leqslant |z + i| < 4$ c) $\begin{cases} -1 \leqslant \text{Re}(z) \leqslant 3 \\ \text{Im}(z - i) \geqslant 2 \end{cases}$

Propuesta B

1. Realiza las siguientes operaciones.

a) $(1 - 3i) + (-2 + 5i)$
b) $(-3 + 3i) - (2 + 3i)$
c) $3\,(-2 + 2i)\,(-3 + 3i) - 2i$
d) $\dfrac{5 - 5i}{2 + i}$
e) $(1 + i)\,(1 + 2i)\,(1 + 3i) - 2i$
f) $\dfrac{9 + 2i}{1 + 3i}$

2. Escribe una ecuación de segundo grado, con coeficientes reales, cuyas soluciones sean los números complejos:

a) $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$ b) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 2 - i$ c) $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = -3 - 2i$

3 Calcula en cada caso el valor del número real k para que el cociente $\dfrac{4 + ki}{1 - 2i}$ sea:

a) Un número real. b) Un número imaginario puro. c) Un complejo de módulo $\sqrt{5}$.

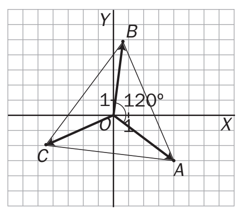
4. Realiza las siguientes operaciones con números complejos utilizando la forma polar.

a) $(3 + 3i)(3 - \sqrt{3}i)$ b) $\dfrac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{-1 + i}$ c) $(-3 + 3i)^4$ d) $\sqrt[4]{\sqrt{2} - i}$

5. Sean z_1, z_2 y z_3 las tres raíces cúbicas de la unidad, demuestra que se verifica $(z_1 - z_2 + z_3)\,(z_1 + z_2 - z_3) = 4$.

6. Un triángulo equilátero de centro el origen de coordenadas tiene un vértice en el punto $A(4, -3)$. Calcula las coordenadas de los otros vértices.

Observación: Ten en cuenta que necesitas hacer un giro de 120°.



Soluciones propuesta A

1. a) $-2 + 4i$

b) $-10 + 5i$

c) $28 + 11i$

d) $\dfrac{5 + i}{2 + 3i} \cdot \dfrac{2 - 3i}{2 - 3i} = \dfrac{13 - 13i}{13} = 1 - i$

e) $\dfrac{15 - 5i}{2 - i} \cdot \dfrac{2 + i}{2 + i} = \dfrac{35 + 5i}{5} = 7 + i$

f) $-29 - 49i$

2. a) $z^2 + 2z + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \begin{cases} z_1 = -1 + i \\ z_2 = -1 - i \end{cases}$

b) $z^2 - 4z + 13 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \dfrac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{4 \pm 6i}{2} = \begin{cases} z_1 = 2 + 3i \\ z_2 = 2 - 3i \end{cases}$

c) $z^3 + z = 0 \Rightarrow z(z^2 + 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z = \sqrt{-1} \Rightarrow \begin{cases} z_2 = i \\ z_3 = -i \end{cases} \end{cases}$

3. a) $k = -2$

b) $k = 2$

c) $\sqrt{4 + k^2} = \sqrt{29} \Rightarrow k = \pm 5$

4. a) $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{2 - 2i}{8} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i$

b) $\dfrac{-8 - 6i}{100} = -\dfrac{2}{25} - \dfrac{3}{50}i$

c) $\dfrac{1 + 3i}{10}$

d) $\dfrac{-12 + 5i}{169}$

5. a) $\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}} \cdot 2_{\frac{5\pi}{3}} = 2\sqrt{2}_{\frac{23\pi}{12}}$

b) $4_{\frac{\pi}{3}} : 1_{\frac{\pi}{2}} = 4_{-\frac{\pi}{6}} = 4_{\frac{11\pi}{6}}$

c) $\left(2_{-\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = 2^{10}_{-\frac{\pi}{4}\cdot 10} = 1024_{\frac{3\pi}{2}} = -1024i$

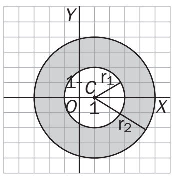
d) $\sqrt[3]{\left(-4 + 4\sqrt{3}i\right)} = \sqrt[3]{8_{120°}} = \begin{cases} z_1 = 2_{40°} \\ z_2 = 2_{160°} \\ z_3 = 2_{280°} \end{cases}$

e) $\sqrt{-16i} = \sqrt{16_{270°}} = \begin{cases} z_1 = 4_{135°} \\ z_2 = 4_{315°} \end{cases}$

6. a) $2 \leqslant |z - 1| \leqslant 4 \Leftrightarrow 2 \leqslant \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leqslant 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \leqslant (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 16$

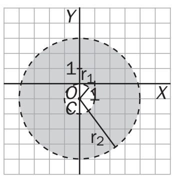
Es una corona circular comprendida entre dos circunferencias de centro $C(1, 0)$ y radios $r_1 = 2$, $r_2 = 4$.



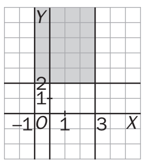
b) $1 < |z + i| < 4 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x^2 + (y+1)^2} < 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 < x^2 + (y + 1)^2 < 16$

Es una corona circular comprendida entre dos circunferencias de centro $C(0, -1)$ y radios $r_1 = 1$, $r_2 = 4$, pero sin borde.



c) Es la región de la figura:



Soluciones propuesta B

1. a) $-1 + 2i$

b) $-5 + 6i$

c) $-38i$

d) $\dfrac{5 - 5i}{2 + i} \cdot \dfrac{2 - i}{2 - i} = \dfrac{5 - 15i}{5} = 1 - 3i$

e) $-10 - 2i$

f) $\dfrac{9 + 2i}{1 + 3i} \cdot \dfrac{1 - 3i}{1 - 3i} = \dfrac{15 - 25i}{10} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i$

2. a) $x^2 + 4 = 0$

b) Suma: $S = z_1 + z_2 = 4$. Producto: $P = z_1 \cdot z_2 = 5$
$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$

c) Suma: $S = -6$. Producto: $P = 13$
$x^2 + 6x + 13 = 0$

3. $\dfrac{4 + ki}{1 - 2i} = \dfrac{(4 + ki)(1 + 2i)}{5} = \dfrac{4 - 2k}{5} + \dfrac{8 + k}{5}i$

a) $\dfrac{8 + k}{5} = 0 \Rightarrow k = -8$

b) $\dfrac{4 - 2k}{5} = 0 \Rightarrow k = 2$

c) Como $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, entonces $\sqrt{5} = \dfrac{\sqrt{16 + k^2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 + k^2 = 25 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3.$

4. a) $3\sqrt{2}_{45°} \cdot 2\sqrt{3}_{-30°} = 6\sqrt{6}_{15°}$

b) $2_{225°} : \sqrt{2}_{135°} = \sqrt{2}_{90°} = \sqrt{2}i$

c) $\left(3\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}\right)^4 = 324_{3\pi} = 324_{\pi} = -324$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2} - i} = \sqrt[3]{\sqrt{3}_{315°}} = \begin{cases} z_1 = \sqrt[6]{3}_{105°} \\ z_2 = \sqrt[6]{3}_{225°} \\ z_3 = \sqrt[6]{3}_{345°} \end{cases}$

5. $\sqrt[3]{1_{0°}} = \begin{cases} z_1 = 1_{0°} = 1 \\ z_2 = 1_{120°} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_3 = 1_{240°} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

$(z_1 - z_2 + z_3)(z_1 + z_2 - z_3) = \left(1 - \sqrt{3}i\right)\left(1 + \sqrt{3}i\right) = 4$

6. Girar 120° es multiplicar por el número complejo $1_{120°} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Por tanto, el segundo vértice será:

$(4 - 3i)\cdot\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(\dfrac{-4 + 3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\dfrac{4\sqrt{3} + 3}{2}\right)$

$\Rightarrow B\left(\dfrac{-4 + 3\sqrt{3}}{2}, \dfrac{4\sqrt{3} + 3}{2}\right)$

Para obtener el tercer vértice es mejor multiplicar $4 - 3i$ por $1_{-120°} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$:

$(4 - 3i)\cdot\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(\dfrac{-4 - 3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\dfrac{-4\sqrt{3} + 3}{2}\right)$

$\Rightarrow C\left(\dfrac{-4 - 3\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-4\sqrt{3} + 3}{2}\right)$

8 Funciones, límites y continuidad

Propuesta A

1. Disponemos de láminas de papel de 30 por 40 cm para imprimir el anuncio de una exposición, con la única condición de que los márgenes superior e inferior midan el doble que los laterales. Halla la expresión de la superficie de la zona impresa en función del ancho de uno de los márgenes laterales. ¿Cuál es el dominio de esta función?

2. Una compañía de telefonía móvil nos ofrece dos tarifas mensuales. La primera se compone de una cantidad fija, 13 euros, más 0,25 euros por cada minuto que usemos el teléfono, todo ello incrementado con el 16% de IVA. La segunda tarifa se compone de un importe fijo, 36 euros, y 40 minutos gratuitos de uso de teléfono; a partir de los primeros 40 minutos nos hacen una rebaja del 5% sobre el precio por minuto de la primera tarifa, y todo ello incrementado en el 16% de IVA. Obtén las fórmulas que expresan el coste mensual de cada tarifa en función del tiempo de uso del teléfono.

3. Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x^2 + 1$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$

4. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas.

a) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 7x - 31)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} [(x - 5) \cdot (4 - x^2)]$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 100x - 2009)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (4 - x) \cdot (4 + x)$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + 7)$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 5x^2 + 10)$

5. Calcula los siguientes límites de funciones racionales.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 3}{x + 3}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4 + 1}{x - 1}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 - x^3 + 3x}{x^2 - x}$

6. Calcula los límites laterales de las siguientes funciones racionales en los puntos en los que no están definidas. ¿Existe el límite de la función en esos puntos?

a) $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$ b) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 9}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - x}$

7. Calcula los siguientes límites de funciones con radicales.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$ c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{12 + x} - 4}$

8. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones a trozos y clasifícalos.

a) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } 1 \leqslant x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x + 2} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

9. Estudia la continuidad de la función: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{-1, 1\} \\ \dfrac{x}{|x| - 1} & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \end{cases}$ y calcula $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

10. Dadas las sucesiones $a_n = 0, 3, 8, 15\ldots$ y $b_n = 2, 3, 4, 5\ldots$ Escribe el término general de las sucesiones:

a) $a_n + b_n$ b) $b_n - a_n$ c) $3a_n$ d) $\dfrac{a_n}{b_n}$

Propuesta B

1. La antigüedad en años de un automóvil y el número medio de kilómetros, en miles, que ha rodado durante su vida se relacionan en la siguiente tabla.

Antigüedad	2	4	5
Kilómetros	30	50	60

a) Obtén el polinomio de interpolación de segundo grado que expresa los kilómetros recorridos en función de los años de vida del automóvil. ¿Cómo explicas el resultado obtenido?

b) Si un automóvil tiene 3 años, ¿cuántos kilómetros se esperaría que hubiese rodado?

2. En un concurso de televisión, cada concursante comienza con 750 euros y se le hacen 15 preguntas. Por cada respuesta acertada gana 60 euros, y pierde 45 cada vez que contesta erróneamente.

a) Expresa de manera algebraica las funciones que nos dan el premio obtenido por el concursante según el número de preguntas que acierte y según el número de preguntas que falle. ¿Cuál es el dominio de esas funciones?

b) ¿Cuál es el número mínimo de preguntas que debe contestar correctamente un concursante para acabar el concurso con más dinero del que tenía al principio?

3. Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$ b) $f(x) = \sqrt{x + 3}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x - 4}$

4. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas.

a) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 2x + 1)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} (x^4 + x + 3)$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 2)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (4 - x^2)$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 3)$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 5)$

5. Calcula los siguientes límites de funciones racionales.

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x + 3}$ b) $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2 + 1}{1 - x}$ c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - x^3 - 4x}{x^2 - x - 2}$

6. Calcula los siguientes límites de funciones racionales.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 3x + 2}{x^2 - 3x}$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 4}{x + 1}$

7. Calcula los siguientes límites de funciones con radicales.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4} - x\right)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$

8. Calcula el valor de a para el que cada una de las siguientes funciones es continua en todo R.

a) $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{si } x < 3 \\ 4x + 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

9. Estudia la continuidad de la función: $f(x) = \begin{cases} x \cdot |x| & \text{si } x \leqslant 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

10. Calcula los siguientes límites de sucesiones.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2n - 5)(7 - 3n)}{3 - 2n + n^2}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(n + 2 - \sqrt{n^2 + 2n + 1}\right)$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3 - 2n}{2n - 1}\right)^{5n + 1}$

Soluciones propuesta A

1. Hay dos posibilidades según la orientación:

a) Horizontal $(40 \cdot 30)$:

$S(x) = (30 - 4x)(40 - 2x)$; $D(S)\left(0, \frac{15}{2}\right)$

b) Vertical $(30 \cdot 40)$:

$S(x) = (30 - 2x)(40 - 4x)$; $D(S)(0, 10)$

2. $T_1(t) = (13 + 0{,}25t) \cdot 1{,}16$

$$T_2(t) = \begin{cases} 36 \cdot 1{,}16 & \text{si } 0 \leq t \leq 40 \\ [36 + 0{,}25 \cdot (t - 40) \cdot 0{,}95] \cdot 1{,}16 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

siendo t el número de minutos de uso del teléfono.

3. a) $\mathbf{R}$ c) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

b) $\mathbf{R} - \{-3, 3\}$ d) $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$

4. a) -1 c) -20 e) $+\infty$

b) $-\infty$ d) $-\infty$ f) $+\infty$

5. a) -1 b) -1

c) Presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 - x^3 + 3x}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^3 - x^2 + 3) \cdot x}{(x - 1) \cdot x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^3 - x^2 + 3)}{(x - 1)} = -3$$

6. a) $f(x) = \frac{3}{x - 2}$, no está definida en $x = 2$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$.

No existe el límite, ya que los límites laterales son infinitos y distintos.

b) $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 9}$, no está definida en $x = \pm 3$.

En $x = -3$: $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

No existe el límite.

En $x = 3$: $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

No existe el límite.

c) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - x}$, no está definida en $x = 0$ y $x = 1$.

En $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x \cdot (x - 3)}{x \cdot (x - 1)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(x - 3)}{(x - 1)} = 3$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \cdot (x - 3)}{x \cdot (x - 1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x - 3)}{(x - 1)} = 3$$

Como los límites laterales son iguales, $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$.

En $x = 1$: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

No existe el límite.

7. Todos estos límites son indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$.

a) $$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x) \cdot (1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x}) \cdot (1 + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x) \cdot (1 + \sqrt{x})}{(1 - x)} = \lim_{x \to 1} (1 + \sqrt{x}) = 2$$

b) $$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x + 2} - 2) \cdot (\sqrt{x + 2} + 2)}{(x - 2) \cdot (\sqrt{x + 2} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)}{(x - 2) \cdot (\sqrt{x + 2} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x + 2} + 2} = \frac{1}{4}$$

c) $$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{12 + x} - 4} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2) \cdot (\sqrt{x} + 2) \cdot (\sqrt{12 + x} + 4)}{(\sqrt{12 + x} - 4) \cdot (\sqrt{12 + x} + 4) \cdot (\sqrt{x} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4) \cdot (\sqrt{12 + x} + 4)}{(x - 4) \cdot (\sqrt{x} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{12 + x} + 4)}{(\sqrt{x} + 2)} = 2$$

8. a) $f(0) = -1$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$. Tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 0$.

b) $f(1) = 1$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$. Es continua en $x = 1$, ya que $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

$f(3) = 5$; $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 7$, $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5$. Tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 3$.

c) $f(2) = 2$; $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$. Es continua en $x = 2$, ya que $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = 2$.

En los tres casos y en el resto de valores reales, las funciones son continuas.

9. $$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{-x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{-x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x - 1} = +\infty$$

La función tiene discontinuidades inevitables de salto infinito en $x = -1$ y en $x = 1$, y es continua en el resto de valores reales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{-x - 1} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x - 1} = 1$$

10. $a_n = n^2 - 1$ y $b_n = n + 1$

a) $a_n + b_n = n^2 + n$ c) $3a_n = 3n^2 - 3$

b) $b_n - a_n = -n^2 + n + 2$ d) $\frac{a_n}{b_n} = n - 1$

Soluciones propuesta B

1. a) $P(x) = ax^2 + bx - c \Rightarrow$

$\begin{cases} P(2) = 4a + 2b + c = 30 \\ P(5) = 16a + 4b + c = 50 \\ P(10) = 25a + 5b + c = 60 \end{cases}$. Resolviendo el sistema: $a = 0$, $b = 10$ y $c = 10$.

El polinomio de interpolación es lineal.

$P(x) = 10x + 10$

b) $P(3) = 40$. Se esperaría que el automóvil hubiese rodado 40 000 km.

2. a) Si x es el número de preguntas que acierta:
$P_1(x) = 750 + 60x - 45(15 - x) = 105x + 75$

Si x es el número de preguntas que falla:
$P_2(x) = 750 + 60(15 - x) - 45x = 1650 - 105x$

El dominio de ambas funciones es [0, 15].

b) $105x + 75 > 750 \Rightarrow 105x > 675 \Rightarrow x > \dfrac{675}{105} \approx 6{,}4$

7 preguntas

3. a) $D = \mathbf{R} - \{2\}$ c) $D = [-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

b) $D = [-3, +\infty)$ d) $D = \mathbf{R} - \{-4, 1\}$

4. a) 4 c) -3 e) $+\infty$

b) $-\infty$ d) $+\infty$ f) $+\infty$

5. a) 0

b) 1

c) Presenta una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - x^3 - 4x}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^3 + x^2 + 2x)(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{16}{3}$$

6. Todos estos límites son indeterminados del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

a) Simplificando por x^2,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)} = 1$$

b) Dividiendo por x^2,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = +\infty$$

c) Dividiendo por x,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 4}{x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -\infty$$

7. Estos límites son indeterminados del tipo $\infty - \infty$.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4} - x\right) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 4} - x\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 - 4} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 4} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{\left(\sqrt{x^2 - 4} + x\right)} = 0$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} = \frac{\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

8. a) Para que sea continua en $x = 1$,

$f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow a = f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$

b) Para que sea continua en $x = 3$,

$f(3) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

$f(3) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 13$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 9 - a \Rightarrow$

$\Rightarrow 13 = 9 - a$.

Ha de ser $a = -4$.

9. Posibles puntos de discontinuidad son $x = 1$ y $x = 2$, ya que para el resto de valores está definida por polinomios y valores absolutos que son funciones continuas.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x = 1 = f(1)$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x = 2 = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (4 - x) = 2 = f(2)$.

Por tanto, la función es continua en todo $\mathbf{R}$.

