INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una de ellas y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de la capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
TIEMPO: Una hora y treinta minutos.
CALIFICACIÓN: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Determinar la ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos (0, 0) y (1, 1) es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Sean *A*, *B* y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA}$$

a) (1 punto) Calcular el valor que toma *k* en la expresión $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

b) **(1 punto) Si *A*(l, 2, - 1) y *B*(3, 6, 9), hallar las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.**

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se consideran las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$

a) **(1 punto) Calcular *a* y *b* para que las gráficas de *f* y *g* sean tangentes en el punto de abscisa *x* = 2.**

b) **(1 punto) Para los valores de *a* y *b* calculados en el apartado anterior, dibujar las gráficas de ambas funciones y hallar la ecuación de la recta tangente común.**

c) **(1 punto) Para los mismos valores de *a* y *b*, hallar el área limitada por las gráficas de las funciones y el eje vertical.**

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} ax + y + 4z &= 1 \\ -x + ay - 2z &= 1 \\ y + z &= a \end{aligned}\right\}$$

a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro *a*.
b) (1 punto) Resolver el sistema para *a* = 2.
c) **(1 punto) Resolver el sistema para *a* = 1.**

OPCIÓN A

1.

Si P(x, y) es uno de los puntos del lugar, se cumple:

$$[d(P, (0,0))]^2 + [d(P, (1, 1))]^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - x - y = 7/2 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2^2$$

Es una circunferencia con centro en (1/2, 1/2) y radio 2.

Su área es: $A = \pi r^2 = 4\pi$

2.

a) De $\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{AC}$.

Sustituyendo en la igualdad $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, se tiene:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow 4\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \dot{AC} = \frac{1}{4}\dot{AB}$$

b) $\overrightarrow{AB}$ = (3, 6, 9) – (1, 2, –1) = (2, 4, 10)

Si O = (0, 0, 0), entonces:

$$\dot{OC} = \dot{OA} + \frac{1}{4}\dot{AB} = (1, 2, -1) + (1/2, 1, 5/2) = (3/2, 3, 3/2)$$

Las coordenadas del punto C son (3/2, 3, 3/2).

3.

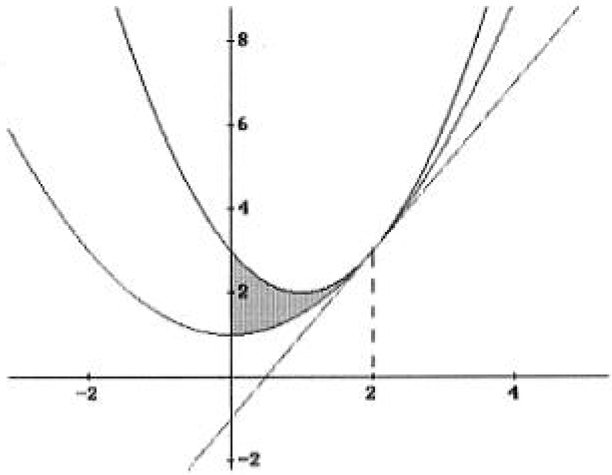
a) Debe cumplirse que: $f(2) = g(2)$ y $f´(2) = g´(2)$

$f(2) = 3; \qquad g(2) = 4a + b \quad \Rightarrow \quad 3 = 4a + b$

$f´(x) = 2x - 2\,, \quad g´(x) = 2ax \quad \Rightarrow \quad 2 = 4a \quad \Rightarrow \quad a = 1/2 \quad \rightarrow \quad b = 1$

Por tanto, $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1$

b) Las gráficas son las siguientes.



La ecuación de la tangente común es:

$y - f(2) = f´(2)(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 1$ (es la recta trazada en la figura)

c) El área es la zona sombreada, que vale:

$$A = \int_0^2 (x^2 - 2x + 3 - \frac{1}{2}x^2 - 1)dx = \int_0^2 (\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

4.

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(A) = r(M).

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 4 & 1 \\ -1 & a & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right) = M$$

El determinante de A, $|A| = a^2 + 2a - 3 = (a-1)(a+3)$

Con esto:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -3$, r(A) = 3 = r(M), y el sistema será compatible determinado.

- Si $a = 1$, se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$.

Como C2 = C4, r(A) = r(M) = 2. El sistema será compatible indeterminado.

- Si $a = -3$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) = M$

Como $|M_1| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -28 \neq 0$, el rango de M es 3 y el sistema será incompatible.

b) Para $a = 2$ se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + 4z = 1 \\ -x + 2y - 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{array}\right\}$$

El sistema tiene solución única, que calculamos por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4-5-12}{5} = \frac{-13}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10-7}{5} = \frac{3}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{6+1}{5} = \frac{7}{5}$$

c) Para $a = 1$ el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

cuya solución es: $\begin{cases} x = -3t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$