INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. Nunca resolverá algunos ejercicios de la opción A y otros ejercicios de la opción B. En cualquier caso, sólo se evaluarán las respuestas a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.
Tiempo: Hora y treinta minutos.
Calificación total máxima: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=2 \\ 2x-y+3z=2 \\ 5x-y+az=6 \end{array}\right\}$$

Se pide:
a) **(1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro *a*.**
b) **(1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.**

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Sea *k* un número natural y sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) **(1 punto) Calcular A^k.**
b) **(1 punto) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^k X = BC$.**

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Dado el plano $p \equiv x+y+z=1$, la recta $r \equiv (x,y,z)=(1,0,0)+\lambda(0,1,1)$, y el punto P(1, 1, 0), se pide:
a) **(1 punto) Hallar la ecuación de una recta *s* que sea perpendicular a *r* y pase por P.**
b) **(1 punto) Hallar el punto P', simétrico de P respecto de *r*.**
c) **(1 punto) Hallar el punto P'', simétrico de P respecto de p.**

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos).

Sea la función $f(x) = sen x$ **.**

a) **(0,5 puntos) Calcular** $a > 0$ **tal que el área encerrada por la gráfica de** ***f*****, el eje** $y = 0$**, y la recta** $x = a$**, sea ½**

b) **(1 punto) Calcular la ecuación de la tangente a la gráfica de** f **en el punto de abscisa** $x = \frac{\pi}{4}$

c) **(1,5 puntos) Calcular el área de la superficie encerrada por la tangente anterior, la gráfica de la función** f **y las rectas** $x = \frac{\pi}{4}$**,** $x = \frac{3\pi}{4}$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) **(0,5 puntos) Razonar si la función es continua en toda la recta real.**

b) **(0,5 puntos) Razonar si** f **es derivable en toda la recta real.**

c) **(1 punto) Determinar el área encerrada por la gráfica de** ***f*** **y por las rectas** $y = 8$**,** $x = 0$**,** $x = 2$**.**

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)..

a) **(1 punto) Determinar los extremos relativos de la función** $f(x) = x^2 - 4x + 2$ **. Dibujar su gráfica.**

b) **(1 punto) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de** ***f*** **que pasa por el punto P(3, -5).**

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)..

Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) **(1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real l .**
b) **(1 punto) Resolverlo para l = - 3.**
c) **(1 punto) Resolverlo para l = 1.**

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)..
Sean las rectas:

$$r \equiv x-2=\frac{y-1}{k}=\frac{z+1}{-2} \qquad\qquad s \equiv \begin{cases} x=1+l \\ y=2-l \\ z=2l \end{cases}$$

a) **(1 punto) Hallar *k* para que *r* y *s* sean coplanarias.**
b) **(1 punto) Para el valor anterior de *k*, hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.**
c) **(1 punto) Para el valor anterior de *k*, hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.**

Solución

OPCIÓN A

1.

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(A) = r(M).

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & a & 6 \end{array}\right)=M$$

El determinante de A, $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix}=-3a+24$

Con esto:

- Si $a \neq 8 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si a = 8, el rango de A es 2: r(A) = 2.

Además:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 2\\ 5 & -1 & 8 & 6\end{array}\right)=M\ .$$

Como F3 = F1 + 2F2, el rango de M también es 2: r(M) = 2.

Luego si a = 8, r(A) = 2 = r(M). El sistema será compatible indeterminado.

b) Para a = 8 el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x+y+2z=2\\ 2x-y+3z=2\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x+2z=2-y\\ 2x+3z=2+y\end{cases}$$

cuya solución es

$$\begin{cases} x=-2+5t\\ y=\quad t\\ z=2-3t\end{cases}$$

2.

a) $A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Supongamos que $A^k=\begin{pmatrix}1&k&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, y veamos que esta conjetura se verifica para el siguiente. Esto es, para k + 1.

En efecto:

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & k+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A^k X = BC \Rightarrow X = \left(A^k\right)^{-1} BC$

Como $\left(A_{ij}{}^k\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\left|A^k\right| = 1 \Rightarrow \left(A^k\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Luego

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3.

Un punto genérico X de la recta r es, X = (1. λ, λ).