10. a) $\lim\limits_{n \leftarrow \infty} \dfrac{(2n - 5)\,(7 - 3n)}{3 - 2n + n^2} = -6$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(n + 2 - \sqrt{n^2 + 2n + 1}\right) =$

$= \lim\limits_{n \to \infty} [(n + 2) - (n + 1)] = 1$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3 + 2n}{2n - 1}\right)^{5n + 1} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{4}{2n - 1}\right)^{5n + 1} =$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{2n - 1}{4}\right)}\right)^{(5n + 1)\left(\frac{2n - 1}{4}\right)\left(\frac{4}{2n - 1}\right)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{2n - 1}{4}\right)}\right)^{\frac{2n - 1}{4}}\right]^{\frac{4(5n + 1)}{2n - 1}} = e^{10}$$

9 Funciones elementales

Propuesta A

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 - 3x - 4$ b) $g(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 - 3x - 4}$ c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ d) $k(x) = \ln(x^2 - 3x - 4)$

2. Determina los puntos de corte con los ejes y el signo de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x^2 + 4)\,(x^2 - 2x - 8)$ b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{2x + 4}$

3. Representa las funciones polinómicas de 2.º grado hallando sus raíces, eje, vértice y corte con el eje Y.

a) $f(x) = \dfrac{2}{5}(x - 2)\,(x + 3)$ b) $g(x) = x^2 - 3x - 4$

4. Determina el dominio y el signo de las siguientes funciones y esboza su gráfica.

a) $f(x) = \dfrac{(2 - x)^2\,(x + 1)^2}{(x + 5)^3}$ b) $g(x) = \dfrac{(x + 2)\,(x - 8)}{x^2\,(x - 3)}$

5. Calcula las asíntotas y estudia el signo de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x - 4}{x + 1}$ b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

6. Estudia si las funciones siguientes son simétricas (pares o impares).

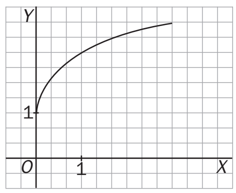
a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x}{x^2}$ b) $g(x) = x^2 + 6$ c) $h(x) = \cos(2x)$ d) $k(x) = (x + 1) \cdot |x|$

7. Esboza la gráfica de las siguientes funciones determinando su dominio, asíntotas si las tuvieran y tomando algunos valores.

a) $f(x) = \sqrt{4 - x}$ b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{4 - x}{x + 3}}$ c) $h(x) = \sqrt{-2x^2 - x^3}$

8. La gráfica representada corresponde a una función $f(x)$. Representa, razonadamente, las gráficas de las funciones.

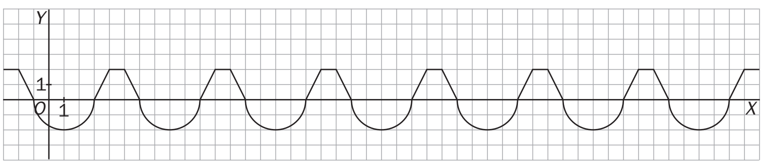
a) $-f(x)$ b) $2\,f(x)$ c) $2 + f(x)$ d) $f(x + 2)$



9. Calcula el dominio y las asíntotas verticales de las funciones:

a) $f(x) = \ln[(x + 2)\,(x - 4)]$ b) $g(x) = \ln|x^2 - 4|$ c) $h(x) = \ln(5 - 2x)$

10. Dada la gráfica de la función f,



a) Indica el período y el recorrido de $f(x)$.

b) ¿Cuáles serían el período y el recorrido de la función $g(x) = 2 + f(2x)$?

c) ¿Cómo es la gráfica de la función g?

11. Determina el dominio, el recorrido y la función inversa de la función $f(x) = 3 - 2\,\text{arc sen}(1 - x)$.

Propuesta B

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = -x^2 - x + 2$ b) $g(x) = \dfrac{x - 5}{-x^2 - x + 2}$ c) $h(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2}$ d) $k(x) = \ln(-x^2 - x + 2)$

2. Determina los puntos de corte con los ejes y el signo de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x^2 - 4)\,(x^2 - 2x + 1)$ b) $g(x) = \dfrac{2x + 4}{x^2 - 5x + 4}$

3. Representa las funciones polinómicas de 2.º grado hallando sus raíces, eje, vértice y corte con el eje Y.

a) $f(x) = \dfrac{1}{4}(x + 2)\,(x - 4)$ b) $g(x) = -x^2 - x + 2$

4. Determina el dominio y el signo de las funciones siguientes y esboza su gráfica.

a) $f(x) = \dfrac{(x + 2)^2\,(x - 8)}{x\,(x - 3)}$ b) $g(x) = \dfrac{(2 - x)\,(x + 1)}{(x + 5)^2}$

5. Calcula las asíntotas y estudia el signo de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 4}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

6. Estudia si las funciones siguientes son simétricas (pares o impares).

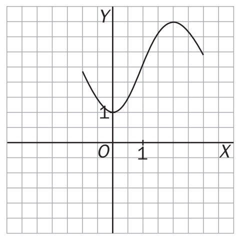
a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x}{x^2 + 1}$ b) $g(x) = x^2 + 4x - 6$ c) $h(x) = \operatorname{tg}(2x)$ d) $k(x) = x^2\,|x|$

7. Esboza la gráfica de las funciones siguientes determinando su dominio, asíntotas si las tuvieran y tomando algunos valores.

a) $f(x) = \sqrt{4 + x}$ b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{4 + x}{x - 3}}$ c) $h(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2}$

8. La gráfica representada corresponde a una función $f(x)$. Representa, razonadamente, las gráficas de las siguientes funciones.

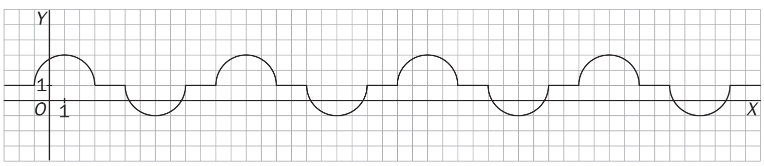
a) $-f(x)$ b) $2 + f(x)$ c) $2\,f(x)$ d) $f(x + 2)$



9. Calcula el dominio y las asíntotas verticales de las funciones y después esboza su gráfica.

a) $f(x) = \ln(4 - x^2)$ b) $g(x) = \ln|x^2 - 3x + 2|$ c) $h(x) = \ln(1 + 2x)$

10. En la figura se representa una función periódica f.



a) Calcula su período y su recorrido.

b) ¿Cuáles serían el período y el recorrido de la función $g(x) = 2 + f(3x)$?

c) ¿Cómo es la gráfica de la función g?

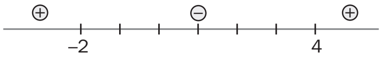
11. Determina el dominio, el recorrido y la función inversa de la función $f(x) = 1 + 2\arccos(3 + x)$.

Soluciones propuesta A

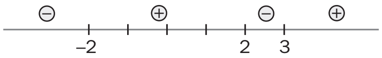
1. a) $D = \mathbb{R}$ c) $D = (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

b) $D = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$ d) $D = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$

2. a) Cortes $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, -32)$

Signo 

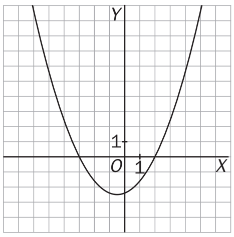
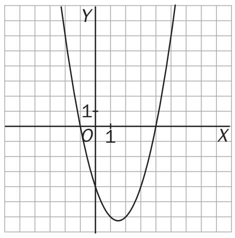
b) Cortes $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(3, 0)$, $D\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$

Signo 

3. a) Raíces $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ b) Raíces $x_1 = -1$, $x_2 = 4$

Eje: $x = -\dfrac{1}{2}$ Eje: $x = \dfrac{3}{2}$

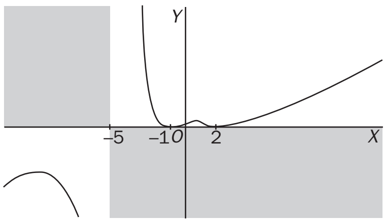
Vértice: $V\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$ Vértice: $V\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{25}{4}\right)$

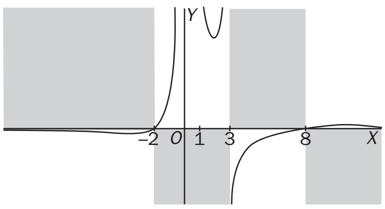
Corte con y: (0; 2, 4) Corte con y: $(0, -4)$

4. Las gráficas no están a escala

a)



b)



5. a) Vertical $x = -1$. Horizontal $y = 2$

Positiva en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. Negativa en $(-1, 2)$

b) Vertical $x = \pm 2$. Horizontal $y = 0$.

Positiva en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

Negativa en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

6. a) $f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 5(-x)}{(-x)^2} = \dfrac{-x^3 + 5x}{x^2} = -\dfrac{x^3 - 5x}{x^2} =$

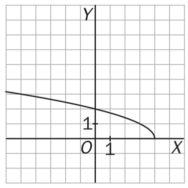
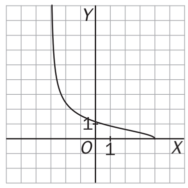
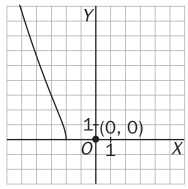
$= -f(x)$. Es impar.

b) $g(-x) = (-x)^2 + 6 = g(x)$. Es par.

c) $h(-x) = \cos(2(-x)) = \cos(-2x) = \cos(2x) = h(-x)$. Es par.

d) $k(x) \neq \pm k(x)$ No es ni par ni impar.

7. a) b) c)

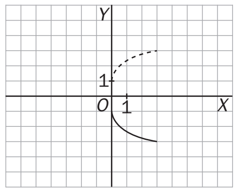




$D = (-\infty, 4]$ $D = (-3, 4]$ $D = (-\infty, -2] \cup \{0\}$

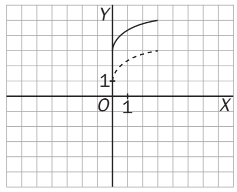
Asíntota $x = -3$

La función en c) tiene un punto aislado que es el origen de coordenadas $O(0, 0)$.

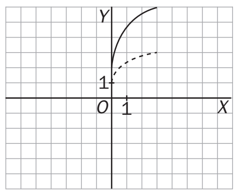
8. a)



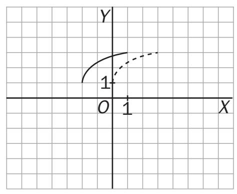
c)



b)



d)



9. a) $D = (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$.

Asíntotas: $x = -2$, $x = 4$

b) $D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Asíntotas: $x = -2$, $x = 2$

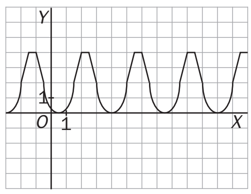
c) $D = \left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$. Asíntota: $x = \dfrac{5}{2}$

10. a) Período $T = 7$. $R(f) = [-2, 2]$

b) Período $T' = \dfrac{1}{2}T = \dfrac{7}{2}$.

$R(g) = [-2 + 2, 2 + 2] = [0, 4]$

c)



11. Dominio

$-1 \leqslant 1 - x \leqslant 1 \Rightarrow -1 - 1 \leqslant -x \leqslant 1 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow D = [0, 2]$

Recorrido. Como el recorrido de la función arc sen x es $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, el recorrido de la función será

$$\left[3 - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right), 3 - 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right] = [3 - \pi, 3 + \pi]$$

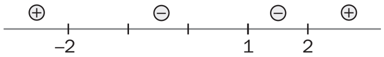
La función inversa con dominio $[3 - \pi, 3 + \pi]$ y recorrido $[0, 2]$ es $f^{-1}(x) = 1 - \text{sen}\left(\dfrac{3 - x}{2}\right)$.

1. a) $D = \mathbb{R}$ c) $D = [-2, 1]$

b) $D = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ d) $D = (-2, 1)$

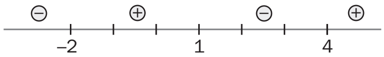
2. a) Cortes $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$, $C(2, 0)$, $D(0, -4)$

Signo



b) Cortes $A(-2, 0)$, $B(0, 1)$

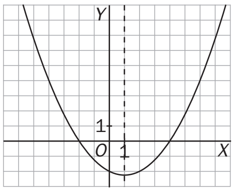
Signo

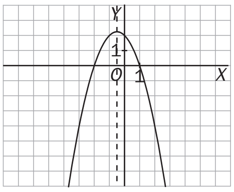


3. a) Raíces: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$ b) Raíces: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$

Eje: $x = 1$ Eje: $x = -\dfrac{1}{2}$

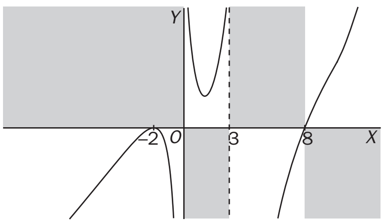
Vértice: $V\left(1, -\dfrac{9}{4}\right)$ Vértice: $V\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$



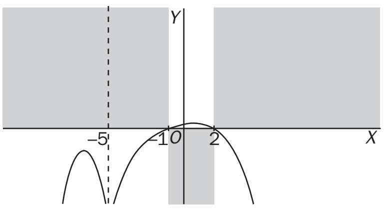


Corte con y: $(0; -2)$ Corte con y: $(0, 2)$

4. a)



b)



5. a) Vertical $x = 2$. Horizontal $y = \dfrac{1}{2}$.

Positiva en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. Negativa en $(-1, 2)$

b) Vertical $x = 0$. Oblicua $y = x$.

Positiva en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

Negativa en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

6. a) $f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 5(-x)}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{-x^3 + 5x}{x^2 + 1} = -\dfrac{x^3 - 5x}{x^2 + 1} =$

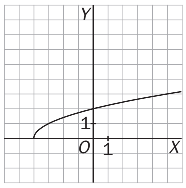
$= -f(x)$. Es impar.

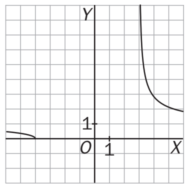
b) $g(x) \neq \pm g(-x)$. No es par ni impar.

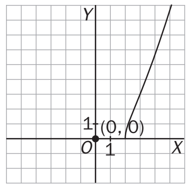
c) $h(-x) = \text{tg}(2(-x)) = \text{tg}(-2x) = -\text{tg}(2x) = -h(x)$. Es impar.

d) $k(-x) = (-x)^2 \cdot |-x| = x^2 \cdot |x| = k(x)$. Es par.

7. a) b) c)





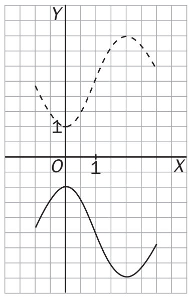


$D = [-4, +\infty)$ $D = (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$ $D = \{0\} \cup [2, +\infty)$

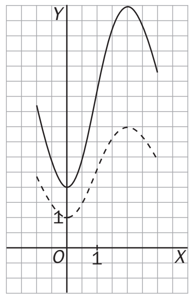
Asíntotas: $y = 1$, $x = 3$

En el caso c, la función tiene un punto aislado que es el origen de coordenadas $O(0, 0)$.

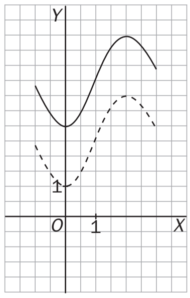
8. a)



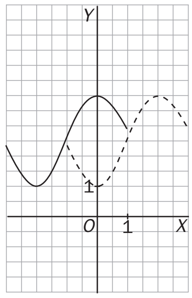
c)



b)



d)



9. a) $D = (-2, 2)$. Asíntotas: $x = -2$, $x = 2$

b) $D = \mathbb{R} - \{1, 2\}$. Asíntotas: $x = 1$, $x = 2$

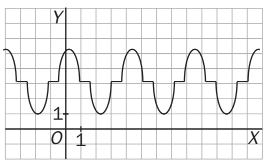
c) $D = \left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$. Asíntota: $x = -\dfrac{1}{2}$

10. a) Período $T = 12$. $R(f) = [-1, 3]$

b) Período $T' = \dfrac{1}{3}T = 4$.

$R(g) = [-1 + 2, 3 + 2] = [1, 5]$

c)



11. Dominio

$-1 \leqslant 3 + x \leqslant 1 \Rightarrow -1 - 3 \leqslant x \leqslant 1 - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow D = [-4, -2]$

Recorrido. Como el recorrido de la función arcos x es $[0, \pi]$, será $R(f)$ $[1 + 2 \cdot 0,\ 1 + 2 \cdot \pi] = [1, 1 + 2\pi]$

La función inversa con dominio $[1, 1 + 2\pi]$ y recorrido $[-4, -2]$ es $f^{-1}(x) = \cos\left(\dfrac{x - 1}{2}\right) - 3$.

10 Derivadas

Propuesta A

1. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 4$ en los intervalos [0, 2], [−2, 0] y $[a, a + h]$.

2. Halla la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = 3x + 2$ en $x = -1$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ en $x = -2$

c) $f(x) = x^3 + 1$ en $x = 2$

d) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ en $x = 7$

3. Calcula la pendiente de la tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos que se indican. ¿Qué ángulo forma la tangente con el eje de abscisas?

a) $f(x) = x^2 + x - 1$ en $x = 1$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x + 3}$ en $x = -1$

4. Halla la función derivada de las siguientes funciones utilizando la definición.

a) $f(x) = 3x$

b) $g(x) = x + 3$

c) $h(x) = x^2 + 3$

d) $i(x) = x^2 - x$

e) $j(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

f) $k(x) = \sqrt{3x}$

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + x - 3)$

b) $g(x) = (x^2 - x + 5)^4$

c) $h(x) = x^2\left(\sqrt{2x + 1}\right)$

d) $i(x) = \sqrt{2x}(3x^3 + 5x)^2$

e) $j(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x}$

f) $k(x) = \dfrac{x^3 + x - 1}{x^2 - 1}$

g) $l(x) = \dfrac{\sqrt{x + 2} - x}{3x^2}$

h) $m(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x + 4}}$

6. ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5x + 8$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Escribe la ecuación de dicha recta tangente.

7. La posición respecto del origen, en metros, de un móvil viene dada por la función $s(t) = 3t^2 - 1$, en donde el tiempo t est· en segundos.

a) Halla la velocidad media del móvil en el intervalo temporal [1, 4].

b) Obtén la velocidad instantánea para $t = 2$ segundos.

8. Halla los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea continua y derivable en $x = 0$.

9. Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, de las que se conoce $f(2) = 3$, $g(2) = -1$, $g'(-1) = -3$, $g'(2) = 0$, $g'(3) = 5$, $f'(-1) = 2$ y $f'(2) = 4$, calcula:

a) $(f + g)'(-1)$

b) $(f \cdot g)'(2)$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$

d) $(f \circ g)'(2)$

e) $(g \circ f)'(2)$

10. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - 12x$ y calcula sus extremos relativos.

11. Descompón el número 24 en dos sumandos positivos tales que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea lo más grande posible.

Propuesta B

1. Halla las tasas de variación media de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

a) $f(x) = x^2 + x$ en $[-3, 1]$

b) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x}$ en $[a, a + h]$

2. Calcula la tasa de variación instantánea para las funciones siguientes y en los puntos indicados.

a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x}$ en $x = -2$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$

3. Halla la función derivada de las siguientes funciones utilizando la definición.

a) $f(x) = 3 + 2x$

b) $g(x) = x^2 + x - 3$

c) $h(x) = \dfrac{3}{x}$

d) $i(x) = \dfrac{x - 2}{x + 1}$

e) $j(x) = \left(\sqrt{3 - x}\right)$

f) $k(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

4. Halla en qué puntos la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ es paralela a la recta $y - x = 1$. Para el punto de menor abscisa, calcula la ecuación de dicha recta tangente y el ángulo que forma con el eje horizontal positivo.

5. Obtén el punto de corte del eje X con la recta tangente a $f(x) = x^2 - 2x$ en el punto de abscisa $x = -1$.

6. Calcula las derivadas de las funciones siguientes.

a) $f(x) = (2x^3 + x)(x^2 - 3)$

b) $g(x) = (x^3 + x)^3$

c) $h(x) = x\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)$

d) $i(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x}$

e) $j(x) = \dfrac{\sqrt{3x - 1}}{x}$

f) $k(x) = \sqrt{x + 5}(-x^3 + x)^2$

g) $l(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^3 + 2}$

h) $m(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x^3}}$

7. Sean las funciones $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2$. ¿Cuál de ellas crece más rápido en el intervalo $[-1, 1]$? ¿Y en el intervalo $[2, 4]$?

8. Halla los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua y derivable en el conjunto de los números reales.

9. Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ de las que se conoce $f(2) = g(2) = 1$, $g'(1) = -\dfrac{3}{4}$, $g'(2) = -\dfrac{1}{3}$, $f'(1) = 2$ y $f'(2) = 4$, calcula:

a) $(f + g)'(1)$

b) $(f \cdot g)'(2)$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$

d) $(f \circ g)'(2)$

e) $(g \circ f)'(2)$

10. ¿Cuál debe ser el valor de a para que el mínimo de la función $f(x) = x^2 - 6x + a$ sea igual a 0?

11. Un rectángulo de 60 cm de perímetro gira alrededor de uno de sus lados engendrando un cilindro. Determina la longitud de los lados del rectángulo que genera un cilindro de volumen máximo. ¿Cuál es ese volumen?

