INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.
Tiempo: 90 minutos.
Puntuación: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

a) **(1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos.**
b) **(1 punto) Calcular el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad**

$$\int_0^a f(x)dx = 1$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

a) **(1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.**
b) **(1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (3, 1)**

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real l:

$$\begin{cases} x + y + lz = l^2 \\ y - z = l \\ x + ly + z = l \end{cases}$$

Se pide:
a) **(1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro l.**
b) **(1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.**

c) **(0,5 puntos) En el caso $l = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.**

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos).

Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2}; \qquad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

a) **(1 punto) Calcular la distancia entre *r* y *s*.**

b) **(1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a *r* y *s* y que corta a ambas.**

c) **(1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a *r* y *s* y que pasa por el punto P(1, 0, 0).**

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos A(0, 3) y B(0, – 1) es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Para cada valor del parámetro real *a*, se consideran los tres planos siguientes:

$$p_1: x + y + az = -2; \quad p_2: x + ay + z = -1; \quad p_3: ax + y + z = 3$$

Se pide:

a) **(1,5 puntos) Calcular los valores de *a* para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.**

b) **(0,5 puntos) Para los valores de *a* calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.**

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)..

Sea A una matriz real cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n.

Se pide:

a) **(1 punto) Expresar A^{-1} en términos de A.**

b) **(1 punto) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n.**

c) **(1 punto) Calcular *a* para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)..

Sea *f*(x) una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f\,'(0) = 3$; $f\,'(1) = 4$.

Se pide:

a) **(1 punto) Calcular g´(0), siendo g(x) = *f*(x + *f*(0)).**

b) **(2 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de *f*.**

c) **(1 punto) Calcular** $\lim_{x\to 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$

Soluciones a los ejercicios de la OPCIÓN A

Ejercicio 1.

a) Se hace la derivada.

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$f\,'(x) = 0$ si $x = -1$ o $x = 1$.

La función decrece a la izquierda de x = –1 y crece a su derecha:

$f\,'(-1^-)<0$ y $f\,'(-1^+)>0 \Rightarrow$ en x = –1 hay un mínimo. Punto (–1, –1/2).

La función crece a la izquierda de x = 1 y decrece a su derecha:

$f\,'(1^-)>0$ y $f(1^+)<0 \Rightarrow$ en x = 1 hay un máximo. Punto (1, 1/2).

b) $\displaystyle\int_0^a \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^a=\frac{1}{2}\ln(a^2+1)$

Si $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=1 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(a^2+1)=1 \Rightarrow \ln(a^2+1)=2 \Rightarrow a^2+1=e^2 \Rightarrow a=\sqrt{e^2-1}$

Ejercicio 2.

a) La única dificultad se presenta en x = 2.

Continuidad:

si $x \to 2^-$, $f(x)=x(x-2) \to 0$
si $x \to 2^+$, $f(x)=\sqrt[3]{x-2} \to 0$

La función es continua en ese punto: los límites laterales son iguales.

Derivabilidad:

si $x \to 2^-$, $f\,'(x)=2x-2 \to 2$
si $x \to 2^+$, $f\,'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} \to \infty$

No es derivable, pues las derivadas laterales en x = 2 no coinciden. (Por la derecha no existe)

b) La ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto (a, f(a)) es:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

En este caso: $f(3) = 1$; $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} \rightarrow f'(3) = 1/3$

La recta tangente es: $y - 1 = \dfrac{1}{3}(x-3) \;\Rightarrow\; y = \dfrac{1}{3}x$

Ejercicio 3.

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(A) = r(M).

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right) = M$$

El determinante de A, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ Rango de A = 2, cualquiera que sea λ.

Hacemos ahora el menor $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda(1-\lambda)$, que vale 0 si λ = 0 o λ = 1.

Luego:
- → Si λ = 0, r(A) = 2 = r(M) ⇒ Sistema compatible indeterminado
- → Si λ = 1, r(A) = 2 = r(M) ⇒ Sistema compatible indeterminado
- → Si λ ≠ 0, 1, r(A) = 2, r(M) = 3 ⇒ Sistema incompatible.

b) Si λ = 0, el sistema es equivalente a: $\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Su solución es: $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Si $\lambda = 1$, el sistema es equivalente a: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$

Su solución es: $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$

c) Si $\lambda = 2$, el sistema es incompatible; por tanto, los planos se cortan dos a dos determinado tres rectas paralelas.

Ejercicio 4.

a) Como las rectas se cruzan, la distancia entre ellas es: $d(r,s) = \dfrac{\left|\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|}$, siendo $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ los vectores de dirección respectivos, y $\overrightarrow{AB}$ un vector que va de r a s: A $\in$ r y B $\in$ s.

En este caso: $\vec{v}_r = (1, -2, 2)$, $\vec{v}_s = (3, 1, -1)$; y $\overrightarrow{AB} = (2, 0, -1) - (0, 1, 3) = (2, -1, -4)$.

Con esto: $\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -35$;

$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 7, 7) \Rightarrow \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$

Luego: $d(r,s) = \dfrac{35}{7\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

b) Puntos genéricos de r y s son, respectivamente,

P = (t, 1 –2t, 3 + 2t), Q = (2 + 3h, h, –1 – h)

De donde: $\overrightarrow{PQ}$ = (2 + 3h – t, –1 + h + 2t, –4 –h – 2t). Este vector debe ser perpendicular a los de dirección de r y s.

Multiplicando escalarmente ($\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0$, $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_s = 0$), se tiene: $\left.\begin{matrix} h + 9t = -4 \\ 11h + t = -9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ t = \frac{-5}{14} \text{ y } h = -\frac{11}{14}$$

Con esto: $P = \left(\frac{-5}{14}, \frac{24}{14}, \frac{32}{14}\right)$ y $\overrightarrow{PQ} = \left(0, \frac{-5}{2}, \frac{-5}{2}\right) \equiv (0, 1, 1)$

La recta perpendicular común es: $\begin{cases} x = -5/14 \\ y = 24/14 + p \\ z = 32/14 + p \end{cases}$

c) Plano que contiene a *r* y a P(1, 0, 0):

Está determinado por: A = (0, 1, 3), $\vec{v}_r$ = (1, –2, 2) y $\overrightarrow{AP}$ = (1, 1, –3).

Su ecuación es $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & -2 & -1 \\ z-3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ 8x + 5y + z – 8 =0

Plano que contiene a *s* y a P(1, 0, 0):

Está determinado por: B = (2, 0, –1), $\vec{v}_r$ = (3, 1, –1) y $\overrightarrow{BP}$ = (–1, 0, 1).

Su ecuación es $\begin{vmatrix} x-2 & 3 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z+1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ x – 2y + z – 1 =0

La recta pedida viene determinada por esos dos planos. Sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} 8x + 5y + z - 8 = 0 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$