INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Sea la función $f(x) = 2x + \operatorname{sen} 2x$.

a) **(1 punto) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.**
b) **(1 punto) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos.**

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados tres números reales cualesquiera r_1, r_2 y r_3, hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Considerar el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y + z &= 1 \\ (\lambda - 1)x + \quad y + z &= \lambda \\ x + \quad (\lambda - 1)y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

a) **(1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro λ.**
b) **(1 punto) Resolverlo para $\lambda = 0$.**
c) **(1 punto) Resolverlo para $\lambda = 3$.**

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Sea la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 9 = 0$.

a) **(0,5 puntos) Determinar su centro y su radio.**
b) **(0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta que contiene al diámetro paralelo al eje OY.**
c) **(1 punto) Obtener el centro y el radio de la circunferencia que resulta al cortar dicha esfera con el plano z = 0.**
d) **(1 punto) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en su punto del eje OX.**

SOLUCIONES:

OPCIÓN A

Ejercicio 1.

a) No tiene asíntotas de ningún tipo. Es obvio para horizontales y verticales. Veamos el caso de oblicuas.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + \operatorname{sen} 2x}{x} = 2\,,$$

pero

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} (2x + \operatorname{sen} 2x - 2x) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} 2x\text{, que no existe.}$$

b) $f(x) = 2x + \operatorname{sen} 2x \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 + 2\cos 2x \;\Rightarrow\; f''(x) = -4\operatorname{sen} 2x$

$$f'(x) = 2 + 2\cos 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

En los demás puntos la derivada es positiva. Por tanto, f es monótona creciente.

La derivada segunda se anula en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Por tanto, para esos valores hay inflexión.

(También puede verse que $f'''(x) = -8\cos 2x \neq 0$ (vale 8) si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$)

Ejercicio 2.

La derivada es

$$D'(x) = -2(r_1 - x) - 2(r_2 - x) - 2(r_3 - x) = -2(r_1 + r_2 + r_3 - 3x)$$

que se anula cuando

$$x = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$$ (Esto es la media aritmética de r_1, r_2 y r_3.)

Efectivamente es mínimo, pues $D''(x) = 6 > 0$.

Ejercicio 3.

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(A) = r(M).

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda - 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = M$$

El determinante de A, $|A| = \lambda(\lambda - 1)$.

Con esto:

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

- Si $\lambda = 0$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) = M$. Como la segunda y tercera filas son proporcionales $\Rightarrow$ r(A) = r (M) = 2. El sistema será compatible indeterminado.

- Si $\lambda = 1$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) = M$. Como la primera y segunda filas son iguales $\Rightarrow$ r(A) = r (M) = 2. El sistema será compatible indeterminado.

b) Para λ = 0 el sistema es equivalente a $\begin{cases} y + z = 1 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$ cuya solución es $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$

c) Si $\lambda = 3$ se tiene el sistema

$$\left.\begin{array}{r} y + z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 0 \end{array}\right\}$$

cuya solución es: x = 1, y = 0, z = 1. (Es inmediato aplicando Cramer).

Ejercicio 4.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 25$

Centro: (3, 3, 4). Radio: R = 5.

b) El vector de dirección de esa recta es **v** = (0, 1, 0), luego sus ecuaciones serán:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + t \\ z = 4 \end{cases}$$

c) Si $z = 0$ se tiene:

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (-4)^2 = 25 \;\Rightarrow\; (x-3)^2 + (y-3)^2 = 9.$$

Centro: (3, 3, 0). Radio: r = 3.

d) El punto de corte del eje OX es:

$$(x-3)^2 + (-3)^2 + (-4)^2 = 25 \;\Rightarrow\; (x-3)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 3. \text{ Punto } (3, 0, 0).$$

El vector característico (normal) de ese plano es: (3, 3, 4) – (3, 0, 0) = (0, 3, 4).

Por tanto su ecuación es: $3y + 4z = 0$