El vector **PX** = (0, λ – 1, λ). Este vector debe ser perpendicular a $\vec{v}_r$ = (0, 1, 1), luego

(0, λ – 1, λ) · (0, 1, 1) = 0 ⇒ 2λ – 1 = 0 ⇒ λ = ½⇒ X = (1, ½, ½)

Por tanto, **PX** = (0, –1/2, 1/2) ≡ (0, –1, 1) y $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = \quad t \end{cases}$

b) El punto P’ debe cumplir que **OP’** = **OP** + 2**PX** = (1, 1, 0) + (0, –1, 1) = (1, 0, 1).

Luego, P’ = (1, 0, 1).

<u>Nota:</u> Convendría hacer una figura para explicarlo.

c) Recta perpendicular a π por P: $u: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\quad (\vec{v}_u = \vec{v}_\pi = (1, 1, 1))$

Punto de corte, Q, del plano π con la recta *u*:

$$1 + \lambda + 1 + \lambda + \lambda = 1 \Rightarrow 3\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -1/3 \Rightarrow Q = (2/3, 2/3, -1/3)$$

Como Q debe ser el punto medio entre P = (1, 1, 0) y P'' = (x, y, z), se tiene:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 1/3; \quad \frac{y+1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = 1/3; \quad \frac{z}{2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow z = -2/3$$

Por tanto, P'' = (1/3, 1/3, −2/3).

4.

a) Debe cumplirse que

$$\int_0^a \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2} \Rightarrow -\cos x\Big|_0^a = \frac{1}{2} \Rightarrow -\cos a + \cos 0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi}{3}$$

b) La ecuación de la tangente será:

$$y - f(\pi/4) = f'(\pi/4)(x - \pi/4)$$

$$f(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad f'(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

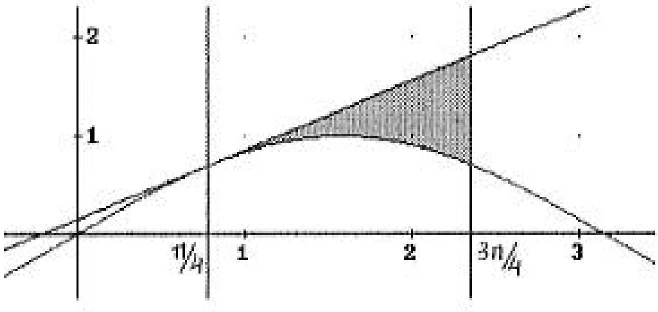
Queda,

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \pi/4) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right)$$

c) El área pedida (ver figura) vale,

$$A = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) - \operatorname{sen} x \right) dx = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right)x + \cos x \right)_{\pi/4}^{3\pi/4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}p}{16}(p+4)-\sqrt{2}$$



OPCIÓN B

1.

a) El único punto dudoso es x = 1.

Si $x \to 1^-$, $f(x) \to 1$
Si $x \to 1^+$, $f(x) \to 1$ $\Rightarrow$ La función es continua siempre.

b) Salvo en x = 1, la derivada vale:

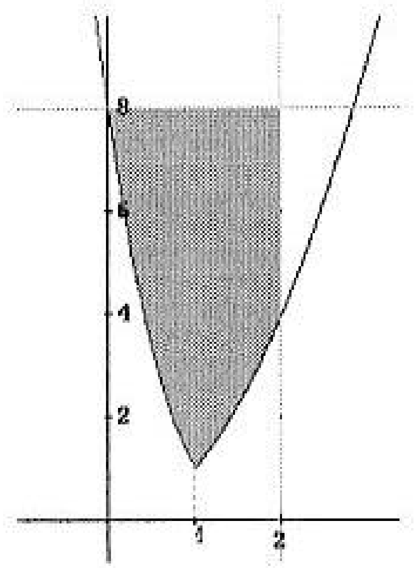
$$f(x) = \begin{cases} -3(2-x)^2 & \text{si } x<1 \\ 2x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Si $x \to 1^-$, $f'(x) \to -3$
Si $x \to 1^+$, $f'(x) \to 2$ $\Rightarrow$ La función no es derivable en x = 1.

c) Observando la figura adjunta se ve que:

$$A = \int_0^1 (8-(2-x)^3)dx + \int_1^2 (8-x^2)dx =$$

$$= \left[8x + \frac{1}{4}(2-x)^4\right]_0^1 + \left[8x - \frac{x^3}{4}\right]_1^2 = \frac{119}{12}$$