Soluciones propuesta A

1. $\text{TVM}_{[0,\,2]} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{0 - (-4)}{2} = 2$

$\text{TVM}_{[-2,\,0]} = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \dfrac{-4 - 0}{2} = -2$

$\text{TVM}_{[a,\,a+h]} = \dfrac{f(a + h) - f(a)}{a - h - (a)} =$

$= \dfrac{(a + h)^2 - 4 - (a^2 - 4)}{h} = \dfrac{h^2 + 2ah}{h} = h + 2a$

2. a) $\text{TVI}(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(-1 + h) + 2 - (-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h}{h} = 3$

b) $\text{TVI}(-2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{h - 2}{h - 1} - 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{(h - 1)} = 1$

c) $\text{TVI}(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 + 1 - 9}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (h^2 + 6\text{h} + 12) = 12$

d) $\text{TVI}(7) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{9 + h} - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{9 + h} + 3} = \dfrac{1}{6}$

2. a) $m = f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1 + h)^2 + (1 + h) - 1 - 1}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (3 + h) = 3 \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \text{arctg}\,(3) \approx 71°\ 33'\ 54''$

b) $m = f'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2}{h + 2} - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{h + 2} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}\ \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \text{arctg}\,(-1) = -45°$

3. a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(x + h) - 3x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h}{h} = 3$

b) $g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h + 3) - (x + 3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h} = 1$

c) $h'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 + 3 - (x^2 + 3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = 2x$

d) $i'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - (x + h) - (x^2 - x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (2x + h - 1) = 2x - 1$

e) $j'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{x + h}{x + h + 1} - \dfrac{x}{x + 1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{(x + h + 1) \cdot (x + 1)} = \dfrac{1}{(x + 1)^2}$

f) $k'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{3(x + h)} - \sqrt{3x}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3}{\sqrt{3(x + h)} + \sqrt{3x}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$

5. a) $f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 2x - 1$

b) $g'(x) = 4(x^2 - x + 5)^3\,(2x - 1)$

c) $h'(x) = \dfrac{5x^2 + 2x}{\sqrt{2x + 1}}$

d) $i'(x) = \dfrac{\sqrt{2x}\,(3x^3 + 5x)\,(39x^2 + 25)}{2}$

e) $j'(x) = \dfrac{-x^4 + 4x^2 + 1}{(x^2 + x)^2}$

f) $k'(x) = \dfrac{x^4 - 4x^2 + 2x - 1}{(x^2 - 1)^2}$

g) $l'(x) = \dfrac{2x\sqrt{x + 2} - 3x - 4}{6x^3\sqrt{x + 2}}$

h) $m'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x(x - 4)^3}}$

6. La pendiente debe ser $m = 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 5 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 3$. Por tanto, el punto es (3, 2) y la ecuación de la tangente es $x - y - 1 = 0$.

7. a) $v_m = \dfrac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = \dfrac{47 - 2}{3} = 15$ m/s

b) $v_i = s'(t) = 6t \Rightarrow v_i(2) = 6 \cdot 2 = 12$ m/s

8. Para que sea continua en $x = 0$,

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow 1 = b.$

Para que sea derivable en $x = 0$, además de ser continua, deben coincidir las derivadas laterales en $x = 0$: $f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow 0 = a.$

Por tanto, $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

9. a) $(f + g)'(-1) = f'(-1) + g'(-1) = 2 + (-3) = -1$

b) $(f \cdot g)'(2) = f'(2) \cdot g(2) + f(2) \cdot g'(2) =$

$= 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -4$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2) = \dfrac{f'(2) \cdot g(2) - f(2) \cdot g'(2)}{[g(2)]^2} =$

$= \dfrac{4 \cdot (-1) - 3 \cdot 0}{(-1)^2} = -4$

d) $(f \circ g)'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2) = f'(-1) \cdot g'(2) =$

$= 2 \cdot 0 = 0$

e) $(g \circ f)'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2) = g'(3) \cdot f'(2) =$

$= 5 \cdot 4 = 20$

10. $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2) \Rightarrow x = -2$ y $x = 2$ son posibles puntos críticos.

Estudiando el signo de f' se ve que f decrece en $(-2, 2)$ y crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Por tanto, presenta un máximo relativo en $(-2, 16)$ un mínimo en $(2, -16)$.

	$-\infty$ a -2	-2 a 2	2 a $+\infty$
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗

11. Primer sumando: $(24 - x)$.

Segundo sumando: x.

Función a optimizar: $f(x) = (24 - x) \cdot x^2 = 24x^2 - x^3$.

Con dominio $D(f) = [0, 24]$ y derivada $f'(x) = 48x - 3x^2 = 3x \cdot (16 - x)$

Posibles puntos críticos: $x = 0$ y $x = 16$

La función es creciente en (0, 16) y decreciente en (16, 24); por tanto, el máximo absoluto de f se alcanza en $x = 16$, y los sumandos pedidos son $S_1 = 24 - 16 = 8$ y $S_2 = 16$.

1. a) $\text{TVM}_{[-3,\,1]} = \dfrac{(1)^2 + (1) - [(-3)^2 + (-3)]}{1 - (-3)} = \dfrac{-4}{4} = -1$

b) $\text{TVM}_{[a,\,a+h]} = \dfrac{\dfrac{a+h+2}{a+h} - \dfrac{a+2}{a}}{h} = \dfrac{-2}{a^2 + ah}$

2. a) $\text{TVI}(-2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{-2+h-1}{-2+h} - \dfrac{3}{2}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{2(h-2)} = \dfrac{1}{4}$

b) $\text{TVI}(4) = \lim\limits_{h \to 0} 4 = \dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \dfrac{1}{4}$

3. a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 + 2(x + \text{h}) - (3 + 2x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h}{h} = 2$

b) $g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 + (x+h) - 3 - (x^2 + x - 3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (2x + h + 1) = 2x + 1$

c) $h'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{3}{x+h} - \dfrac{3}{x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-3}{(x+h) \cdot x} = \dfrac{-3}{x^2}$

d) $i'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{x+h-2}{x+h+1} - \dfrac{x-2}{x+1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3}{(x+h+1)(x+1)} = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

e) $j'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{3-(x+h)} - \sqrt{3+x}}{h} -$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{\sqrt{3-(x+h)} + \sqrt{3-x}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}}$

f) $k'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{(x+h)^2 + 1} - \sqrt{x^2+1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 + 1 - (x^2+1)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2 + 1} + \sqrt{x^2+1}\right)} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

4. La pendiente de las rectas tangentes ha de ser 1; por tanto: $f'(x) = 3x^2 - 2x = 1 \Rightarrow x = -1$ y $x = 3$ son los puntos buscados.

Para $x = -1$, $y = -1$, y la recta tangente tiene por ecuación $y - (-1) = 1[x - (-1)] \Rightarrow y = x$, que forma un ángulo de 45° con el eje positivo de abscisas.

5. $y - f(-1) = f'(-1)\,(x+1)$; $f(-1) = 3$;

$f'(-1) = -4 \Rightarrow y - 3 = -4\,(x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x + y + 1 = 0.$

El punto es $\left(-\dfrac{1}{4},\ 0\right)$.

6. a) $f'(x) = 10x^4 - 15x^2 - 3$

b) $g'(x) = 3(x^3 + x)^2(3x^2 + 1)$

c) $h'(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $i'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + x)^2}$

e) $j'(x) = \dfrac{2 - 3x}{2x^2\sqrt{3x-1}}$

f) $k'(x) = \dfrac{(x^3 - x)(13x^3 + 60x^2 - 5x - 20)}{2\sqrt{x+5}}$

g) $l'(x) = \dfrac{-x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 4x - 4}{(x^3+2)^2}$

h) $m'(x) = \dfrac{-x^2 - 3}{2x^4}\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2+1}}$

7. Se calculan las derivadas: $f'(x) = 2$ y $g'(x) = 2x$.

En el intervalo $[-1,\ 1]$ crece más rápido $f(x) = 2x + 3$ porque $f'(x) > g'(x)\ \forall\ x \in [-1,\ 1]$.

En el intervalo $[2,\ 4]$ crece más rápido $g(x) = x^2$ porque $f'(x) < g'(x)\ \forall\ x \in [2,\ 4]$.

8. Como es una función definida por polinomios, es derivable en todo R excepto, quizá, en $x = 1$.

Para que sea continua en $x = 1$,
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow a + b - 1 = 2b - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a - b = -1$

Para que sea derivable en $x = 1$, además de ser continua, debe cumplirse que las derivadas laterales coincidan.

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} a - b = -1 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

9. a) $(f + g)'(1) = f'(1) + g'(1) = + \left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{5}{4}$

b) $(f \cdot g)'(2) = \ = 4 \cdot 1 - 1 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{11}{3}$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2) = \dfrac{f'(2) \cdot g(2) - f(2) \cdot g'(2)}{[g(2)]^2} =$

$= \dfrac{4 \cdot 1 - 1 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)}{1^2} = \dfrac{13}{3}$

d) $(f \circ g)'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2) = f'(1) \cdot g'(2) =$

$= 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{2}{3}$

e) $(g \circ f)'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2) = g'(1) \cdot f'(2) =$

$= \left(-\dfrac{3}{4}\right) \cdot 4 = -3$

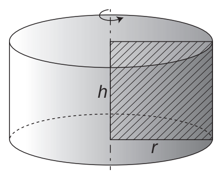
10. Se calcula el mínimo de la función. Se cumple que $f'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$, que corresponde a la abscisa del mínimo (f' pasa de ser negativa a ser positiva). Para este valor, $f(3) = -9 + a = 0 \Rightarrow$ a $= 9$. La función es $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

11. $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, pero $2r + 2h = 60 \Rightarrow h = 30 - r \Rightarrow$ $\Rightarrow V = \pi r^2(30 - r)$ y $V' = 3\pi r(20 - r)$

La derivada se anula para $r = 0$ y para $r = 20$, y el dominio de la función es $(0,\ 30)$.

La función es creciente en $(0,\ 20)$ y decreciente en $(20,\ 30)$. El máximo absoluto se obtiene para $r = 20$ cm y $h = 10$ cm.

El volumen máximo es, por tanto, $V_{\text{máx}} = 4000\pi$ cm^3



11 Derivadas y representación gráfica

Propuesta A

1. Se considera una función monótona f que verifica $f(2) = -3$, $f'(2) = 7$. Calcula la derivada de su función inversa en $x = -3$.

2. La función $f(x) = \sqrt{\ln(\text{sen } x)}$ existe para infinitos valores de x, pero no es derivable en ninguno. ¿Por qué?

3. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \text{sen}(2x)$
c) $h(x) = \text{sen}(x^2)$
e) $j(x) = \text{tg}(2x)$
g) $l(x) = \cos x \text{ tg } x$
b) $g(x) = 2 \text{ sen } x$
d) $i(x) = \text{sen}^2(x)$
f) $k(x) = \text{tg}\left(\frac{2}{x}\right)$
h) $m(x) = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$

4. Halla la derivada de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \ln(x \cos x)$
d) $i(x) = \ln x \cos x$
g) $l(x) = \cos x(x \ln x)$
b) $g(x) = e^{2x}$
e) $j(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{x}}$
h) $m(x) = 2^x x^2$
c) $h(x) = x e^x$
f) $k(x) = \log(x^2 - 3x)$
i) $n(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)^3$

5. Determina en cada caso la función derivada.

a) $f(x) = \text{arc}\cos(x^2)$
c) $h(x) = \text{arc}\text{tg } x^2$
e) $j(x) = \text{arc}\text{tg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
b) $g(x) = \text{arc}\cos(2x)$
d) $i(x) = \text{arc}\cos^2(x)$
f) $k(x) = \text{arc}\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

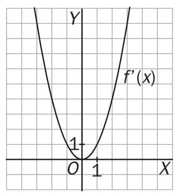
6. Calcula, utilizando la derivación logarítmica, la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x - 2)^x$
b) $g(x) = x^{x-2}$
c) $h(x) = (\ln x)^x$

7. Obtén las derivadas primera, segunda, tercera y cuarta de la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$. ¿Cuál sería la expresión general de la derivada enésima de esta función?

8. La siguiente gráfica corresponde a la función $f'(x)$, primera derivada de una determinada función $f(x)$.

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ interpretando la gráfica de $f'(x)$.
b) Estudia la curvatura y los puntos de inflexión de $f(x)$, utilizando solamente la gráfica de $f'(x)$.



9. Representa gráficamente las funciones polinómicas $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$, siendo $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x)$.

10. Haz un estudio completo de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$
d) $i(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$
b) $g(x) = \frac{2x-4}{x+1}$
e) $j(x) = x^2 e^x$
c) $h(x) = 3(x-1) - (x-1)^3$
f) $k(x) = \ln(x^2 - 1)$

Propuesta B

1. Las funciones f y g verifican que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$, para todo valor real x, y son derivables en el intervalo (0, 10). Si $f(3) = 7$ y $g(5) = 4$, calcula:

a) $f'(3) \cdot g'(7)$

b) $f'(4) \cdot g'(5)$

2. Justifica que la función $f(x) = \sqrt{\text{sen } x - 1}$ existe para infinitos valores reales, pero no es derivable en ninguno.

3. Determina la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \cos(2x)$

b) $g(x) = 2 \cos x$

c) $h(x) = \cos^2(x)$

d) $i(x) = \cos(x^2)$

e) $j(x) = \cos(2x)\ \text{tg}(2x)$

f) $k(x) = \text{tg}^2\ x$

g) $l(x) = \sec^2 x$

h) $m(x) = \text{cotg } x \text{ tg } x$

4. Calcula las derivadas de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \ln(x \text{ sen } x)$

b) $g(x) = 5^{2x}$

c) $h(x) = 3^x\, x^3$

d) $i(x) = \ln x \text{ sen } x$

e) $j(x) = \text{sen}(x \ln x)$

f) $k(x) = \ln \sqrt{x}$

g) $l(x) = (x - 1)\, e^x$

h) $m(x) = \ln(e^x)$

i) $n(x) = \log\left(\dfrac{1}{x^2 - 3x}\right)$

5. Calcula la derivada de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \text{arc sen}(2x)$

b) $g(x) = \text{arc tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

c) $h(x) = \text{arc tg}\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$

d) $i(x) = \text{arc sen}(x^2)$

e) $j(x) = \text{arc tg}\left(\sqrt{x}\right)$

f) $k(x) = \text{arc sen}^2(x)$

6. Halla, utilizando la derivación logarítmica, la derivada de las siguientes funciones.

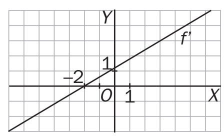
a) $f(x) = (x + 1)^x$

b) $g(x) = x^{x+1}$

c) $h(x) = x^{\text{sen } x}$

7. Obtén las derivadas primera, segunda, tercera y cuarta de la función $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$. ¿Cuál sería la expresión general de la derivada enésima de esta función?

8. La siguiente gráfica corresponde a la función $f'(x)$, primera derivada de una determinada función $f(x)$.



a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ interpretando la gráfica de $f'(x)$.

b) Estudia la curvatura y los puntos de inflexión de $f(x)$ utilizando solamente la gráfica de $f'(x)$.

9. Representa gráficamente las funciones polinómicas $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ siendo $f(x) = \dfrac{1}{4}(4x^2 - x^4)$.

10. Representa las siguientes funciones tras realizar un estudio completo de las mismas.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

b) $g(x) = (x + 1) - (x + 1)^3$

c) $h(x) = \dfrac{x - 4}{2x + 4}$

d) $i(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

e) $j(x) = x\, e^x$

f) $k(x) = \ln(4 - x^2)$

Soluciones propuesta A

1. $(f^{-1})'(-3) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(-3))} = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{7}$

2. Porque el dominio es $D = \left\{x \in \mathrm{R},\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$ y está formado por puntos aislados. Por tanto, la función no es continua en ningún punto y como consecuencia no es derivable.

3. a) $f'(x) = 2\cos(2x)$ e) $f'(x) = \dfrac{2}{\cos^2(2x)}$

b) $g'(x) = 2\cos x$ f) $g'(x) = \dfrac{-2}{x^2}\sec^2\left(\dfrac{2}{x}\right)$

c) $k'(x) = 2x\cos x^2$ g) $l(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow l'(x) = \cos x$

d) $h'(x) = 2\operatorname{sen} x\cos x$ h) $k'(x) = 0$

4. a) $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \operatorname{tg} x$ c) $h'(x) = e^x(x + 1)$

b) $g'(x) = 2e^{2x}$ d) $i'(x) = \dfrac{1}{x}\cdot\cos x - \ln x\operatorname{sen} x$

e) $j'(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{2}(\ln 1 - \ln x) = -\dfrac{1}{2}\ln x \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{2x}$

f) $k'(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 3x}\cdot\dfrac{1}{\ln 10}$

g) $l'(x) = -(1 + \ln x)\operatorname{sen}(x\ln x)$

h) $m'(x) = 2^x\, x(\ln 2\cdot x + 2)$

i) $n'(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x + 1}\right)^3 = 3[\ln 2x - \ln(x + 1)] \Rightarrow$

$\Rightarrow h'(x) = 3\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x + 1}\right) = \dfrac{3}{x^2 + x}$

5. a) $f'(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{1 - x^4}}$ c) $h'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^4}$

b) $g'(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$ d) $i'(x) = \dfrac{-2\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$

e) $j'(x) = \dfrac{2}{(1 - x)^2}\cdot\dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^2} = \dfrac{1}{1 + x^2}$

f) $k'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{x}\right)^2}} = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

6. a) $\ln f(x) = x\ln(x - 2) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x - 2) + \dfrac{x}{x - 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = (x - 2)^x\left[\ln(x - 2) + \dfrac{x}{x - 2}\right]$

b) $g'(x) = x^{x - 2}\left[\ln x + \dfrac{x - 2}{x}\right]$

c) $h'(x) = (\ln x)^x\left[\ln(\ln x) + \dfrac{1}{\ln x}\right]$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1} = (x + 1)^{-1};\ f'(x) = (-1)(x + 1)^{-2}$

$f''(x) = (-1)(-2)(x + 1)^{-3}$

$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)(x + 1)^{-4}$

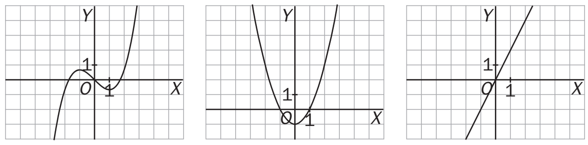
$f''''(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)(x + 1)^{-5}$

$f^{n)}(x) = (-1)^n\cdot n!\cdot(x + 1)^{-(n+1)} = \dfrac{(-1)^n\cdot n!}{(x + 1)^{(n+1)}}$

8. a) Es creciente en todo su dominio, ya que como $f'(x) > 0$ si $x \neq 0$, significa que $f(x)$ es creciente en esa región. Pero también lo es en $x = 0$, ya que tanto por la izquierda como por la derecha la derivada es positiva.

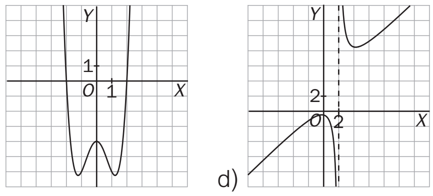
b) En el intervalo $(-\infty, 0)$ $f'(x)$ es decreciente $\Rightarrow$ $\Rightarrow f''(x) < 0$, por lo que la función $f(x)$ es cóncava negativa o hacia abajo. En el intervalo $(0, +\infty)$ $f'(x)$ es creciente $\Rightarrow f''(x) > 0$, por lo que la función $f(x)$ es cóncava positiva o hacia arriba. En $x = 0$ hay un punto de inflexión de tangente horizontal.

9.



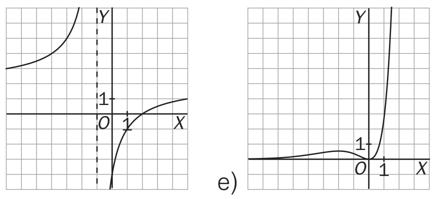
$f(x)$ $f'(x) = x^2 - 1$ $f''(x) = 2x$

10.



