INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

Tiempo: 90 minutos.

Puntuación: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real *a*:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sean las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144; \qquad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144.$$

a) **(2 puntos) Identificar C_1 y C_2. Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad y asíntotas (si existen).**

b) **(1 punto) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.**

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos).

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

a) **(1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de *f*.**

b) **(2 puntos) Calcular el área del recinto plano limitado por la gráfica de *f*, la recta anterior y el eje x = 0.**

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta *r*:

$$x = 1 + t; \quad y = -1 + 2t; \quad z = t$$

y es perpendicular al plano p :

$$2x + y - z = 2.$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Los puntos A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(1, 3, 3) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.

Se pide:

a) **(1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.**

b) **(1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.**

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real *a*:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

Se pide:

a) **(1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro *a*.**

b) **(0,5 puntos) Resolver el sistema para *a* = - 1.**

c) **(1 punto) Resolver el sistema para *a* = 2.**

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)..

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x} & \text{si } x \geq -1 \\ \dfrac{2x}{x - 1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

a) **(0,5 puntos) Estudiar el dominio y la continuidad de *f*.**

b) **(1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de *f*.**

c) **(1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.**

Solución OPCIÓN A

Ejercicio A1:

En la siguiente tabla se resumen los datos y las relaciones existentes:

Edades	Madre	Hijo 1º	Hijo 2º	Relación de edades
Actualmente	x	y	z	
Hace 14 años	x – 14	y – 14	z – 14	x – 14 = 5(y – 14 + z – 14)
Dentro de 10 años	x + 10	y + 10	z + 10	x + 10 = y + 10 + z + 10
Dentro de x – y (*)		x	z + x – y	z + x – y = 42

(*) Puede observarse que el hijo mayor, que tiene *y* años, tendrá la edad de la madre (x años) dentro de x – y años.

Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x-5y-5z=-126 \\ x-y-z=10 \\ x-y+z=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-E2 \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} -4y-4z=-136 \\ x-y-z=10 \\ 2z=32 \end{cases}$$

Luego: z = 16; y = 18; x = 44.

La madre tiene 44 años; los hijos, 18 el mayor y 16 el menor.

Ejercicio A2:

Calculamos el rango por menores.

El rango al menos es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$.

Veamos qué debe pasar para que sea 3. Para ello estudiamos los menores de orden 3.

El menor $A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & a+4 & -4 \end{vmatrix} = -(a+4)(a-2) = 0$ si $a = -4$ o $a = 2$.

El menor $A_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ a+4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = (a+4)(3a+2) = 0$ si $a = -4$ o $a = -2/3$.

En consecuencia:

- Si $a = -4$ todos los menores de orden 3 son nulos, y el rango de A = 2.
- Si $a \neq -4$ algún menor de orden 3 es distinto de 0 $\Rightarrow$ el rango de A = 3.

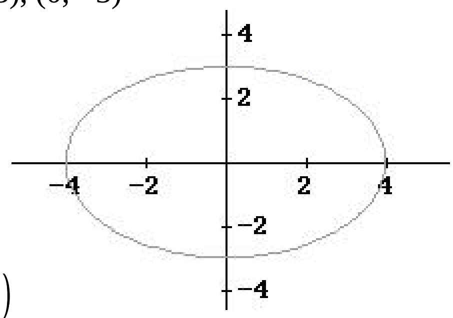
Ejercicio A3:

a) $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \iff \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Se trata de una elipse centrada en el origen y de semiejes $a = 4$ y $b = 3$.

El valor de c es: $c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

Vértices: (4, 0), (–4, 0), (0, 3), (0, –3)



Focos: $F_1 = \left(-\sqrt{7}, 0\right)$, $F_2 = \left(\sqrt{7}, 0\right)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \iff \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Se trata de una hipérbola centrada en el origen y de semiejes $a = 4$ y $b = 3$.

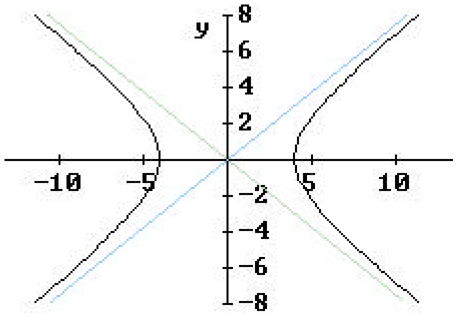
El valor de c es: $c = \sqrt{16+9} = 5$

Vértices: (4, 0), (–4, 0), (0, 3), (0, –3)

Focos: $F_1 = (-5, 0)$, $F_2 = (5, 0)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

Asíntotas: $y = \frac{3}{4}x$, $y = -\frac{3}{4}x$



b) La ecuación de esta parábola es de la forma

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

siendo (x_0, y_0) el vértice.

La parábola pasa por los puntos (0, 3), (–4, 0) y (0, –3), teniendo el vértice el punto (–4, 0).

Sustituyendo las coordenadas del vértice en la ecuación general, se tiene

$$y^2 = 2p(x +4)$$

Como (0, 3) es de la parábola $\rightarrow$ 9 = 2p(0 + 4) $\Rightarrow$ p = 9/8

Por tanto, la ecuación de la parábola pedida es $y^2 = \frac{9}{4}(x+4)$

Ejercicio A4:

a) Se hace la derivada segunda:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ o $x = 1$.

Puntos de inflexión: (–1, 1/4), (1, 1/4). Este último es el punto de inflexión de abscisa positiva.

Tangente en (1, 1/4):

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad \to \quad y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$$

b) En el intervalo [0, 1], que es el de integración, la recta tangente va por encima de la curva; en consecuencia, el área pedida vale:

$$A = \int_0^1 \left(-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8} - \frac{1}{x^2+3} \right) dx = \left(-\frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{\sqrt{3}} arctag \frac{x}{\sqrt{3}} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{3}{8} - \frac{1}{\sqrt{3}} arctag \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{16} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{p}{6}$$

La situación gráfica es la indicada a continuación.