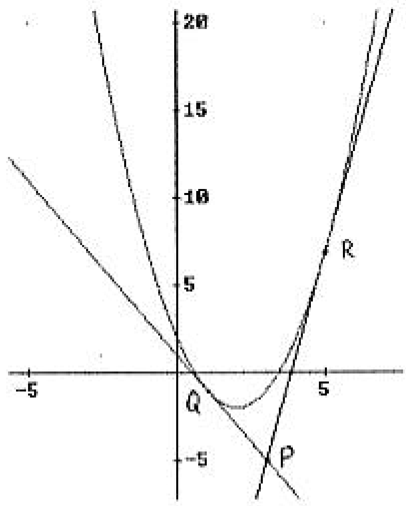
2.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$

$$f''(x) = 2 > 0$$

El mínimo se da el punto (2, −2).

La gráfica es la parábola de la figura adjunta.



b) La ecuación de la tangente será:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Esto es,

$$-5 - (x_0^{\,2} - 4x + 2) = (2x_0 - 4)(3 - x_0) \;\Rightarrow\; x_0 = 1 \text{ y } x_0 = 5$$

Luego los puntos de tangencia son Q = (1, –1) y R = (5, 7).

Las rectas tangentes serán:

- y + 1 = –2(x – 1) → y = –2x + 1
- y – 7 = 6(x – 5) → y = 6x – 23

(Ver figura.)

3.

Sean A y M las matrices de coeficientes y ampliada, respectivamente. En ellas haremos transformaciones de Gauss para determinar su rango.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&\lambda\\1&1&\lambda&1\\1&\lambda&1&1\\\lambda&1&1&1\end{array}\right)=M \;\Rightarrow\; \begin{matrix}F2-F1\\F3-F1\\F4-F1\end{matrix}:A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&\lambda\\0&0&\lambda-1&1-\lambda\\0&\lambda-1&0&1-\lambda\\\lambda-1&0&0&1-\lambda\end{array}\right)=M$$

$$\Rightarrow (\text{C4 + C1 + C2 + C3})\;\; A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&\lambda+3\\0&0&\lambda-1&0\\0&\lambda-1&0&0\\\lambda-1&0&0&0\end{array}\right)=M$$

En la matriz A tomamos los menores,

$$A_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&\lambda-1\\0&\lambda-1&0\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2;\qquad A_2=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&\lambda-1&0\\\lambda-1&0&0\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^3$$

siendo $|M|=-(\lambda+3)(\lambda-1)^3$

En consecuencia:

- si $\lambda \neq 1$ o $\lambda \neq -3$, r(A) = 3 y r(M) = 4. Es sistema es incompatible.
- si $\lambda = -3$, r(A) = r(M) = 3. Sistema compatible determinado.
- si $\lambda = 1$, r(A) = r(M) = 1. Sistema compatible indeterminado, con dos grados de indeterminación.

b) Para $\lambda = -3$, el sistema es

$$\begin{cases}x+y+z=-3\\x+y-3z=1\\x-3y+z=1\end{cases}$$

cuya solución es: $x=-1$; $y=-1$; $z=-1$.

c) Si $\lambda = 1$, el sistema queda:

$$\{x+y+z=1$$

cuya solución es:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda - m \\ y = \lambda \\ z = m \end{cases}$$

4.

a) $r \equiv x - 2 = \dfrac{y-1}{k} = \dfrac{z+1}{-2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + kt \\ z = -1 - 2t \end{cases}$

Los vectores de dirección son: $\vec{v}_r = (1, k, -2)$ y $\vec{v}_s = (1, -1, 2)$.

Sea A = (2, 1, –1) un punto de r; y sea B = (1, 2, 0) otro punto de s ⇒ **AB** = (–1, 1, 1).

Las rectas serán coplanarias si los vectores anteriores son linealmente dependientes. Esto es, si

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = -1.$$

b) El plano es

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda + m \\ y = 1 - \lambda - m \\ z = -1 - 2\lambda + 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z+1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi: x + y - 3 = 0$$

c) Como las rectas se cortan, por ser coplanarias y no paralelas, hallamos su punto de corte.

$$\begin{cases} 2 + t = 1 + \lambda \\ 1 - t = 2 - \lambda \\ -1 - 2t = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{3}{4};\ \lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{P} = (5/4, 7/4, 2/4)$$

Su vector de dirección es $\vec{v}_p = (1, 1, 0)$.

Luego, la recta será: $\begin{cases} x = 5/4 + t \\ y = 7/4 + t \\ z = 1/2 \end{cases}$