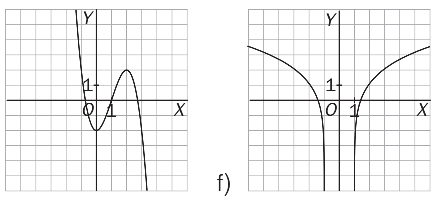
a) d)

Raíces	$x = \pm 2$. Es par.	No tiene.
Extremos	$M(0, -4)$; $m\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}, -\dfrac{25}{4}\right)$	$M(2 - \sqrt{5}, 4 - 2\sqrt{5})$ $m(2 + \sqrt{5}, 4 + 2\sqrt{5})$
Inflexión	$I\left(\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}, -\dfrac{21}{4}\right)$	No tiene.
Asíntotas	No tiene.	AV: $x = 2$; AO: $y = x + 2$



b) e)

Raíces	$x = 2$.	$x = 0$.
Extremos	No tiene.	$M(-2, 4e^{-2})$; $m(0, 0)$
Inflexión	No tiene.	$I_1[-\sqrt{2}-2, e^{-\sqrt{2}-2}(4\sqrt{2}+6)]$ $I_1[-\sqrt{2}-2, e^{\sqrt{2}-2}(6-4\sqrt{2})]$
Asíntotas	AV: $x = -1$; AH: $y = 2$	AH: $y = 0$ en $x \to -\infty$



c) f)

Raíces	$x = 1$; $x = 1 \pm \sqrt{3}$	$x = \pm\sqrt{2}$. Es par.
Extremos	$M(2, 2)$; $m(0, -2)$	No tiene.
Inflexión	$I(1, 0)$	No tiene.
Asíntotas	No tiene.	AV: $x = 1^+$, $x = -1^-$

Soluciones propuesta B

1. $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x \Rightarrow \begin{cases} f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \\ g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \end{cases}$

Por tanto: $\begin{cases} f'(g(7)) \cdot g'(7) = f'(3) \cdot g'(7) = 1 \\ g'(f(4)) \cdot f'(4) = g'(5) \cdot f'(4) = 1 \end{cases}$

2. Porque el dominio es $D = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$ y está formado por puntos aislados. Por tanto, la función no es continua en ningún punto y como consecuencia no es derivable.

3. a) $f'(x) = -2 \text{ sen}(2x)$

b) $g'(x) = -2 \text{ sen } x$

c) $h'(x) = -2 \text{ sen } x \cos x$

d) $k'(x) = -2x \cdot \text{sen}(x^2)$

e) $f'(x) = 2 \cos(2x)$

f) $g'(x) = 2 \text{ tg } x \sec^2 x$

g) $k'(x) = 2 \text{ tg } x \sec^2 x$

h) $h'(x) = 0$

4. a) $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$

b) $f'(x) = 2 \cdot 5^{2x} \cdot \ln 5$

c) $k'(x) = 3^x x^2(x \cdot \ln 3 + 3)$

d) $g'(x) = \dfrac{1}{x} \text{ sen } x + \ln x \cos x$

e) $h'(x) = (1 + \ln x) \cdot \cos(x \ln x)$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{2x}$

g) $g'(x) = x\, e^x$

h) $h'(x) = 1$

i) $g'(x) = \dfrac{-2x + 3}{\ln 10(x^2 - 3x)}$

5. a) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

b) $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$

c) $h'(x) = \dfrac{-1}{1 + x^2}$

d) $k'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$

e) $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1 + x^2)}$

f) $h'(x) = \dfrac{2 \text{ arcsen } x}{\sqrt{1 - x^2}}$

6. a) $\ln f(x) = x \ln(x+1) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = (x+1)^x\left[\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}\right]$

b) $g'(x) = x^{x+1}\left[\ln x + \dfrac{x+1}{x}\right]$

c) $h'(x) = x^{\text{sen } x} \cdot \left[\cos x \ln x + \dfrac{\text{sen } x}{x}\right]$

7. $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} = (-1)(x-1)^{-2}$

$f''(x) = (-1)(-2)(x+1)^{-3}$

$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4}$

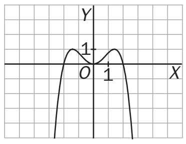
$f''''(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)(x+1)^{-5}$

$f^{n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot (x+1)^{-(n+1)} = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{(n+1)}}$

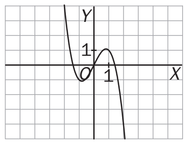
8. a) $f'(x) > 0 \ \forall\, x \in (-2, +\infty) \Rightarrow f(x)$ es creciente en el intervalo $(-2, +\infty)$ y $f'(x) < 0 \ \forall\, x \in (-\infty, -2) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, -2)$.

b) $f'(x)$ es creciente $\Rightarrow f''(x) > 0$, por lo que la función $f(x)$ es cóncava positiva o hacia arriba.

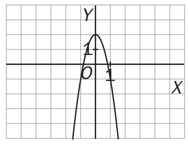
9.



$f(x)$

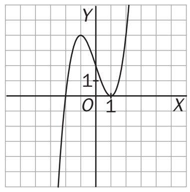


$f'(x) = 2x - x^3$

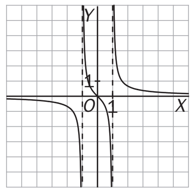


$f''(x) = 2 - 3x^2$

10.

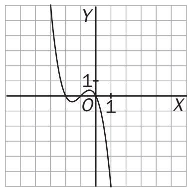


a)

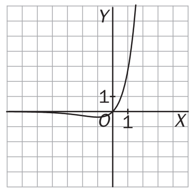


d)

	a)	d)
Raíces	$x = -2; x = -3$	$x = 0$ Es impar
Extremos	$M(-1, 4); m(1, 0)$	No tiene.
Inflexión	$I(0, 2)$	$I(0, 0)$
Asíntotas	No tiene.	$AV: x = \pm 1; AH: y = 0$

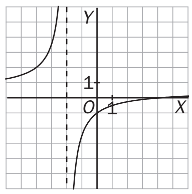


b)

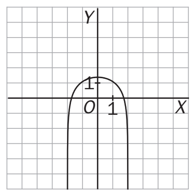


e)

	b)	e)
Raíces	$x = -2, x = -1, x = 0$	$x = 0$
Extremos	$M\left(-1 + \sqrt{\dfrac{1}{3}}, \sqrt{\dfrac{4}{27}}\right)$ $m\left(-1 - \sqrt{\dfrac{1}{3}}, \sqrt{\dfrac{4}{27}}\right)$	$m\left(-1, \dfrac{1}{e}\right)$
Inflexión	$I(-1, 0)$	$I\left(-2, \dfrac{1}{e^2}\right)$
Asíntotas	No tiene.	$AH: y = 0$ en $x \to -\infty$



c)



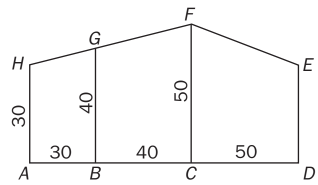
f)

	c)	f)
Raíces	$x = 4$	$x = \pm\sqrt{3}$. Es par.
Extremos	No tiene.	$M(0, 0)$
Inflexión	No tiene.	No tiene.
Asíntotas	$AV: x = -2; AH: y = \dfrac{1}{2}$	AV: en $x = -2$ (derecha) y en $x = 2$ (izquierda)

12 Integración

Propuesta A

1. Una empresa constructora quiere comprar un terreno, para lo cual realiza algunas mediciones y dibuja el mapa de la figura (las longitudes se dan en metros). Calcula el valor que deberá pagar sabiendo que el metro cuadrado tiene un precio de 180 euros.



2. Escribe la expresión algebraica de la función $F(x)$ sabiendo que $F'(x) = 6x^2 - 6x + 5$ y que $F(2) = 8$.

3. Halla la ecuación de la curva que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(-1, 8)$ y cuya derivada segunda es $f''(x) = -12x + 6$.

4. Halla las integrales indefinidas siguientes.

a) $\int (x + 2)dx$

b) $\int \left(2x + \frac{3}{x^2} - 10\right)dx$

c) $\int (3x^2 + 2x - 3)dx$

d) $\int 5\ e^{3x+2}\ dx$

e) $\int \left(x + \frac{1}{2x^2}\right)dx$

f) $\int 6\ \sqrt{e^{5x}}\ dx$

5. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{1}{16 + x^2}\ dx$

b) $\int \frac{4x}{\cos^2(x^2 + 2)}\ dx$

c) $\int \frac{\cos(3x - 5)}{\mathrm{sen}^2(3x - 5)}\ dx$

d) $\int \frac{1}{x\ (1 + (ln)^2)}\ dx$

6. Se quiere calcular el área encerrada bajo la curva $y = x^2 + 2$ en el intervalo [2, 3].

a) Halla las abscisas de los puntos que dividen el intervalo [2, 3] en cuatro partes iguales.

b) Halla las imágenes en los puntos en que has dividido el intervalo.

c) Aproxima el área por la que se obtiene al sumar el área de los cuatro trapecios determinados por los puntos obtenidos en los apartados anteriores.

d) Calcula el área mediante la regla de Barrow y compárala con la obtenida aplicando el método de los trapecios.

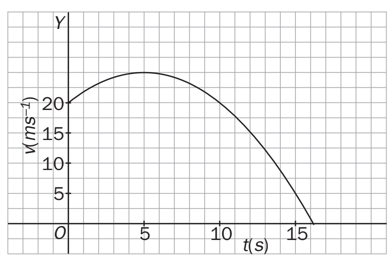
7. Con ayuda del método de los trapecios, calcula una aproximación del área encerrada por la función $y = \frac{2}{x - 1}$ en el intervalo [2, 4] cuando este se ha dividido en cuatro partes iguales y compara el resultado con el que se obtiene aplicando la regla de Barrow.

8. Calcula el área limitada por el eje de abscisas y la gráfica de la función $y = 2x - x^2$.

9. Determina el valor del área limitada por las curvas correspondientes a las funciones $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1$.

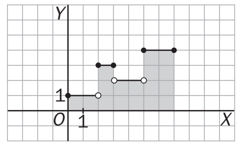
10. En un movimiento rectilíneo, la velocidad, en metros por segundo, en función del tiempo viene dada por la expresión $v(t) = 20 + 2t - 0{,}2t^2$, que aparece representada en la gráfica adjunta. El espacio recorrido por el móvil entre dos instantes de tiempo es igual al área limitada por la gráfica de la velocidad y por las rectas verticales correspondientes a los tiempos inicial y final.

Teniendo en cuenta lo anterior, calcula para este caso el espacio recorrido por el móvil entre los instantes $t_1 = 0$ y $t_2 = 10$ segundos.



Propuesta B

1. Dada la gráfica de la derecha correspondiente a la función $y = f(x)$:



a) Escribe la ecuación de la función.
(Ten en cuenta que esta función solo está definida en el intervalo [0, 7].)

b) Calcula el área limitada por la función anterior, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = 0$ y $y = 7$.

2. La derivada segunda de una función derivable en todo R es $f''(x) = 2x - 5$. Además, se sabe que tiene un máximo relativo en el punto $M(1, -1)$. Encuentra la expresión analítica de f.

3. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int (10x + \sqrt{x})\,dx$

b) $\int \frac{6}{x + 1}\,dx$

c) $\int \left(x^2 + \frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)dx$

d) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2\right)dx$

e) $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \text{tg}\, x}\,dx$

f) $\int \frac{\cos x}{3 + \text{sen}\, x}\,dx$

4. Halla las integrales indefinidas siguientes.

a) $\int \text{sen}\left(5x + \frac{1}{2}\right)dx$

b) $\int \frac{3}{1 + 4x^2}\,dx$

c) $\int x^2 \cos(x^3 + 10)\,dx$

d) $\int \frac{1 + 2Lx - 3(ln)^2}{x}\,dx$

5. Dada la parábola $f(x) = x^2 + k (k > 0)$, se quiere determinar el valor de k para que el área encerrada entre la parábola, el eje de abscisas, el eje de ordenadas y la recta $x = k$ sea igual a 18 u^2.

6. Escribe la expresión algebraica de la función $F(x)$ sabiendo que $f(x) = F'(x) = \text{sen}\, x + \cos x$ y que pasa por el punto $Q\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$.

7. Se quiere calcular el área encerrada bajo la curva $y = 2x^2 + 1$ en el intervalo $[-2, 4]$.

a) Halla las abscisas de los puntos que dividen el intervalo $[-2, 4]$ en cinco partes iguales.

b) Halla las imágenes en los puntos en que has dividido el intervalo.

c) Aproxima el área por la que se obtiene al sumar el área de los cinco trapecios determinados por los puntos obtenidos en los apartados anteriores.

d) Calcula el área mediante la regla de Barrow y compárala con la obtenida aplicando el método de los trapecios.

8. Dada la función $y = (x - 1)^2$:

a) Dibuja la zona del plano limitada por la función y por las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

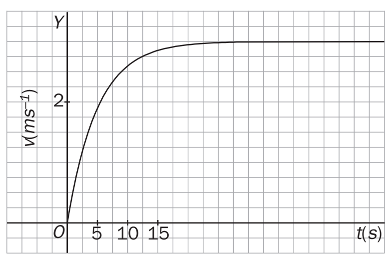
b) Aplicando el método de Barrow, calcula el área de la zona dibujada.

9. Determina gráficamente el recinto limitado por las funciones $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$ y calcula su área.

10. En un movimiento rectilíneo, la velocidad, en metros por segundo, en función del tiempo viene dada por la expresión $v(t) = 3(1 - e^{-0,2\,t})$, que aparece representada en la gráfica adjunta. El espacio recorrido por el móvil entre dos instantes de tiempo es igual al área limitada por la gráfica de la velocidad y por las rectas verticales correspondientes a los tiempos inicial y final.

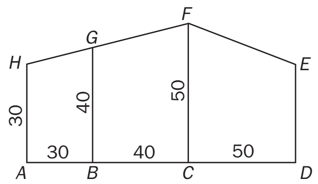
Teniendo en cuenta lo anterior, calcula para este caso el espacio recorrido por el móvil entre los instantes $t_1 = 0$ y $t_2 = 50$ segundos.

¿Qué comportamiento tiene el móvil cuando el tiempo transcurrido aumenta?



Soluciones propuesta A

1. El área del terreno es la suma de las áreas de los tres trapecios en que se puede dividir.



$A = A_t(ABGH) + A_t(BCFG) + A_t(CDEF) =$

$= \dfrac{(30+40)\cdot 30}{2} + \dfrac{(40+50)\cdot 40}{2} + \dfrac{(50+30)\cdot 50}{2} =$

$= 4850 \text{ m}^2$

El coste total será $C = 4850 \cdot 180 = 873\,000$ euros.

2. Se calcula primero la integral indefinida y después se fija el valor de la constante de integración para que se cumpla la condición $F(2) = 8$:

$F(x) = \displaystyle\int (6x^2 - 6x + 5)\text{dx} = 2x^3 - 3x^2 + 5x + C$

$F(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + C = 14 + C = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = -6 \Rightarrow F(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 6$

3. Hay que integrar dos veces. Las constantes de integración se fijan obligando a que la ecuación obtenida pase por los dos puntos dados:

$f'(x) = \displaystyle\int (-12x + 6)\text{dx} = -6x^2 + 6x + C$

$f(x) = \displaystyle\int (-6x^2 + 6x + C)\text{dx} = -2x^3 + 3x^2 + Cx + K$

$\begin{cases} f(1) = 1 + C + K = 0 \\ f(-1) = 5 - C + K = 8 \end{cases} \Rightarrow C = -2 \quad K = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

4. a) $\displaystyle\int (x + 2)\text{dx} = \frac{x^2}{2} + 2x + K$

b) $\displaystyle\int \left(2x + \frac{3}{x^2} - 10\right)\text{dx} = \int (2x + 3x^{-2} - 10)\text{dx} =$

$= x^2 + \dfrac{3x^{-1}}{-1} - 10x + K = x^2 - \dfrac{3}{x} - 10x + K$

c) $\displaystyle\int (3x^2 + 2x - 3)\text{dx} = x^3 + x^2 - 3x + K$

d) $\displaystyle\int 5\ e^{3x+2}\ \text{dx} = \frac{5}{3}e^{3x+2} + K$

e) $\displaystyle\int \left(x + \frac{1}{2x^3}\right)\text{dx} = \int \left(x + \frac{1}{2}x^{-3}\right)\text{dx} =$

$= \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^{-2}}{-4} + K = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{4x^2} + K$

f) $\displaystyle\int 6\ \sqrt{e^{5x}}\ \text{dx} = 6\frac{2}{5}\int \frac{5}{2}e^{\frac{5}{2}x}\ \text{dx} = \frac{12}{5}e^{\frac{5x}{2}} + K$

5. a) $\displaystyle\int \frac{1}{16 + x^2}\text{dx} = \frac{4}{16}\int \frac{\frac{1}{4}}{1 + \left(\frac{x}{4}\right)^2}\text{dx} = \frac{1}{4}\text{arctg}\ \frac{x}{4} + K$

b) $\displaystyle\int \frac{4x}{\cos^2(x^2 + 2)}\text{dx} = 2\int \frac{2x}{\cos^2(x^2 + 2)}\text{dx} =$
$= 2\ \text{tg}(x^2 + 2) + K$

c) $\displaystyle\int \frac{\cos(3x - 5)}{\text{sen}^3(3x - 5)}\text{dx} = \frac{1}{3}\int 3\ \text{sen}^{-3}(3x - 5)\cos(3x - 5)\text{dx} =$

$= \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\text{sen}^{-2}(3x - 5)}{-2} + K = -\dfrac{1}{6\ \text{sen}^2(3x - 5)} + K$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(1 + (\ln x)^2)}\text{dx} = \text{arctg}(\ln x) + K$

6. Longitud de la partición: $h = \dfrac{3 - 2}{4} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

a) Abscisas: $x = 2$; $x = 2{,}25$; $x = 2{,}5$; $x = 2{,}75$; $x = 3$

b) $f(2) = 6$; $f(2{,}25) = 7{,}0625$; $f(2{,}5) = 8{,}25$;
$f(2{,}75) = 9{,}5625$; $f(3) = 11$

c) $A = \dfrac{1}{4} \cdot \left[\dfrac{f(2)}{2} + f(2{,}25) + f(2{,}5) + f(2{,}75) + \dfrac{f(3)}{2}\right] =$

$= \dfrac{1}{4} \cdot [3 + 7{,}0625 + 8{,}25 + 9{,}5625 + 5{,}5] =$

$= \dfrac{33{,}375}{4} = 8{,}34375 \text{ u}^2$

d) $\displaystyle\int_2^3 (x^2 + 2)\text{dx} = \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_2^3 = (9 + 6) - \left(\frac{8}{3} + 4\right) =$

$= \dfrac{25}{3} = 8{,}\widehat{3}$

La diferencia entre ambas áreas es de poco más de una centésima, aproximadamente de un 0,1%.

7. Longitud de la partición: $h = \dfrac{4 - 2}{4} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

Abscisas: $x = 2$; $x = 2{,}5$; $x = 3$; $x = 3{,}5$; $x = 4$

$A = 0{,}5 \cdot \left[\dfrac{f(2)}{2} + f(2{,}5) + f(3) + f(3{,}5) + \dfrac{f(4)}{2}\right] =$

$= 0{,}5 \cdot \left[1 + \dfrac{2}{1{,}5} + 1 + 0{,}8 + \dfrac{1}{3}\right] \approx 2{,}233 \text{ u}^2$

Por la regla de Barrow:

$\displaystyle\int_2^4 \frac{2}{x - 1}\text{dx} = (2\ \ln|x - 1|]_2^4 = 2 \cdot \ln 3 - 2 \cdot \ln 1 =$

$= 2 \cdot \ln 3 \approx 2{,}197$

La diferencia es de un 1,6%.

8. La parábola corta el eje de abscisas en los puntos $x = 0$ y $x = 2$, y es continua y positiva en este intervalo. Por tanto:

$A = \displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)\text{dx} = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}\text{u}^2$

9. Los puntos de corte entre ambas curvas son las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x) \Rightarrow x = -1,\ \dfrac{1}{2}$ y 2.

