INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Resolver la siguiente ecuación vectorial

$$\vec{x} \text{ Ù } (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

sabiendo que $|\vec{x}| = \sqrt{6}$**, donde el símbolo Ù significa "producto vectorial".**

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

a) **(1 punto) Determinar el centro y el radio de la esfera**
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z - 4 = 0 .$$

b) **(1 punto) Determinar el centro y el radio de la circunferencia intersección de la esfera del apartado anterior con el plano z = 0.**

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue A y B son matrices cuadradas de orden 2 ´ 2.

a) **(0,5 puntos) Comprobar que se verifica *Traza*(A + B) = *Traza*(A) + *Traza*(B).**

b) **(1 punto) Comprobar que *Traza*(AB) = *Traza*(BA).**

c) **(1 punto) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener AB – BA = I, donde I denota la matriz identidad.**

d) **(0,5 puntos) Encontrar dos matrices A y B para las que *Traza*(AB) ¹ *Traza*(A)*Traza* (B).**

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ **un polinomio que cumple *f*(1) = 0, *f* ´(0) = 2, y tiene dos extremos relativos para x = 1 y x = 2.**

a) **(2 puntos) Determinar *a*, *b*, *c* y *d*.**
b) **(1 punto) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?**

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Sean las funciones

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad f(x) = x^3$$

Determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta $x = 2$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

a) **(1 punto) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga al menos un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4).**
b) **(1 punto) Si la función fuese polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?**

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + y + z = (a-1)(a+2) \\ x + ay + z = (a-1)^2(a+2) \\ x + y + az = (a-1)^3(a+2) \end{cases}$$

a) **(1 punto) Comprobar que es compatible para todo valor de *a*.**
b) **(1 punto) Describir en términos geométricos el conjunto de soluciones para $a = 1$ y para $a = -2$.**
c) **(1 punto) Resolverlo para $a = -2$.**

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Sean los puntos P(8, 13, 8) y Q(–4, –11, –8). Se considera el plano p , perpendicular al segmento PQ por su punto medio.

a) **(1 punto) Obtener la ecuación del plano p .**
b) **(1 punto) Calcular la protección ortogonal del punto O(0, 0, 0) sobre p .**
c) **(1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano p corta a los ejes coordenados y el origen de coordenadas.**

SOLUCIONES:

OPCIÓN A

Ejercicio 1.

Sea $\vec{x} = (a, b, c)$. Se tiene que:

$$(a, b, c) \wedge (2, 1, -1) = (1, 3, 5) \Rightarrow \begin{cases} -b-c=1 \\ a \quad +2c=3 \\ a-2b \quad =5 \end{cases}$$

El sistema anterior es compatible indeterminado (puede observarse que E3 = 2E1 + E2.)

Su solución es $\begin{cases} a = 5+2t \\ b = t \\ c = -t-1 \end{cases}$

Como $a^2+b^2+c^2=6 \Rightarrow (5+2t)^2+t^2+(-t-1)^2=6 \Rightarrow t=-2$ o $t=-\dfrac{5}{3}$.

Por tanto:

$$\vec{x} = (1, -2, 1) \quad \text{o} \quad \vec{x} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Ejercicio 2.

a) $x^2+y^2+z^2-2x+4y+8z-4=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=25$

Centro: $(1, -2, -4)$. Radio: 5

b) Si $z = 0$, la ecuación anterior queda $(x-1)^2+(y+2)^2=9$.

Centro: $(1, -2, 0)$. Radio: 3

Ejercicio 3.

a) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \Rightarrow Traza(A) + Traza(B) = a+d+e+h$

Se tiene: $A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \Rightarrow Traza(A + B) = a + e + d + h$

Es obvio que los resultados coinciden.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$. $Traza(AB) = ae + bg + cf + dh$.

$B \cdot A = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$. $Traza(BA) = ea + fc + gb + hd$.

También coinciden.

c) Si $AB – BA = I \Rightarrow Traza(AB – BA) = Traza(I)$.

Como $Traza(AB – BA) = Traza(AB) – Traza(BA) = 0$ y $Traza(I) = 2$, se llega a un absurdo.

d) Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Para estas matrices:

$Traza(AB) = 1$; $Traza(A) = 0$; $Traza(B) = 1$.