En el intervalo $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ es $f > g$, y en $\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$ es

$g > f \Rightarrow A = \displaystyle\int_{-2}^{\frac{1}{2}} (f(x) - g(x))\text{dx} + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (g(x) - f(x))\text{dx} =$

$= \dfrac{81}{64} + \dfrac{81}{64} = \dfrac{81}{32}\text{u}^2$

10. El espacio será igual al área entre 0 y 10 s:

$e = \displaystyle\int_1^2 v(t)\text{dt} = \int_0^{10} (20 + 2t - 0{,}2t^2)\text{dt} =$

$= \left[20t + t^2 - 0{,}2\dfrac{t^3}{3}\right]_0^{10} = \dfrac{70}{3} \text{ m}$

1. a) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leqslant x < 2 \\ 3 \text{ si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2 \text{ si } 3 < x < 5 \\ 4 \text{ si } 5 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}$

b) $f(x) = \int_0^7 f(x)\text{dx} = \int_0^2 \text{dx} + \int_2^3 3\text{dx} + \int_3^5 \text{dx} + \int_5^7 4\text{dx} =$

$= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 2 + 3 + 4 + 8 = 17 \text{ u}^2$

2. Hay que integrar dos veces. Las constantes de integración se fijan obligando a que la función obtenida pase por el punto del máximo y tenga derivada nula en él.

$f'(x) = \int (2x - 5)\text{dx} = x^2 - 5x + C$

$f'(1) = 0 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow f'(1) = x^2 - 5x + 4$

$f(x) = \int (x^2 - 5x + 4)\text{dx} = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 4x + K$

$f(1) = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{2} + 4 + K = -1 \Rightarrow K = -\dfrac{17}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 4x - \dfrac{17}{6}$

3. a) $\int (10x + \sqrt{x})\text{dx} = \int (10x + x^{\frac{1}{2}})\text{dx} =$

$= 5x^2 + \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + K = 5x^2 + \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3} + K$

b) $\int \dfrac{6}{x + 1}\text{dx} = 6\, ln|x + 1| + K$

c) $\int \left(x^2 + \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)\text{dx} = \int \left(x^2 + \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{2}\right)\text{dx} =$

$= \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{2 \cdot \frac{4}{3}} = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3\sqrt[3]{x^4}}{8} + K$

d) $\int \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1 + x + x^2\right)\text{dx} =$

$= -\dfrac{1}{x} + ln|x| + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + K$

e) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x \cdot \text{tg}\, x}\text{dx} = ln|\text{tg}\, x| + K$

f) $\int \dfrac{\cos x}{3 + \text{sen}\, x}\text{dx} = ln|3 + \text{sen}\, x| + K$

4. a) $\int \text{sen}\left(5x + \dfrac{1}{2}\right)\text{dx} = -\dfrac{1}{5}\cos\left(5x + \dfrac{1}{2}\right) + K$

b) $\int \dfrac{3}{1 + 4x^2}\text{dx} = \dfrac{3}{2}\int \dfrac{2}{1 + (2x)^2}\text{dx} = \dfrac{3}{2}\text{arctg}(2x) + K$

c) $\int x^2 \cos(x^3 + 10)\,\text{dx} = \dfrac{1}{3}\text{sen}(x^3 + 10) + K$

d) $\int \dfrac{1 + 2lnx - 3(ln\, x)^2}{x}\text{dx} = lnx + (lnx)^2 - (lnx)^3 + K$

5. Al ser $k > 0$, la función es siempre positiva y, por tanto, el área pedida se puede calcular como:

$A = \int_0^k (x^2 + k)\text{dx} = \left[\dfrac{x^3}{3} + kx\right]_0^k = \dfrac{k^3}{3} + k^2 = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^3 + 3k^2 - 54 = 0 \Rightarrow k = 3$

6. Se calcula primero la integral indefinida y después se fija el valor de la constante de integración para que se cumpla la condición $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2$.

$F(x) = \int (\text{sen}\, x + \cos x)\text{dx} = -\cos x + \text{sen}\, x + C$

$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos \dfrac{\pi}{2} + \text{sen}\, \dfrac{\pi}{2} + C = 1 + C = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = -3 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \text{sen}\, x - 3$

7. Longitud de la partición: $h = \dfrac{4 - (-2)}{5} = \dfrac{6}{5} = 1{,}2$

a) Abscisas: $x = -2$; $x = -0{,}8$; $x = 0{,}4$; $x = 1{,}6$; $x = 2{,}8$; $x = 4$

b) $f(-2) = 9$; $f(-0{,}8) = 2{,}28$; $f(0{,}4) = 1{,}32$; $f(1{,}6) = 6{,}12$; $f(2{,}8) = 16{,}68$; $f(4) = 33$

c) $A = 1{,}2 \cdot \left[\dfrac{f(-2)}{2} + f(-0{,}8) + f(0{,}4) + f(1{,}6) + f(2{,}8) + \dfrac{f(4)}{2}\right] =$

$= 1{,}2 \cdot [4{,}5 + 2{,}28 + 1{,}32 + 6{,}12 + 16{,}68 + 16{,}65] =$

$= 56{,}88 \text{ u}^2$

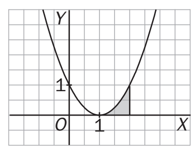
d) $\int_{-2}^{4} (2x^2 + 1)\text{dx} = \left[\dfrac{2x^3}{3} + x\right]_{-2}^{4} =$

$= \left(\dfrac{128}{3} + 4\right) - \left(-\dfrac{16}{3} - 2\right) = 54 \text{ u}^2$

La diferencia entre ambas áreas es de 2,88; es decir, aproximadamente de un 5,3%.

8. $A = \int_1^2 [x - 1]^2\, \text{dx} = \left[\dfrac{1}{3}(x - 1)^3\right]_1^2 =$

$= \dfrac{1}{3} \text{ u}^2$



9. Los puntos de corte de las dos funciones son

$\begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Rightarrow (1, 1) \text{ y } (4, 4)$

En el intervalo (1, 4) es $f > g$. Por tanto:

$A = \int_1^4 [x - (x^2 - 4x + 4)]\text{dx} = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)]\text{dx} =$

$= \left[\dfrac{-x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 = \dfrac{9}{2} \text{ u}^2$

10. El espacio será igual al área entre 0 y 50 s:

$e = \int_1^2 v(t)\text{dt} = \int_0^{50} 3(1 - e^{-0,2t})\text{dx} = 3\left[t + \dfrac{e^{-0,2t}}{0{,}2}\right]_0^{50} =$

$= 15(9 + e^{-10}) = 135 \text{ m}$

Cuando el tiempo aumenta, la velocidad tiende a un valor constante de 3 ms^{-1} y el móvil se mueve con un movimiento rectilíneo uniforme.

13 Distribuciones bidimensionales

Propuesta A

1. Halla la media, la mediana, la varianza y la desviación típica de las siguientes series de datos.
a) 10, 12, 6, 7, 18, 3, 15, 5
b) 7, 9, 11, 6, 7, 10, 8, 9, 7

2. Las estaturas de un grupo de escolares, agrupadas en clases, vienen reflejadas en la tabla siguiente.

Estatura en cm	[144, 152)	[152, 160)	[160, 168)	[168, 176)	[176, 184]
Frecuencia f_i	5	12	24	6	3

a) Construye el histograma correspondiente.
b) Determina las marcas de clase y calcula la estatura media del grupo.
c) ¿Qué porcentaje de escolares no supera los 160 cm de estatura?

3. En cada una de las siguientes series estadísticas bidimensionales:
a) Dibuja el diagrama de dispersión y, observándolo, analiza el tipo de relación que existe entre las dos variables. ¿Qué valor aproximado darías al coeficiente de correlación lineal?
b) Calcula las medias marginales $\bar{x}$ e $\bar{y}$ y utilízalas para representar de manera aproximada la recta de regresión de y sobre x.
c) Calcula el coeficiente de correlación y compáralo con el valor estimado.

i)

x	1	2	3	3	3	4	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8
y	1	2	2	3	4	3	4	5	4	5	5	6	6	8	7	8

ii)

x	0	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7
y	4	2	3	4	1	2	2	3	1	2	1	2	0	1	0

4. Para estudiar la relación entre los gastos en publicidad de seis empresas de productos lácteos y las ventas realizadas durante un determinado período de tiempo disponemos de los siguientes datos.

Gastos en publicidad (miles de €)	1	2	3	4	5	6
Ventas (miles de €)	12	14	14	15	18	16

a) Calcula las medias y las desviaciones típicas marginales de las variables X: gastos en publicidad e Y: ventas.
b) Calcula la covarianza y el valor del coeficiente de correlación lineal.
c) Obtén la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X.
d) ¿Qué ventas deberíamos esperar para un gasto publicitario de 8000 euros? ¿Cómo es de fiable esta estimación?

5. Dada la siguiente serie estadística bidimensional:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	3	4	4	6	4	7	5	9	8

a) Calcula el coeficiente de correlación lineal y explica de qué tipo es la relación entre las variables.
b) Obtén las rectas de regresión de Y sobre X y de X sobre Y.

6. Se ha observado una variable estadística bidimensional (X, Y) y se han obtenido los siguientes datos.
(5, 1), (6, 1), (7, 1), (9, 3), (5, 1), (5, 1), (6, 2), (7, 1), (9, 3), (5, 1), (7, 1), (6, 2),
(7, 2), (8, 2), (6, 2), (9, 3), (8, 2), (5, 1), (9, 3), (6, 2), (7, 2), (9, 3), (7, 3), (5, 1)
a) Expresa los datos mediante una tabla de doble entrada.
b) Calcula el coeficiente de correlación; ¿qué significado puedes darle?
c) Obtén la recta de regresión de Y sobre X.
d) ¿Qué valor de y esperaríamos encontrar para $x = 10$? ¿Cómo de fiable es esta estimación?

7. En una variable bidimensional (X, Y), las rectas de regresión vienen dadas por las ecuaciones $4y + x - 6 = 0$ (recta de regresión de Y sobre X) e $y + 2x - 5 = 0$ (recta de regresión de X sobre Y).
a) Obtén los valores de las medias de las distribuciones marginales.
b) Halla el valor del coeficiente de correlación.

8. Consideremos el siguiente conjunto de datos:

X	1	3	4	5	7	8	9	10	11	12	14	16	23
Y	7	11	13	15	15	17	16	18	3	18	20	21	4

¿Podrías predecir el valor de la variable y para $x = 6$? Realiza la estimación mediante la recta de regresión y mediante la recta de Tukey med-med.

Propuesta B

1. Halla la media, la mediana, la varianza y la desviación típica de las siguientes series de datos.

a) 5, 9, 2, 4, 6, 8, 5, 3, 7, 1

b) 23, 20, 23, 26, 23, 25, 26, 29, 27

2. El número de días de nevada registrados en los últimos 50 años en una estación de montaña, agrupados en clases, viene reflejado en la tabla siguiente.

Días de nevada	[44, 50)	[50, 56)	[56, 62)	[62, 68)	[68, 74]
Años (Frecuencia f_i)	5	12	24	6	3

a) Determina las marcas de clase y calcula el número medio de días de nevada en la estación.

b) Construye el histograma de frecuencias.

c) ¿Qué porcentaje de años ha habido menos de 50 días de nevada?

3. Los valores de dos variables X e Y se distribuyen según la siguiente tabla.

X	1	2	4	5	6	0	8	8	8	7	9
Y	2	5	2	3	3	5	3	3	10	4	8

a) Calcula el coeficiente de correlación.

b) Obtén la recta de regresión de Y sobre X.

c) ¿Sería fiable el valor que obtendrías para $X = 10$?

4. De una serie estadística bidimensional se conocen los siguientes parámetros.

$$\bar{x} = 3;\ \bar{y} = 3;\ s_x^2 = 2{,}5;\ s_y^2 = 2{,}5;\ s_{xy} = 2{,}25$$

a) Obtén el valor del coeficiente de correlación de la variable bidimensional.

b) Calcula la ecuación de la recta de regresión de y sobre x. ¿Qué valor de y se espera encontrar para $x = 2$.

c) Calcula la ecuación de la recta de regresión de x sobre y. ¿Qué valor de x se espera encontrar para $y = 6$?

d) ¿Cómo de fiables son las predicciones anteriores?

5. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de aspirantes a pilotos de aviación comercial en dos pruebas en las que se trataba de medir la velocidad de reacción y la destreza manual fueron las mostradas en la tabla de la derecha.

Velocidad de reacción / Destreza manual	10-20	20-30	30-40	40-50
0-10	5	3	0	0
10-20	2	6	1	0
20-30	0	1	4	2
30-40	0	0	3	3
40-50	0	0	1	2

a) ¿Qué puntuación en destreza manual se espera encontrar en un aspirante calificado con 32 en la prueba de velocidad de reacción?

b) ¿Qué puntuación obtendrá en velocidad de reacción un aspirante que ha obtenido 19 en la otra prueba?

c) ¿Cómo de fiables son las predicciones anteriores?

6. De una encuesta realizada entre 50 escolares de 2.º de ESO, para estudiar si el número de horas que estudian semanalmente tiene mucha o poca relación con el número de asignaturas que suspenden, se obtuvo la siguiente tabla.

		Número de asignaturas suspensas					
		0	1	2	3	4	>4
Número de horas	[0, 2)	–	–	–	1	3	5
	[2, 4)	–	–	1	2	3	4
	[4, 6)	–	2	3	2	2	1
	[6, 8)	4	5	2	–	–	–
	[8, 10)	6	3	1	–	–	–

a) Determina el tipo de correlación que existe entre el número de horas y el número de suspensos.

b) Efectúa la estimación del número de horas que estudia semanalmente un alumno que suspende 5 asignaturas.

7. En un estudio realizado para determinar la rapidez de desecación de un compuesto orgánico destinado a jardinería se han observado las variables "número de días transcurridos desde el riego" (X) y "porcentaje de humedad del compuesto" (Y), obteniéndose los datos de la tabla.

X	1	2	3	4	5
Y	90	80	70	50	30

a) ¿Qué grado de humedad se espera encontrar a los siete días del riego?

b) ¿Cuántas horas han de pasar desde el riego para que el grado de humedad sea del 50%?

8. Se considera la variable bidimensional de la tabla.

X	2	3	4	5	6
Y	5	7	8	8	11

Representa el diagrama de dispersión.

b) Construye la tabla auxiliar de datos y calcula a partir de ella $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_x, s_y, s_{xy} y r.

c) Determina y representa sobre el diagrama de dispersión la recta de regresión de Y sobre X.

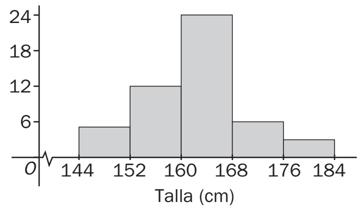
d) Calcula el coeficiente de determinación para valorar la bondad del ajuste que se realiza con la recta hallada.

Soluciones propuesta A

1. a) $\overline{x} = 9{,}5$; $M = 8{,}5$; $s^2 = 23{,}75$; $s = 4{,}87$

b) $\overline{x} = 8{,}22$; $M = 8$; $s^2 = 2{,}40$; $s = 1{,}55$

2. a)



b) Marcas de clase: 148, 156, 164, 172, 180

Media: $\overline{x} = 162{,}4$ cm

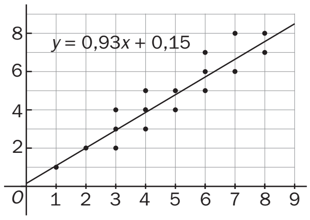
c) Hay 17 chicos por debajo de 160 cm, lo que representa: $\dfrac{17}{50} \cdot 100 = 34\%$.

3. i) Relación lineal positiva fuerte

$\overline{x} = 4{,}75$; $\overline{y} = 4{,}56$

Recta de regresión: $y = 0{,}93x + 0{,}15$

Coeficiente de correlación lineal: $r = 0{,}94$

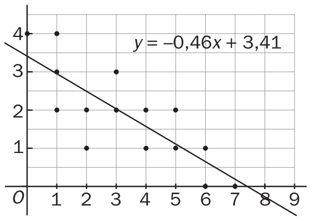


ii) Relación lineal negativa fuerte

$\overline{x} = 3{,}33$; $\overline{y} = 1{,}87$

Recta de regresión: $y = -0{,}46x + 3{,}41$

Coeficiente de correlación lineal: $r = -0{,}80$



4. a) $\overline{x} = 3{,}5$; $\overline{y} = 14{,}83$; $s_x = 1{,}71$; $s_y = 1{,}86$

b) $s_{xy} = 2{,}75$; $r = 0{,}86$

c) Recta de regresión de las ventas sobre el gasto en publicidad: $y = 0{,}94x + 11{,}53$

d) Para un gasto en publicidad de 8000 €, las ventas esperadas serían de 19000 € aproximadamente. Esta estimación es fiable, ya que el coeficiente de correlación es próximo a 1 y el valor de x no está muy alejado de los utilizados en el ajuste.

5. a) $\overline{x} = 5$: $\overline{y} = 5{,}56$; $s_x = 2{,}58$; $s_y = 1{,}95$; $s_{xy} = 4{,}33$

El coeficiente de correlación lineal es $r = 0{,}86$; la relación entre las variables es positiva y fuerte.

b) Recta de regresión de y sobre x: $y = 0{,}65x + 2{,}31$

Recta de regresión de x sobre y: $x = 1{,}14y - 1{,}33$

6. a)

y \ x	5	6	7	8	9
1	6	1	3	0	0
2	0	4	2	2	0
3	0	0	1	0	5

b) $\overline{x} = 6{,}79$; $\overline{y} = 1{,}83$; $s_x = 1{,}44$; $s_y = 0{,}8$; $s_{xy} = 0{,}92$

El coeficiente de correlación lineal es $r = 0{,}801$; la relación entre las variables es positiva y bastante fuerte, por lo que las estimaciones que realicemos con la recta de regresión tendrán un buen grado de fiabilidad.

c) La recta de regresión de y sobre x es:

$y = 0{,}444x - 1{,}18$

d) El valor que obtendríamos al estimar y sustituyendo $x = 10$ en la recta de regresión es $y = 3{,}26$; la estimación es buena, ya que el coeficiente de correlación es próximo a 1.

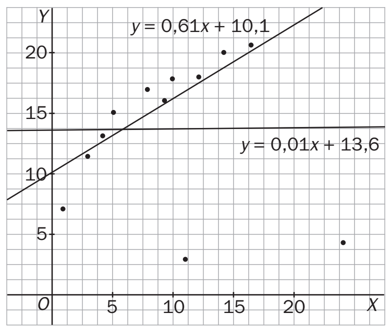
7. a) Como el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ pertenece a ambas rectas de regresión, es la solución del sistema

$\begin{cases} 4\overline{y} + \overline{x} - 6 = 0 \\ \overline{y} + 2\overline{x} - 5 = 0 \end{cases}$. Por tanto, $(\overline{x}, \overline{y}) = (2, 1)$

b) Las rectas de regresión vienen dadas por $y - 1 = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2} \cdot (x - 2)$ e $x - 2 = \dfrac{s_{xy}}{s_y^2} \cdot (y - 1)$. Por tanto, el producto $\dfrac{s_{xy}}{s_x^2} \cdot \dfrac{s_{xy}}{s_y^2}$ es igual a r^2. En nuestro caso resulta $r^2 = -\dfrac{1}{4} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{8}$. Como las pendientes son negativas, la covarianza es negativa, y también lo es el coeficiente de regresión, por lo que

$r = -\sqrt{\dfrac{1}{8}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

8. Hay dos puntos, (11, 3) y (23, 4), que se alejan mucho de la nube que forman los demás puntos. Por tanto, el ajuste será mejor con la recta de Tukey que con la recta de regresión.



Recta de regresión: $y = 0{,}01x + 13{,}6$

Recta de Tukey: $y = 0{,}61x + 10{,}1$

Si $x = 6$, entonces $y = 13{,}76$.

Se puede observar que en las proximidades de $x = 6$, las dos rectas son parecidas, pero al tomar valores de x más alejados, los pronósticos son muy diferentes y mucho mejores en la recta de Tukey.

Soluciones propuesta B

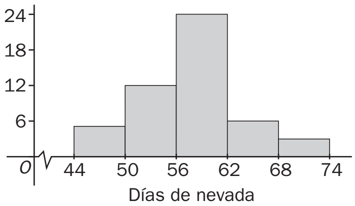
1. a) $\bar{x} = 5$; $M = 5$; $s_x^2 = 6$; $s_x = 2{,}45$

b) $\bar{x} = 24{,}67$; $M = 25$; $s_x^2 = 6{,}44$; $s_x = 2{,}54$

2. a) Marcas de clase: 47, 53, 59, 65, 71

Media: $\bar{x} = 58{,}8$ días

b)



c) $\dfrac{5}{50} \cdot 100 = 10\%$

3. a) $\bar{x} = 5{,}273$; $\bar{y} = 4{,}364$; $s_x = 2{,}988$; $s_y = 2{,}422$; $s_{xy} = 2{,}537$. El coeficiente de correlación lineal es $r = 0{,}351$.

b) La recta de regresión de y sobre x es: $y = 0{,}284x + 2{,}865$.

c) La correlación es demasiado débil para que se pueda usar la recta de regresión para hacer estimaciones fiables.

4. a) $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \dfrac{2{,}25}{\sqrt{2{,}5} \cdot \sqrt{2{,}5}} = 0{,}9$

b) $y - \bar{y} = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2} \cdot (x - \bar{x}) \rightarrow y - 3 = \dfrac{2{,}25}{2{,}5} \cdot (x - 3) \rightarrow$

$\rightarrow y = 0{,}9x + 0{,}3$

Para $x = 2$ obtenemos el valor $y = 2{,}1$.

c) $x - \bar{x} = \dfrac{s_{xy}}{s_y^2} \cdot (y - \bar{y}) \rightarrow x - 3 = \dfrac{2{,}25}{2{,}5} \cdot (y - 3) \rightarrow$

$\rightarrow x = 0{,}9y + 0{,}3$

Las dos rectas de regresión tienen la misma forma, ya que las variables marginales tienen la misma media y la misma varianza.

Para $y = 6$ obtenemos el valor $x = 5{,}7$.

d) Los valores estimados mediante las rectas de regresión tienen un alto grado de fiabilidad, ya que la correlación lineal es fuerte por ser el coeficiente de correlación 0,9.

5. $\bar{x} = 29{,}85$; $\bar{y} = 21{,}06$; $s_x = 10{,}48$; $s_y = 12{,}78$; $s_{xy} = 110{,}01$

a) $y = 1{,}001x - 8{,}838$. Se espera una puntuación de 23,22.

b) $x = 0{,}674y + 15{,}658$. La puntuación esperada es de 28,46.

c) El grado de fiabilidad de las predicciones es alto, puesto que el coeficiente de correlación es $r = 0{,}82$.

6. a) Hay una correlación fuerte y negativa, es decir, a mayor número de horas, menor número de suspensos.

$\bar{x} = 2{,}42$ suspensos; $\bar{y} = 5{,}12$ horas; $s_x = 1{,}834$; $s_y = 2{,}783$; $s_{xy} = -4{,}33$; $r = -0{,}85$

b) La recta de regresión es

$x - \bar{x} = \dfrac{s_{xy}}{s_y^2}(y - \bar{y}) \rightarrow x - 2{,}42 = \dfrac{-4{,}33}{(2{,}783)^2}(y - 5{,}12)$,

y para $y = 5 \rightarrow x = 2{,}49$, es decir, estudia alrededor de dos horas y media a la semana.

7. $\bar{x} = 3$; $\bar{y} = 64$; $s_x = 1{,}41$; $s_y = 21{,}54$; $s_{xy} = -30$; $r = -0{,}985$

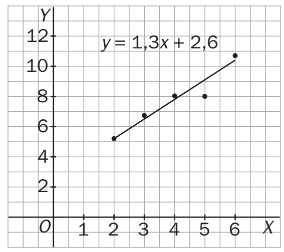
a) $y = -15x + 109$.

El grado de humedad esperado es del 4%.

b) $x = -0{,}064y + 7{,}138$.

Han de transcurrir 3,9 días, es decir, algo menos de 94 horas.

8. a)



b)

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
	2	5	4	25	10
	3	7	9	49	21
	4	8	16	64	32
	5	8	25	64	40
	6	11	36	121	66
sumas	20	39	90	323	169

$\bar{x} = \dfrac{20}{5} = 4$;

$\bar{y} = \dfrac{39}{5} = 7{,}8$:

$x_x^2 = \dfrac{90}{5} - 4^2 = 2$;

$s_y^2 = \dfrac{323}{5} - 7{,}8^2 = 3{,}76$

$s_x = 1{,}41$; $s_y = 1{,}94$

$s_{xy} = \dfrac{169}{5} - 4 \cdot 7{,}8 = 2{,}6$;

$r = \dfrac{2{,}6}{1{,}41 \cdot 1{,}94} = 0{,}95$

c) $y - \bar{y} = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2} \cdot (x - \bar{x}) \rightarrow y = 1{,}3x + 2{,}6$

d) El coeficiente de determinación es $r^2 = 0{,}90$.

Por tanto, el ajuste lineal se puede calificar de muy bueno.

14 Combinatoria

Propuesta A

1. Calcula el valor de:

a) $C_{8,\,2}$ b) $V_{6,\,3}$ c) $VR_{7,\,2}$ d) $PR_{10}^{2,\,2,\,6}$

2. ¿Cuántos números de dos cifras distintas se pueden formar con las cifras 2, 3 y 5?

Representa el diagrama en árbol para formar todos los resultados posibles.

3. ¿Cuántos productos de dos factores distintos se pueden formar con las cifras 2, 3 y 5?

4. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $V_{x,\,5} = 6 \cdot V_{x,\,3}$ b) $2 \cdot C_{x,\,4} = 5 \cdot C_{x,\,2}$ c) $V_{x\,+\,1,\,2} + V_{x,\,2} + V_{x\,-\,1,\,2} = 20$

5. Dados 10 puntos en un plano de modo que tres cualesquiera de ellos no estén situados en línea recta, ¿cuántos cuadriláteros diferentes podrán formarse?

6. Lanzamos una moneda al aire 12 veces. Supongamos que siete veces sale "cara" y las cinco restantes sale "cruz". ¿De cuántas maneras distintas podemos obtener este resultado?

7. En una caja hay una bola blanca, dos rojas, tres verdes y nueve negras. Si extraemos todas las bolas de una en una, ¿cuántas ordenaciones de colores podemos obtener?

8. Con las letras de la palabra ORDENADOR:

a) ¿Cuántas palabras distintas pueden formarse?

b) ¿Cuántas de ellas tienen las dos D juntas?

c) ¿Cuántas empiezan por RR?

9. Halla los valores de m y n sabiendo que $V_{m,\,n} = 272$ y $C_{m,\,n} = 136$.

10. Comprueba que $n \cdot \binom{m}{n} = m \cdot \binom{m-1}{n-1}$.

11. Si colocamos en orden alfabético todas las palabras con o sin sentido que podemos formar permutando las letras ABCDE:

a) ¿Qué lugar ocupa la palabra CADBE?

b) ¿Qué palabra ocupa el lugar 90?

12. En una plantación de maíz hay 10 puntos de riego automático que se pueden activar independientemente. Determina de cuántas maneras distintas puede regarse la plantación si:

a) Deben activarse exactamente seis puntos de riego.

b) Deben activarse al menos seis puntos de riego.

c) Como máximo pueden estar activados tres puntos de riego.

13. ¿De cuántas maneras puede pintarse una cuadrícula como la de la figura si:

a) Cada casilla puede ser blanca o negra, indistintamente.

b) Debe haber 5 casillas blancas y 4 negras.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Propuesta B

1. Calcula el valor de:

a) $C_{8,\,6}$ b) $V_{7,\,3}$ c) $VR_{2,\,7}$ d) $PR_9^{2,\,3,\,4}$

2. ¿Cuántos números de dos cifras, iguales o distintas, se pueden formar con las cifras 2, 3 y 5? Representa el diagrama en árbol para formar todos los resultados posibles.

3. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\dfrac{4! + 5!}{3! \cdot 4!}$ b) $\dfrac{m!}{(m - 2)!}$ c) $\dfrac{6! \cdot 8!}{7! \cdot 9!}$

4. ¿De cuántas maneras pueden viajar cinco personas en un coche si solo dos de ellas saben conducir?

5. Con las cinco vocales, ¿cuántas palabras de cuatro letras pueden formarse si queremos que, al igual que AEEA, sean simétricas? ¿Cuántas palabras de este tipo podemos formar si queremos que tengan cinco letras?

6. Con los números 2, 3, 5, 7, 11 y 13:

a) ¿Cuántos productos distintos de cuatro factores podemos obtener?

b) ¿Cuántos de ellos acaban en 0?

7. Calcula el valor de x sabiendo que $V_{x,\,5} = 360\,360$ y $V_{x,\,3} = 2730$.

8. ¿Qué relación existe entre m y n si se verifica la igualdad: $\dbinom{m}{n} = 2 \cdot \dbinom{m-1}{n}$?

9. Con nueve personas tenemos que formar tres comisiones, una de dos, otra de tres y la última de cuatro personas. ¿De cuántas maneras distintas podemos hacerlo?

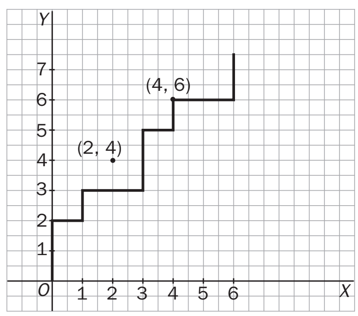
10. Queremos ordenar en un estante cinco novelas, cuatro libros de arte y seis de cocina. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo si los libros del mismo tema deben estar juntos?

11. Observa el gráfico siguiente.

a) ¿Cuántos caminos distintos podemos trazar si partimos del punto (0, 0) y queremos llegar al punto (6, 7), y los únicos movimientos válidos son avanzar por la cuadrícula hacia la derecha y hacia arriba como en el camino señalado?

b) ¿Cuántos de ellos pasan por el punto (2, 4)?

c) ¿Cuántos de ellos pasan por los puntos (2, 4) y (4, 6)?



12. ¿Cuántas palabras de cinco letras se pueden formar con siete consonantes y tres vocales de manera que cada una empiece por consonante, tenga al menos dos vocales y sean todas las letras distintas?

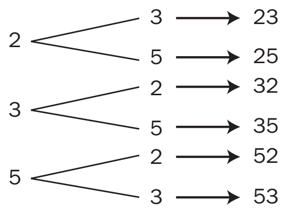
13. En una papelería han llenado una caja con restos de bolígrafos, rotuladores y lapiceros. En un cartel anuncian la siguiente oferta: “20 unidades por 5 euros”. ¿Cuántos lotes diferentes se podrán escoger suponiendo que solo hay un tipo de bolígrafo, otro de rotulador y otro de lapicero?

1. a) $C_{8,\,2} = \dfrac{8!}{6!\cdot 2!} = 28$ c) $VR_{7,\,2} = 7^2 = 49$

b) $V_{6,\,3} = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$ d) $PR_{10}^{2,\,2,\,6} = \dfrac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 6!} = 1260$

2. No intervienen todos los números, influye el orden y no hay repeticiones:

$V_{3,\,2} = 3\cdot 2 = 6$ números distintos.



3. No intervienen todos los números y no influye el orden:

$C_{3,\,2} = \dfrac{V_{3,\,2}}{P_2} = 3$ productos distintos.

4. a) $V_{x,\,5} = 6\,V_{x,\,3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) =$
$= 6x(x-1)(x-2)$

Como $x > 5 \Rightarrow (x-3)(x-4) = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 7x + 8 = 0 \Rightarrow x = 6$

(la solución $x = 1$ no es válida).

b) $2C_{x,\,4} = 5C_{x,\,2} \Rightarrow 2\dfrac{x!}{(x-4)!\cdot 4!} = 5\dfrac{x!}{(x-2)!\cdot 2!}$

Simplificando: $x^2 - 5x - 24 = 0 \Rightarrow x = 8$

(la solución $x = -3$ no es válida).

c) $V_{x+1,\,2} + V_{x,\,2} + V_{x-1,\,2} = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)x + x(x-1) + (x-1)(x-2) = 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

(la solución $x = -2$ no es válida).

5. Al no haber tres puntos alineados, cuatro de ellos determinan un cuadrilátero. El número total de cuadriláteros será $C_{10,\,4} = \dfrac{10!}{6!\cdot 4!} = 210$.

6. Son 12 elementos de los cuales hay 7 y 5 repetidos:

$P_{12}^{7,\,5} = \dfrac{12!}{7!\cdot 5!} = 792$ maneras distintas.

7. Tenemos 15 elementos entre los cuales hay 2, 3 y 9 repetidos. El número total de ordenaciones de color será

$P_{15}^{1,\,2,\,3,\,9} = \dfrac{15!}{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 9} = 300\,300.$

8. a) Influye el orden y hay letras repetidas:

$P_9^{1,1,1,2,2,2} = \dfrac{9!}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = 45\,360$ palabras.

b) Consideramos DD como una sola letra:

$P_8^{1,1,1,1,2,2} = \dfrac{8!}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 2!} = 10\,080$ palabras.

c) Permutamos las 7 letras restantes:

$P_7^{1,\,1,\,1,\,2,\,2} = \dfrac{7!}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 2!} = 1260$ palabras.

9. Como

$C_{m,\,n} = \dfrac{V_{m,\,n}}{P_n} \Rightarrow 136 = \dfrac{272}{P_n} \Rightarrow P_n = 2 \Rightarrow n = 2.$

Sustituyendo:

$V_{m,\,2} = m(m-1) = 272 \Rightarrow m^2 - m - 272 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 17$

(la solución $m = -16$ no es válida).

10. Desarrollando las dos expresiones llegamos a resultados idénticos:

$n\cdot\dbinom{m}{n} = n\dfrac{m!}{(m-n)!\,n!} = \dfrac{m!}{(m-n)!\,(n-1)!}$

$m\cdot\dbinom{m-1}{n-1} = m\dfrac{(m-1)!}{(m-1-(n-1)!\,(n-1)!} =$

$= \dfrac{m!}{(m-n)!\,(n-1)!}$

11. El número total de palabras será igual a las permutaciones de 5: $P_5 = 5! = 120$.

a) Empiezan por A las palabras que se obtienen al permutar entre sí las otras cuatro letras, esto es, $P_4 = 4! = 24$. Por la misma razón, empiezan por B: $P_4 = 4! = 24$, y por CAB: $P_2 = 2! = 2$, ya que en este caso solo podemos permutar dos de las cinco letras, al estar las otras tres fijas.

La siguiente es la permutación CADBE, que, por tanto, ocupa el lugar $24 + 24 + 2 + 1 = 51$.

b) Empiezan por A 24 letras; por B, otras 24, y por C, 24 más. En total hay $24\cdot 3 = 72$ palabras anteriores a las que empiezan por D.

Empiezan por DA: $P_3 = 3! = 6$. Empiezan por DB otras 6, y por DC, 6 más. Así, hay $72 + 6\cdot 3 = 90$ permutaciones anteriores a las permutaciones que comienzan por DE.

La permutación buscada es la última de las que comienzan por DC: DCEBA.

12. a) No importa el orden en que se activen:

$C_{10,\,6} = 210$

b) Podemos activar 6, 7, 8, 9 ó 10 puntos de riego:

$C_{10,\,6} + C_{10,\,7} + C_{10,\,8} + C_{10,\,9} + C_{10,\,10} = 386$

c) Podemos activar 3, 2, 1 o ningún punto de riego:

$C_{10,\,3} + C_{10,\,3} + C_{10,\,1} + 1 = 176$

13. a) En cada casilla podemos elegir entre dos posibilidades, Blanco o Negro,

$VR_{2,9} = 2^9 = 512.$

b) De las 9 casillas, elegimos 5 para el Blanco.

$C_{9,\,5} = \dfrac{9!}{(9-5)!\cdot 5!} = 126$

(las restantes son negras).

Soluciones propuesta B

1. a) $C_{8,\,2} = \dfrac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$ c) $VR_{2,\,7} = 2^7 = 128$

b) $V_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ d) $PR_9^{2,\,3,\,4} = \dfrac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 1260$

2. No intervienen todos los números, influye el orden y puede haber repeticiones:

$VR_{3,\,2} = 3^2 = 9$ números distintos.

$2 \to 2 \to 22$; $2 \to 3 \to 23$; $2 \to 5 \to 25$
$3 \to 2 \to 32$; $3 \to 3 \to 33$; $3 \to 5 \to 35$
$5 \to 2 \to 52$; $5 \to 3 \to 53$; $5 \to 5 \to 55$

3. a) $\dfrac{4! + 5!}{3! \cdot 4!} = \dfrac{4! + 5 \cdot 4!}{3! \cdot 4!} = \dfrac{1 + 5}{3!} = 1$

b) $\dfrac{m!}{(m - 2)!} = \dfrac{m\,(m - 1)\,(m - 2)!}{(m - 2)!} = m^2 - m$

c) $\dfrac{6! \cdot 8!}{7! \cdot 9!} = \dfrac{6! \cdot 8!}{7 \cdot 6! \cdot 9 \cdot 8!} = \dfrac{1}{63}$

4. Podemos elegir al conductor de dos maneras, y para cada una de ellas, las restantes personas se pueden colocar de P_4 formas. Por tanto, serán:

$2P_4 = 2 \cdot 4! = 48$ maneras posibles.

5. Con cuatro letras: elegimos las dos primeras, ya que las dos últimas quedan fijadas por la primera elección. Las dos primeras letras pueden ser cualesquiera de las cinco vocales, se pueden repetir, y el orden, obviamente, importa:

$$VR_{5,\,2} = 5^2 = 25$$

Con cinco letras: en cada una de las palabras de cuatro letras tenemos 5 posibilidades para añadir una letra central:

$$5 \cdot VR_{5,\,2} = 5 \cdot 5^2 = 125$$

3. a) No influye el orden: $C_{6,\,4} = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ productos.

b) Los que contengan al 2 y al 5: $C_{4,\,2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$.

7. $V_{x,\,5} = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ y
$V_{x,\,3} = x(x - 1)(x - 2)$

Calculando el cociente y simplificando, ya que x debe ser mayor que 5:

$\dfrac{V_{x,\,5}}{V_{x,\,3}} = (x - 3)(x - 4) = \dfrac{360\,360}{2730} = 132 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 7x - 120 = 0 \Rightarrow x = 15$
(la solución $x = -8$ no es válida).

8. $\dbinom{m}{n} = 2 \cdot \dbinom{m-1}{n} \Rightarrow \dfrac{m!}{(m - n)!\,n!} =$
$= 2\dfrac{(m - 1)!}{(m - 1 - n)!\,n!}$.

Simplificando esta igualdad obtenemos

$\dfrac{m}{m - n} = 2 \Rightarrow m = 2n$.

9. Para formar la comisión de dos personas hay $C_{9,2}$ posibilidades.

Para cada una de estas posibles comisiones hay $C_{7,3}$ maneras de elegir la comisión de tres personas.

Elegidas las dos primeras comisiones, la tercera queda automáticamente fijada, con lo que en total hay $C_{9,\,2} \cdot C_{7,\,3} = \dfrac{9!}{7! \cdot 2!} \cdot \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = 1260$ formas de elegir las tres comisiones.

10. Para decidir la colocación de los tres tipos de libros tenemos $P_3 = 3!$ posibilidades. En cada una de estas ordenaciones tenemos $P_5 = 5!$ maneras de colocar las novelas, $P_4 = 4!$ de colocar los libros de arte y $P_6 = 6!$ de colocar los libros de cocina.

En total hay $P_3 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_6 = 3! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 6! =$
$= 12\,441\,600$ maneras de colocar los libros.

11. a) Para llegar de (0, 0) a (6, 7) hay que avanzar 6 a la derecha (D) y 7 hacia arriba (A).

$P_{13}^{6,\,7} = \dfrac{13!}{6! \cdot 7!} = 1716$ caminos

b) De (0, 0) a (2, 4) hay que avanzar 2D y 4A $\Rightarrow$ $\Rightarrow P_6^{2,\,4}$ caminos. De (2, 4) a (6, 7) hay que avanzar 4D y 3A $\Rightarrow P_7^{4,\,3}$ caminos.