Luego, $Traza(AB) \neq Traza(A)Traza(B)$.

Ejercicio 4.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f´(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f(x) = 6ax + 2b$$

Por pasar por (1, 0), $f(1) = 0 \quad \Rightarrow 0 = a + b + c + d$

Por $f´(1) = 0 \quad \Rightarrow 0 = \quad c$

Por extremo en x = 1: $f´(1) = 0 \quad \Rightarrow 0 = 3a + 2b + c$

Por extremo en x = 2: $f´(2) = 0 \quad \Rightarrow 0 = 12a + 4b + c$

Se obtiene que:

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{3}{2}, \quad c = 2, \quad d = -\frac{5}{6}$$

Luego,

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{6}$$

b) Se tiene:

$$f´(x) = x^2 - 3x + 2\,; \quad f´´(x) = 2x - 3$$

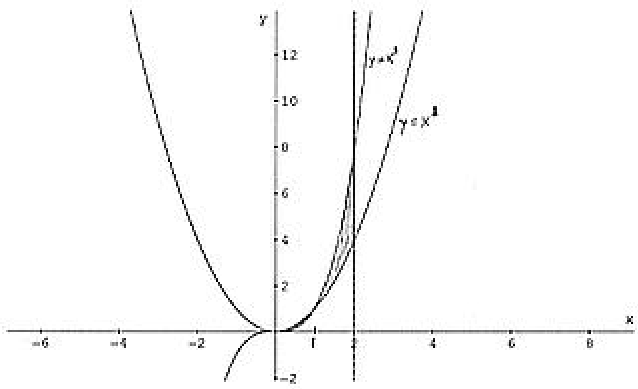
$f´´(1) = -1 \Rightarrow$ en x = 1 hay un máximo.

$f´´(2) = 1 \Rightarrow$ en x = 2 hay un mínimo.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.

El área es la de la región sombreada en la siguiente figura.

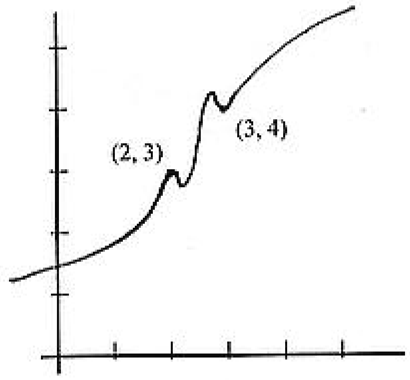


Las gráficas se cortan para x = 0 y x = 1.

$$A = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx + \int_1^2 (x^3 - x^2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{12} + \frac{17}{12} = \frac{3}{2}$$

Ejercicio 2.

a) Puede valer la siguiente figura:



b) La función tiene (necesariamente y al menos) dos mínimos y dos máximos. Por tanto, la ecuación $f'(x) = 0$ debe tener cuatro soluciones. Luego, la derivada será una función polinómica de cuarto grado. En consecuencia, la función será de quinto grado (al menos).

Ejercicio 3.

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(A) = r(M).

El determinante de A, $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$

Con esto, si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

Si $a = 1$ o $a = -2$ el sistema es homogéneo. También será compatible.

b) Para $a = 1$, el sistema queda reducido a una sola ecuación: $\{x + y + z = 0$. Su solución es un plano.

Para $a = -2$, el sistema es: $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

Como r(A) = 2 = r(M), su solución será una recta.

c)

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = z \\ x + y = 2z \end{cases}$$

cuya solución es: $x = t$, $y = t$, $z = t$.

Ejercicio 4.

a) Vector PQ = (–12, –24, –16) ≡ (3, 6, 4).
Punto medio M = (2, 1, 0).

Plano π:

$$3(x-2)+6(y-1)+4z=0 \;\Rightarrow\; 3x+6y+4z-12=0.$$

b) Recta perpendicular a π que pasa por (0, 0, 0): $r:\begin{cases} x=3t \\ y=6t \\ z=4t \end{cases}$

Punto de intersección recta–plano:

$$9t+36t+16t-12=0 \;\Rightarrow\; t=12/61$$

La proyección será el punto $\left(\dfrac{36}{61}, \dfrac{72}{61}, \dfrac{48}{61}\right)$.

c) Corte de π con los ejes: A(4, 0, 0), B = (0, 2, 0), C = (0, 0, 3)

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=4\ u^3.$$