En total habrá

$P_6^{2,\,4} \cdot P_7^{4,\,3} = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = 525$ caminos.

c) De (0, 0) a (2, 4) hay que avanzar 2D y 4A $\Rightarrow$ $\Rightarrow P_6^{2,\,4}$ caminos. De (2, 4) a (4, 6) hay que avanzar 2D y 2A $\Rightarrow P_4^{2,\,2}$ caminos.

De (4, 6) a (6, 7) hay que avanzar 2D y 1A $\Rightarrow$ $\Rightarrow P_3^{2,\,1}$ caminos.

En total hay

$P_6^{2,\,4} \cdot P_4^{2,\,2} \cdot P_3^{2,\,1} = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \dfrac{3!}{2! \cdot 1!} =$

$= 270$ caminos.

12. La primera letra podemos elegirla de 7 maneras. Las cuatro letras restantes pueden ser: dos vocales y dos consonantes: $V_{3,\,2} \cdot V_{6,\,2}$, o tres vocales y una consonante: $P_3 \cdot 6$.

El número total de palabras será:

$7(V_{3,\,2} \cdot V_{6,\,2} + P_3 \cdot 6) =$
$= 7(3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \cdot 6) = 1512$

13. Cada lote se diferenciará de los demás en que tenga algún elemento distinto, pero el orden de los elementos en el lote no es importante; por tanto, se trata de calcular las combinaciones con repetición de 3 elementos tomados de 20 en 20.

$CR_{3,\,20} = \dfrac{(3 + 20 - 1)!}{20!(3 - 1)!} = \dfrac{22!}{20! \cdot 2!} = \dfrac{22 \cdot 21}{2} =$

$= 231$ lotes distintos.

15 Probabilidad

Propuesta A

1. En el experimento aleatorio cuyo espacio muestral es $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ se consideran los siguientes sucesos: $A = \{b, e, f\}$, $B = \{a, c, d, e\}$ y $C = \{d, e, f\}$. Calcula los sucesos siguientes.

a) $\overline{A}$ d) $A \cap C$ g) $\overline{A} \cap \overline{B}$ j) $\overline{A \cap B}$ m) $A \cap (B \cup \overline{C})$

b) $\overline{B}$ e) $A \cup B$ h) $B \cup C$ k) $\overline{A} \cup \overline{B}$ n) $\overline{A} \cap (B \cap C)$

c) $\overline{C}$ f) $\overline{A \cup B}$ i) $A \cup (B \cap C)$ l) $A \cup (B \cap \overline{C})$ ñ) $(\overline{A \cap B}) \cap C$

2. En una bolsa hay cuatro bolas blancas y tres negras. Calcula la probabilidad de que al sacar tres bolas, simultáneamente:

a) Sean las tres blancas. b) No haya ninguna bola blanca. c) Haya una única bola blanca.

3. Un experimento consiste en extraer una bola de una bolsa que contiene tres bolas blancas, dos azules y una roja. Sobre el espacio muestral $E = \{b, a, r\}$ de sucesos de este experimento se define una función p del siguiente modo.

$p(\Phi) = 0$ $p(\{a\}) = \frac{1}{3}$ $p(\{b, a\}) = \frac{5}{6}$ $p(\{a, r\}) = \frac{1}{2}$

$p(\{b\}) = \frac{1}{2}$ $p(\{r\}) = \frac{1}{6}$ $p(\{b, r\}) = \frac{1}{3}$ $p(E) = 1$

Comprueba si la función p así definida es una probabilidad.

4. Halla la probabilidad de un suceso sabiendo que la suma de su cuadrado y del doble de la probabilidad de su suceso contrario es $\frac{13}{9}$.

5. Se lanzan tres dados. Halla las probabilidades de los siguientes resultados.

a) La suma de los puntos obtenidos es 5.

b) La suma de los puntos obtenidos es múltiplo de 5.

c) La suma de los puntos obtenidos es menor que 5.

6. De una baraja española de 40 cartas se extraen dos a la vez. Halla la probabilidad de que:

a) Sean dos copas.

b) Sean dos reyes.

c) Sean un rey y un as.

d) Sean el as de copas y el de bastos.

7. De una bolsa que contiene 6 bolas blancas y 4 negras se extraen 3 bolas. Halla la probabilidad de que sean 2 bolas blancas y 1 negra si:

a) Se extraen las 3 bolas a la vez.

b) Se extrae 1 bola, se anota su color y se devuelve a la bolsa antes de la siguiente extracción.

8. Un examen está compuesto por 8 preguntas, con 4 respuestas posibles cada una, de las cuales solo una es correcta. Uno de los estudiantes que realizan el examen responde al azar a cada pregunta.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente al menos siete preguntas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no acierte ninguna?

9. En una fábrica de bombillas hay tres máquinas A, B y C que realizan, respectivamente, el 50%, el 30% y el 20% de la producción. Los porcentajes de productos defectuosos por cada una de esas máquinas son, respectivamente, el 3%, el 4% y el 5%. Se elige una bombilla al azar ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

10. Sobre la mesa tengo tres cajas con botones; la primera tiene 5 botones; la segunda, 7, y la tercera, 8, pero en cada una de ellas hay un único botón negro. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea negro?

b) Si he sacado un botón negro, ¿cuál es la probabilidad de que sea el de la primera caja?

11. La urna A contiene 4 bolas blancas y 2 negras, y en la urna B hay 2 bolas blancas y 5 negras. Se toma al azar una bola de A y, sin mirarla, se introduce en B. A continuación se extraen sin reemplazamiento dos bolas de la urna B.

a) Calcula la probabilidad de que ambas bolas sean blancas

b) Calcula la probabilidad de que una bola sea blanca y otra negra.

c) Si resulta que hemos extraído dos bolas blancas de la urna B, ¿cuál es la probabilidad de que la bola que pasamos de A a B fuera negra?

Propuesta B

1. En el experimento aleatorio que consiste en extraer una carta de una baraja se consideran los siguientes sucesos: A = "salir espada", B = "salir caballo" y C = "salir as de espadas o caballo de copas".

Interpreta los siguientes sucesos y calcula su probabilidad:

a) $A \cup B$ b) $B \cup C$ c) $A \cap B$ d) $A \cap C$

2. A y B son dos sucesos de un experimento aleatorio de los que se conoce $P(A) = \frac{4}{9}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$.
Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) $\overline{A}$ c) $A \cup B$ e) $\overline{A} \cup \overline{B}$

b) $\overline{B}$ d) $\overline{A} \cap \overline{B}$ f) $\overline{A} \cup B$

3. Sea $E = \{a, b, c\}$ el espacio muestral de un experimento aleatorio y p una función de probabilidad definida sobre el espacio de sucesos asociado a E del siguiente modo.

$p(\{a\}) = \frac{1}{6}$ $p(\{b\}) = \frac{1}{3}$ $p(\{c\}) = \frac{1}{2}$

Se consideran los sucesos $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$. Calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(A)$ c) $P(A \cup B)$ e) $P(A \cap \overline{B})$

b) $P(B)$ d) $P(A \cap B)$ f) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

4. Una urna contiene bolas numeradas como muestra el siguiente esquema. Se extrae una bola. Determina la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) Extraer un 2. d) Extraer un número par.

b) Extraer un 5. e) Obtener un número impar.

c) No obtener un 3. f) Obtener un número mayor que 3.

1	1	1	1	2	3
4	2	2	2	4	3
4	5	5	0	0	0

5. En un centro de investigación genética, el 55% de los investigadores son médicos; el 55%, biólogos, y el 20% tiene ambas especialidades. Si se selecciona un investigador al azar, halla la probabilidad de que:

a) Sea médico o biólogo.

b) Sea médico, pero no biólogo.

c) Tenga una especialidad distinta a las anteriores.

6. En una gran ciudad se elige un automóvil al azar y se anota su número de matrícula, que está formado por cuatro cifras escogidas del 0 al 9. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) Las cuatro cifras son diferentes. d) Tiene exactamente tres cifras iguales.

b) Solo tiene dos cifras iguales. e) Todas las cifras son iguales.

c) Tiene dos pares de cifras iguales. f) La matrícula empieza y termina por 0.

7. A y B son dos sucesos de un experimento aleatorio. Sabiendo que $P(A) = 0{,}3$, $P(\overline{B}) = 0{,}6$ y $P(A/B) = 0{,}32$, halla:

a) $P(A \cap B)$ b) $P(A \cup B)$ c) $P(A/\overline{B})$ d) $P(B/A)$ e) $P(\overline{A \cup B})$

8. Un juego consiste en lo siguiente: se extrae una carta de una baraja de 40 cartas, se observa su valor y se vuelve a introducir en la baraja. Se realiza esta extracción 10 veces. Gana el jugador que haya extraído exactamente cinco figuras no necesariamente iguales. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el juego?

9. Una urna A contiene una bola azul y tres rojas. Otra urna B tiene cinco bolas azules y tres rojas. Se extrae al azar una bola de A y se introduce en B. Finalmente se saca una bola de la urna B.

a) Indica los cuatro resultados posibles y calcula la probabilidad de cada uno.

b) Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna A sea azul si hemos sacado de B una bola roja.

10. Para detectar la incidencia de una enfermedad en una población se aplica una prueba de la que se conoce que 1 de cada 10 000 personas en las que el resultado da negativo padece la enfermedad y 1 de cada 100 en las que la prueba resulta positiva no la padece. Si el porcentaje de resultados positivos fue del 1%, ¿cuál es la probabilidad de que la prueba dé positivo en una persona que padece la enfermedad?

11. Se tienen dos dados, uno normal y otro trucado en el que hay 4 unos y 2 doses. Se elige un dado al azar y se tira dos veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1 en la primera tirada y 2 en la segunda?

b) Sabiendo que el resultado de la primera tirada ha sido 1 y el de la segunda 2, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos escogido el dado trucado?

1. a) $\overline{A} = \{a, c, d\}$

b) $\overline{B} = \{b, f\}$

c) $\overline{C} = \{a, b, c\}$

d) $A \cap C = \{e, f\}$

e) $A \cup B = E$

f) $\overline{A \cup B} = \Phi$

g) $\overline{A} \cap \overline{B} = \Phi$

h) $B \cup C = \{a, c, d, e, f\}$

i) $A \cup (B \cap C) = \{b, d, e, f\}$

j) $\overline{A \cap B} = \{a, b, c, d, f\}$

k) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{a, b, c, d, f\}$

l) $A \cup (B \cap \overline{C}) = \{a, b, c, e, f\}$

m) $A \cap (B \cup \overline{C}) = \{b, e\}$

n) $\overline{A} \cap (B \cap C) = \{d\}$

ñ) $(\overline{A \cap B}) \cap C = \{d, f\}$

2. a) $P(\text{sean las tres blancas}) = \dfrac{C_{4,3}}{C_{7,3}} = \dfrac{4}{35}$

b) $P(\text{no haya ninguna bola blanca}) =$

$= P(\text{las tres sean negras}) = \dfrac{1}{C_{7,3}} = \dfrac{1}{35}$

c) $P(\text{haya una única bola blanca}) = \dfrac{4 \cdot C_{3,2}}{C_{7,3}} = \dfrac{12}{35}$

3. No es una probabilidad. $\{b, r\} = \{b\} \cup \{r\}$ es unión de dos sucesos incompatibles, pero $p(\{b, r\}) = \dfrac{1}{3}$ mientras que, por el tercer axioma, debería ser

$p(\{b, r\}) = p(\{b\} \cup \{r\}) = p(\{b\}) + p(\{r\}) =$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$

4. $p^2 + 2(1 - p) = \dfrac{13}{9} \Rightarrow 9p^2 - 18p + 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{1}{3} \\ p = \dfrac{5}{3} > 1 \text{ No es válido} \end{cases}$

5. a) $P(\text{suma } 5) = \dfrac{6}{6^3} = \dfrac{1}{36}$

b) $P(\text{suma múltiplo de } 5) = \dfrac{6 + 27 + 10}{6^3} = \dfrac{43}{216}$

c) $P(\text{suma menor que } 5) = \dfrac{4}{216} = \dfrac{1}{54}$

6. a) $P(\text{dos copas}) = \dfrac{C_{10,2}}{C_{40,2}} = \dfrac{3}{52}$

b) $P(\text{dos reyes}) = \dfrac{C_{4,2}}{C_{40,2}} = \dfrac{1}{130}$

c) $P(\text{un rey y un as}) = \dfrac{4 \cdot 4}{C_{40,2}} = \dfrac{5}{195}$

d) $P(\text{as de copas y as de bastos}) = \dfrac{1 \cdot 1}{C_{40,2}} = \dfrac{1}{780}$

7. a) $P = \dfrac{C_{6,2} \cdot C_{4,1}}{C_{10,3}} = \dfrac{1}{2}$ o bien

$P = 3 \cdot \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

b) $P = 3 \cdot \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{4}{10} = \dfrac{54}{125}$

8. A = "acertar la respuesta correcta". $P(A) = 0{,}25$

a) $P(\text{al menos 7 correctas}) =$

$= P(7 \text{ correctas}) + P(8 \text{ correctas}) =$

$= 8 \cdot [p(A)]^7 \cdot [1 - p(A)] + [p(A)]^8 =$

$= 8 \cdot (0{,}25)^7 \cdot 0{,}75 + (0{,}25)^8 = 0{,}00038147$

b) $P(\text{no acertar ninguna}) = (0{,}75)^8 \approx 0{,}1$

9. D = "bombilla defectuosa".

Conocemos:

$p(A) = \dfrac{50}{100},\ p(B) = \dfrac{30}{100},\ p(C) = \dfrac{20}{100},$

$p(D/A) = \dfrac{3}{100},\ p(D/B) = \dfrac{4}{100},\ p(D/C) = \dfrac{5}{100},$

Por el teorema de la probabilidad total:

$p(D) =$

$= p(D/A) \cdot p(A) + p(D/B) \cdot p(B) + p(D/C) \cdot p(C) =$

$= \dfrac{3}{100} \cdot \dfrac{50}{100} + \dfrac{4}{100} \cdot \dfrac{30}{100} + \dfrac{5}{100} \cdot \dfrac{20}{100} =$

$= \dfrac{37}{1000} = 0{,}037$

10. C_i = "elegir la caja i"
N = "sacar un botón negro"

a) $p(N) = p(N/C_1) \cdot p(C_1) + p(N/C_2) \cdot p(C_2) +$

$+ p(N/C_3) \cdot p(C_3) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8}\right) \approx 0{,}156$

b) $p(C_1/N) = \dfrac{p(N/C_1) \cdot p(C_1)}{p(N)} =$

$= \dfrac{\dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8}\right)} \approx 0{,}427$

11. B_A = "extraer bola blanca de A"
N_A = "extraer bola negra de A"

a) B = "las dos bolas son blancas"

$p(B) = p(B/B_A) \cdot p(B_A) + p(B/N_A) \cdot p(N_A) =$

$= \dfrac{C_{3,2}}{C_{8,2}} \cdot \dfrac{4}{6} + \dfrac{1}{C_{8,2}} \cdot \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{12}$

b) S = "una bola es blanca y la otra negra"

$p(S) = p(S/B_A) \cdot p(B_A) + p(S/N_A) \cdot p(N_A) =$

$= \dfrac{3 \cdot 5}{C_{8,2}} \cdot \dfrac{4}{6} + \dfrac{2 \cdot 6}{C_{8,2}} \cdot \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{2}$

c) $P(N_A/B) = \dfrac{p(N_A/B) \cdot p(N_A)}{p(B)} =$

$= \dfrac{\dfrac{2}{8} \cdot \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{2}{6}}{\dfrac{1}{12}} = \dfrac{1}{7}$

Soluciones propuesta B

1. a) $P(A \cup B) = P(\text{“salir espada o caballo”}) = \dfrac{13}{40}$

b) $P(B \cup C) = P(\text{“salir caballo o as de espadas”}) = \dfrac{5}{40}$

c) $P(A \cap B) = P(\text{“salir el caballo de espadas”}) = \dfrac{1}{40}$

d) $P(A \cap C) = P(\text{“salir el as de espadas”}) = \dfrac{1}{40}$

2. a) $P(\overline{A}) = \dfrac{5}{9}$ c) $P(A \cup B) = \dfrac{5}{9}$ e) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \dfrac{7}{9}$

b) $P(\overline{B}) = \dfrac{2}{3}$ d) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{4}{9}$ f) $P(\overline{A} \cup B) = \dfrac{7}{9}$

3. a) $P(A) = \dfrac{1}{2}$ c) $P(A \cup B) = 1$ e) $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{1}{6}$

b) $P(B) = \dfrac{5}{6}$ d) $P(A \cap B) = \dfrac{1}{3}$ f) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0$

4. a) $P(\text{sacar un 2}) = \dfrac{4}{18} = \dfrac{2}{9}$

b) $P(\text{sacar un 5}) = \dfrac{2}{18} = \dfrac{1}{9}$

c) $P(\text{no extraer 3}) = \dfrac{8}{9}$

d) $P(\text{extraer par}) = \dfrac{7}{18}$

e) $P(\text{extraer impar}) = \dfrac{4}{9}$

f) $P(\text{obtener más de 3}) = \dfrac{5}{18}$

5. M = “ser médico”, B = “ser biólogo”.

a) $p(M \cup B) = P(M) + P(B) - p(M \cap B) = \dfrac{90}{100} = 0{,}9$

b) $p(M \cap \overline{B}) = \dfrac{35}{100} = 0{,}35$

c) $p(\overline{M} \cap \overline{B}) = p(\overline{M \cup B}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

6. a) $P(\text{cuatro cifras distintas}) = \dfrac{V_{10,\,4}}{VR_{10,\,4}} = 0{,}504$

b) $P(\text{solo dos cifras iguales}) = \dfrac{10 \cdot C_{9,\,2} \cdot PR_4^{2,\,1,\,1}}{VR_{10,\,4}} =$

$= 0{,}432$

c) $P(\text{iguales dos a dos}) = \dfrac{C_{10,\,2} \cdot PR_4^{2,\,2}}{VR_{10,\,4}} = 0{,}027$

d) $P(\text{exactamente tres iguales}) = \dfrac{2 \cdot C_{10,\,2} \cdot PR_4^{3,\,1}}{VR_{10,\,4}} =$

$= 0{,}036$

e) $P(\text{todas las cifras iguales}) = \dfrac{10}{VR_{10,\,4}} = 0{,}001$

f) $P(\text{empieza y termina por 0}) = \dfrac{VR_{10,\,2}}{VR_{10,\,4}} = 0{,}001$

7. a) $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = 0{,}4 \cdot 0{,}32 = 0{,}128$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}572$

c) $p(A/\overline{B}) = \dfrac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \dfrac{p(A) - p(A \cap B)}{p(\overline{B})} = 0{,}287$

d) $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0{,}128}{0{,}3} = 0{,}427$

e) $p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0{,}572 = 0{,}428$

8. F = “extraer una figura”: $P(F) = \dfrac{12}{40} = \dfrac{3}{10}$.

La probabilidad pedida es $p = C_{10,\,5} \cdot [p(F)]^5\,[1 - p(F)]^5 = 0{,}103$

9. a) A_A: azul de la urna A, A_B: azul de la urna B.

$p(A_A \cap A_B) = P(A_A) \cdot P(A_B/A_A) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{6}{9} = \dfrac{1}{6}$

A_A: azul de la urna A, R_B: roja de la urna B.

$p(A_A \cap R_B) = P(A_A) \cdot P(R_B/A_A) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{12}$

R_A: roja de la urna A, A_B: azul de la urna B.

$p(R_A \cap A_B) = P(R_A) \cdot P(A_B/R_A) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{9} = \dfrac{5}{12}$

R_A: roja de la urna A, R_B: roja de la urna B.

$p(R_A \cap R_B) = P(R_A) \cdot P(R_B/R_A) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{3}$

b) $p(A_A/R_B) =$

$$= \frac{p(R_B/A_A) \cdot p(A_A)}{p(R_B/A_A) \cdot p(A_A) + p(R_B/R_A) \cdot p(R_A)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$$

10. P = “resultado positivo en la prueba”
E = “padecer la enfermedad”

Conocemos $P(E/\overline{P}) = 0{,}0001$, $P(\overline{E}/P) = 0{,}01$, $P(E/P) =$ $= 0{,}99$ y $P(P) = 0{,}01$.

La probabilidad de que una persona a la que se le realizó la prueba esté enferma será:

$P(E) = P(E/P) \cdot P(P) + P(E/\overline{P}) \cdot P(\overline{P}) =$
$= 0{,}99 \cdot 0{,}01 + 0{,}0001 \cdot 0{,}99 = 0{,}009999 \approx 0{,}01$

Por el teorema de Bayes:

$$p(P/E) = \frac{p(E/P) \cdot p(P)}{p(E)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100}}{\frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100} + \frac{1}{10\,000} \cdot \frac{99}{100}} = \frac{100}{101}$$

11. T = “dado trucado”
R = “Obtener un 1 en la 1.ª tirada y un 2 en la 2.ª”

a) $p(R) = p(R/T) \cdot p(T) + p(R/\overline{T}) \cdot p(\overline{T}) =$

$= \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

b) $p(T/R) = \dfrac{p(R/T) \cdot p(T)}{p(R)} = \dfrac{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = \dfrac{8}{9}$

16 Distribuciones de probabilidad

Propuesta A

1. Sea X una variable aleatoria que toma valores en {2, 3, 4, 5, 6} con las siguientes probabilidades.

$P(2) = \frac{1}{15}$ $\quad P(3) = \frac{2}{15}$ $\quad P(4) = \frac{1}{5}$ $\quad P(5) = \frac{4}{15}$ $\quad P(6) = \frac{1}{3}$

a) Comprueba que $p(X)$ es una función de probabilidad y represéntala gráficamente.

b) Calcula la media y la distribución típica de esta distribución.

c) Calcula la probabilidad de $p(X \geqslant 3)$, $p(X \leqslant 4)$ y $p(3 < X < 6)$.

2. De una bolsa que contiene dos bolas rojas, tres negras y una blanca se extrae una bola, se observa su color y se devuelve a la bolsa. Se considera la variable aleatoria X: "número de bolas negras que han salido en un total de 10 extracciones".

a) Calcula la probabilidad de haber extraído exactamente tres bolas negras.

b) Calcula la probabilidad de haber extraído menos de tres bolas negras.

c) ¿Cuál es el número medio de bolas negras que esperaríamos extraer al realizar 10 extracciones?

3. En un juego de dados, el jugador se anota un punto cada vez que, al lanzar dos dados, obtiene un seis doble. Cada partida se juega a cinco lanzamientos.

a) Calcula la probabilidad de no obtener ningún punto en una partida.

b) Calcula la probabilidad de obtener al menos dos puntos en una partida.

4. Según una encuesta, el 40% de la población convive con algún animal doméstico y el resto no tiene ninguna mascota. Elegidas 10 personas al azar, se desea saber:

a) La probabilidad de que las 10 tengan alguna mascota.

b) La probabilidad de que ninguna de las 10 tenga una mascota.

c) La probabilidad de que exactamente la mitad de ellos tenga una mascota.

5. Dos jugadores de ajedrez de igual nivel de destreza en el juego se enfrentan en un torneo. ¿Qué es más probable, ganar dos partidas de cuatro o ganar tres de seis? (Las tablas no se tienen en cuenta.)

6. La función de densidad de una variable aleatoria continua viene definida por $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

a) Calcula la media de la distribución.

b) Obtén el valor de $P(X \geqslant 1)$ y $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$

7. Utiliza la tabla de la distribución $N(0,1)$ para calcular las siguientes probabilidades.

a) $P(Z < 0{,}75)$

b) $P(Z \leqslant -1{,}2)$

c) $P(-0{,}5 \leqslant Z \leqslant 0{,}5)$

d) $P(1 \leqslant Z < 2)$

e) $P(-0{,}8 \leqslant Z \leqslant 1{,}3)$

f) $P(-0{,}85 < Z \leqslant -0{,}3)$

8. El tiempo de hospitalización en una determinada zona sanitaria sigue una distribución normal de media 7 días y desviación típica 3 días.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un enfermo esté menos de cinco días en el hospital?

b) ¿Qué tanto por ciento de los enfermos está hospitalizado más de ocho días?

9. El número diario de visitantes de un parque de atracciones se distribuye según una normal $N(2000, 250)$.

a) Halla la probabilidad de que en un día determinado el número de visitantes no supere los 2100.

b) Calcula la probabilidad de que un día cualquiera los visitantes sean más de 1500.

c) En un mes de 30 días, ¿en cuántos días cabe esperar que el número de visitantes supere los 2210?

d) Si se quieren clasificar los días en tres tipos de manera que los que tengan un número de visitantes en el rango de probabilidades de 0 a 0,15 se consideren "de baja asistencia", los que tengan un número de visitantes en el rango de probabilidades de más de 0,75 sean "de asistencia masiva" y el resto sean "de asistencia normal", ¿cuáles han de ser las cuotas de visitantes que marquen el paso de un tipo a otro?

10. El 40% de los habitantes en edad laboral de una determinada población se emplea en la agricultura. Si elegimos 15 trabajadores al azar de esa población, calcula la probabilidad de que al menos tres de ellos se dediquen a la agricultura, aplicando:

a) La distribución binomial.

b) La aproximación normal a la distribución binomial.

Propuesta B

1. La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada por la siguiente tabla.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	a	0,2	b	0,4	c

Sabiendo que $P(X \leqslant 3) = 0{,}4$ y $P(X \geqslant 3) = 0{,}7$:

a) Completa la distribución de probabilidad hallando los valores de a, b y c.

b) Halla la esperanza matemática y la desviación típica de la distribución.

2. En el experimento consistente en el lanzamiento de dos dados se define la variable aleatoria X: "producto de las puntuaciones resultantes en los dados".

a) Indica los valores que puede tomar esta variable aleatoria.

b) Halla la función de probabilidad de esta distribución y represéntala gráficamente.

c) Calcula la media y la desviación típica de esta distribución de probabilidad.

d) Obtén las siguientes probabilidades: $P(X \leqslant 4)$, $P(X \geqslant 10)$, $P(X \neq 3)$ y $P(4 < X \leqslant 12)$.

3. Una compañía aseguradora comienza una campaña telefónica destinada a aumentar el número de pólizas de seguros del hogar. Por su experiencia previa en este tipo de campañas se sabe que una de cada 20 personas que reciben la llamada suscribe una nueva póliza. Si en un día llaman a 25 personas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no consigan ninguna nueva póliza?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que consigan como máximo dos pólizas nuevas?

4. El 15% de los envases de leche que se venden en un determinado supermercado no tiene adherida la etiqueta con el precio por unidad. Si elegimos al azar 6 envases:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno tenga la etiqueta del precio?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos la mitad estén etiquetados?

5. Una bolsa contiene cuatro bolas numeradas del 0 al 3. En el experimento aleatorio que consiste en extraer dos bolas de la bolsa se definen las variables aleatorias:

X: "máximo valor extraído" Y: "suma de los valores extraídos"

Determina las funciones de probabilidad asociadas a estas variables aleatorias y el valor medio esperado si no se devuelve la primera bola a la bolsa.

6. Calcula el valor de c para que la función $f(x) = \begin{cases} c(4 - 2x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ sea la función de densidad de una variable aleatoria continua y halla el valor de la media.

7. Utiliza la tabla de la distribución $N(0,1)$ para calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(Z < 0{,}83)$

b) $P(Z \leqslant -1{,}25)$

c) $P(-0{,}4 \leqslant Z \leqslant 0{,}4)$

d) $P(-2 \leqslant Z < -1)$

e) $P(-0{,}2 \leqslant Z \leqslant 1{,}4)$

f) $P(-0{,}17 < Z \leqslant 0{,}95)$

8. La duración media de las bombillas de una cierta marca sigue una distribución normal de media 7200 horas y desviación típica 500 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla se funda después de las 8000 horas de uso?

9. Las alturas de los individuos de una población se distribuyen normalmente con media igual a 1,75 m y varianza igual a 64 cm^2. Calcula la probabilidad de que:

a) Un individuo tenga una altura mayor que 180 cm.

b) Un individuo tenga una altura menor que 170 cm.

c) Un individuo tenga una altura comprendida entre 170 y 180 cm.

d) Si se quiere considerar como individuos de "talla especial" a aquellas personas que estén fuera del intervalo central que contiene al 70% de la población, ¿qué alturas determinan esta caracterización?

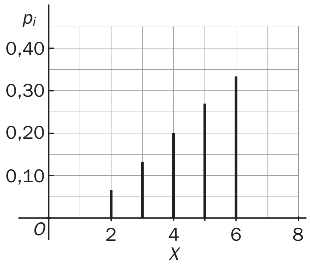
10. Según los resultados de un estudio realizado en una población con escasa asistencia sanitaria, solo un 15% de la población infantil está correctamente vacunada. Se elige al azar una muestra de 50 niños.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de cinco niños que estén correctamente vacunados?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, como máximo, haya seis niños que estén correctamente vacunados?

Soluciones propuesta A

1. a) $p_i \geqslant 0,\ i = 2, \ldots, 6$ y $\sum_{i=2}^{6} p_i = 1$



b) Las calculamos a partir de la tabla:

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$
3	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{5}$
5	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{20}{3}$
6	$\frac{1}{3}$	2	12
		$\frac{14}{3}$	$\frac{70}{3}$

$\mu = 4{,}667$ $\qquad\qquad \sigma = 1{,}247$

c) $P(X \geqslant 3) = 1 - p(2) = \dfrac{14}{15}$

$P(X \leqslant 4) = p(2) + p(3) + p(4) = \dfrac{2}{5}$

$P(3 < X \leqslant 6) = p(4) + p(5) = \dfrac{7}{15}$

2. a) En cada extracción son posibles dos resultados: A: "obtener bola negra" o $\overline{A}$; el resultado de cada extracción es independiente de los anteriores.

La probabilidad de éxito $P(A) = 0{,}5$ es constante. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0{,}5$, $B(10, 0{,}5)$. Así:

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0{,}1172$$

b) $p(X < 3) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 0{,}0547$

c) $\mu = n + p = 10 \cdot 0{,}5 = 5$ bolas negras

3. a) X: "total de puntos". En cada lanzamiento son posibles dos resultados: A: "obtener seis doble, es decir, un punto" o $\overline{A}$; el resultado de cada lanzamiento es independiente de los anteriores; la probabilidad de éxito $P(A) = \dfrac{1}{36}$ es constante. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 5$ y $\dfrac{1}{36}$, $B\left(5; \dfrac{1}{36}\right)$. Así:

$$p(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^0 \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^5 = 0{,}869$$

b) $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0{,}007$

4. X: "número de personas de entre 10 que tienen una mascota" sigue una binomial $B(10; 0{,}4)$.

a) $P(X = 10) = 0{,}0001$

b) $P(X = 0) = 0{,}006$

c) $P(X = 5) = 0{,}201$

5. Al tener la misma capacidad, la probabilidad de ganar una partida es $p = 0{,}5$ para ambos.

Para cuatro partidas, $B(4; 0{,}5)$ y $P(X = 2) = 0{,}375$. Para seis partidas, $B(6; 0{,}5)$ y $P(X = 3) = 0{,}3125$. Por tanto, es más probable ganar 2 de 4 que 3 de 6.

6. a) $\mu = \displaystyle\int_0^2 x\left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{2}{3}$

b) $p(X \geqslant 1) = \displaystyle\int_1^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \left[x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{4}$

c) $p\left(\dfrac{1}{2} < X < \dfrac{3}{2}\right) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \left[x - \frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$

7. a) $P(Z < 0{,}75) = 0{,}7734$

b) $P(Z \leqslant -1{,}2) = 1 - P(Z \leqslant 1{,}2) = 0{,}1151$

c) $P(-0{,}5 \leqslant Z \leqslant 0{,}5) = 2\ P(Z \leqslant 0{,}5) - 1 = 0{,}383$

d) $P(1 \leqslant Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < 1) = 0{,}1359$

e) $P(-0{,}8 \leqslant Z \leqslant 1{,}3) =$
$= P(Z \leqslant 1{,}3) + P(Z \leqslant 0{,}8) - 1 = 0{,}673$

f) $P(-0{,}85 < Z \leqslant -0{,}3) =$
$= P(Z \leqslant 0{,}85) - P(Z \leqslant 0{,}3) = 0{,}1844$

8. X es $N(7{,}3) \rightarrow Z = \dfrac{X - 7}{3}$ es $N(0{,}1)$

a) $P(X < 5) = P\left(Z < \dfrac{5 - 7}{3}\right) = P(Z < -0{,}667) =$
$= 0{,}2524$

b) $P(X > 8) = P\left(Z < \dfrac{8 - 7}{3}\right) = 1 - P(Z < 0{,}333) =$
$= 0{,}3696$

Aproximadamente el 37% de los enfermos.

9. X es $N(2000, 250) \rightarrow Z = \dfrac{X - 2000}{250}$ es $N(0, 1)$

a) $P(X < 2100) = P\left(Z < \dfrac{2100 - 2000}{250}\right) =$
$= P(Z < 0{,}4) = 0{,}6554$

b) $P(X > 1500) = P(Z > -2) = 0{,}9772$

c) $P(X > 2210) = P(Z > 0{,}84) = 0{,}2005$

En 30 días, $30 \cdot 0{,}2005 = 6{,}015 \Rightarrow$ 6 días.

d) Buscamos valores z_1 y z_2 tales que:

$P(Z < z_1) = 0{,}85 \Rightarrow z_1 = -1{,}036 \Rightarrow x_1 = 1741$

$P(Z < z_2) = 0{,}75 \Rightarrow z_2 = 0{,}675 \Rightarrow x_2 = 2169$

Las cuotas deben ser de 1740 y 2170 visitantes.

10. a) $B(15; 0{,}4)$

$P(X \geqslant 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$
$= 0{,}9729$

b) X' es $N(6; 1{,}9)$, $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X < 2{,}5) =$
$= 1 - P(Z \leqslant -1{,}84) = P(Z < 1{,}84) = 0{,}9671$

Valor que es un 0,6% menor que el valor exacto.

Soluciones propuesta B

1. a)

x_i	1	2	3	4	5
p_i	a	0,2	b	0,4	c

$P(X \leqslant 3) = a + 0{,}2 + b = 0{,}4$
$P(X \geqslant 3) = b + 0{,}4 + c = 0{,}7$
$a + 0{,}2 + b + 0{,}4 + c = 1$
Al resolver este sistema se obtiene: $a = b = 0{,}1$; $c = 0{,}2$.

b) Las calculamos a partir de la tabla auxiliar:

x_i	p_i	x_ip_i	$x_i^2p_i$
1	0,1	0,1	0,1
2	0,2	0,4	0,8
3	0,1	0,3	0,9
4	0,4	1,6	6,4
5	0,2	1	5
		3,4	13,2

$\mu = 3{,}4$
$\sigma = 1{,}281$

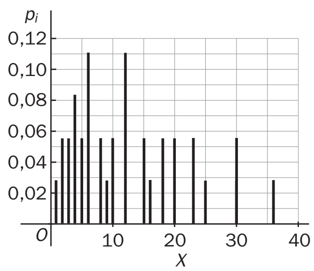
2. a) X toma valores en {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36}.

b) $p_4 = P(X = 4) = \dfrac{3}{36}$;

$p_6 = p_{12} = \dfrac{4}{36}$;

$p_1 = p_9 = p_{16} =$

$= p_{25} = p_{36} = \dfrac{1}{36}$;



y para el resto de resultados la probabilidad es igual a $\dfrac{2}{36}$.

c) $\mu = \sum_i x_ip_i = 12{,}25$; $\sigma = \sqrt{\sum_i x_ip_i - \mu^2} = 8{,}942$

d) $P(X \leqslant 4) = \dfrac{2}{9}$; $P(X \geqslant 10) = \dfrac{19}{36}$;

$P(X \neq 10) = 1 - P(X = 10) = 1 - \dfrac{2}{36} = \dfrac{17}{18}$;

$P(4 < X \leqslant 12) = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

3. X: "número de pólizas nuevas" sigue una distribución binomial $B(25; 0{,}05)$.

a) $P(X = 0) = 0{,}277$

b) $P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}8729$

4. X: "número de envases sin etiqueta" sigue una distribución binomial $B(6; 0{,}15)$.

a) $P(X = 0) = 0{,}377$

b) $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}9526$

5.

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$\mu = 2{,}333$

y_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\mu = 3$

6. $1 = \displaystyle\int_0^2 c(4 - 2x)dx = c(4x - x^2]_0^2 = 4c \Rightarrow c = \frac{1}{4}$

$\mu = \displaystyle\int_0^2 x\frac{1}{4}(4 - 2x)dx = \frac{1}{4}\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2}{3}$

7. a) $P(Z < 0{,}83) = 0{,}7937$

b) $P(Z \leqslant -1{,}25) = 1 - P(Z \leqslant 1{,}25) = 0{,}1056$

c) $P(-0{,}4 \leqslant Z \leqslant 0{,}4) = 2\,P(Z \leqslant 0{,}4) - 1 = 0{,}3108$

d) $P(-2 \leqslant Z < -1) = P(Z < 2) - P(Z < 1) = 0{,}1359$

e) $P(-0{,}2 \leqslant Z \leqslant 1{,}4) =$
$= P(Z \leqslant 1{,}4) + P(Z \leqslant 0{,}2) - 1 = 0{,}4985$

f) $P(-0{,}17 < Z \leqslant 0{,}95) =$
$= P(Z \leqslant 0{,}95) + P(Z \leqslant 0{,}17) - 1 = 0{,}3964$

8. X es $N(7200, 500) \to Z = \dfrac{X - 7200}{500}$ es $N(0, 1)$.

$P(X > 8000) = P\left(Z > \dfrac{8000 - 7200}{500}\right) =$

$= 1 - P(Z \leqslant 1{,}6) = 0{,}0548$

9. X es $N(175, 8) \to Z = \dfrac{X - 175}{8}$ es $N(0, 1)$

a) $P(X > 180) = P\left(Z > \dfrac{180 - 175}{8}\right) =$
$= 1 - P(Z < 0{,}625) = 0{,}266$

b) $P(X < 170) = P\left(Z < \dfrac{170 - 175}{8}\right) =$
$= 1 - P(Z < 0{,}625) = 0{,}266$

c) $P(170 < X < 180) =$
$= P\left(\dfrac{170 - 175}{8} < Z < \dfrac{180 - 175}{8}\right) =$
$= 2P(Z < 0{,}625) - 1 = 0{,}468$

d) $P(-m < Z < m) = 2P(Z < m) - 1 = 0{,}7 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(Z < m) = 0{,}85 \Rightarrow m = 1{,}037$
Las alturas buscadas son:
$x_1 = 8(-1{,}037) + 175 = 166{,}7$ cm
$x_2 = 8(1{,}037) + 175 = 183{,}3$ cm

10. X: "número de niños de la muestra correctamente vacunados" es $B(50; 0{,}15)$, como:
$np = 50 \cdot 0{,}15 = 7{,}5 \geqslant 5$ y $nq = 50 \cdot 0{,}85 = 42{,}5 \geqslant 5$
Podemos aproximar por una distribución normal de parámetros $\mu = np = 7{,}5$; $\sigma = \sqrt{npq} = 2{,}52$.
X' es $N(7{,}5; 2{,}52) \to Z = \dfrac{X' - 7{,}5}{2{,}52}$ es $N(0, 1)$.

a) $P(X > 5) = P(X' \geqslant 5{,}5) = P(Z > -0{,}794) =$
$= P(Z \leqslant 0{,}794) = 0{,}786$

b) $P(X \leqslant 6) = P(X' \leqslant 6{,}5) = P(Z \leqslant -0{,}4) =$
$= 1 - P(Z \leqslant 0{,}4) = 0{,}345$

PROYECTO EDITORIAL
Equipo de Educación Secundaria de Ediciones SM

REVISIÓN CIENTÍFICA Y PEDAGÓGICA
Juan Jesús Donaire

EDICIÓN
Juan Alberto Torresano

ILUSTRACIÓN
Modesto Arregui

DISEÑO
Estudio SM

MAQUETACIÓN
Grafilia, SL

COORDINACIÓN EDITORIAL
Josefina Arévalo

DIRECCIÓN EDITORIAL
Aída Moya