INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una y sólo una de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.
Puntuación: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos
Calcular los siguientes límites (donde ln significa Logaritmo Neperiano).

a) (1 punto) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$ **b) (1 punto)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos
Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

a) **(1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de *f*. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.**
b) **(1 puntos) Estudiar si *f* tiene alguna asíntota vertical.**

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos
Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$$

Se pide:
a) **(1 puntos) Resolverlo para *m* = 1.**
b) **(2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de *m*.**

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos
Dadas las rectas en el espacio:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \qquad s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

a) **(1,5 puntos) Hallar la distancia entre las dos rectas.**
b) **(1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s.**

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos
Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos
Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2 × 2 (distintas e la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos

a) **(1 punto) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$.**

b) **(1 punto) Calcular el domino de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.**

c) **(1 punto) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.**

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos
Dado el plano

$$\pi \equiv x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$r \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

se pide:

a) **(1,5 puntos) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.**

b) **(1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π, π'.**

Soluciones de la Opción A

Ejercicio 1.

En los dos casos utilizamos L´Hôpital

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} = \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L´Hôpital}) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-3sen3x}{\cos 3x}}{\frac{-2sen2x}{\cos 2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{3\tan 3x}{2\tan 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= (\text{L´Hôpital}) = \lim_{x\to 0} \frac{9(1+\tan^2 3x)}{4(1+\tan^2 2x)} = \frac{9}{4}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x} \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L´Hôpital}) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}+\frac{1}{2\sqrt{4-x}}}{4} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{8}$

NOTA: Este segundo límite puede resolverse también multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada del numerador.

Ejercicio 2.

a) La función es discontinua cuando $1-x^6 = 0 \Rightarrow$ x = −1 o x = 1.

La discontinuidad puede evitarse si existe límite.

En x = −1 la discontinuidad no puede evitarse pues la función no tiene límite en ese punto:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^5-x^8}{1-x^6} = \left[\frac{-2}{0}\right] = \infty$$

En x = 1, como

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5-x^8}{1-x^6} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{(L´H)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{5x^4-8x^7}{-6x^5} = \frac{5-8}{-6} = \frac{1}{2}$$

la discontinuidad puede evitarse, definiendo $f(1) = \frac{1}{2}$

b) La recta x = −1 es asíntota vertical de la función pues $\lim_{x\to -1} \frac{x^5-x^8}{1-x^6} = \infty$. Además, puede observarse que si x $\to -1^{-1}$, f(x) $\to +\infty$; y si x $\to -1^{+1}$, f(x) $\to -\infty$.

Ejercicio 3.

a) Si m = 1 el sistema queda:

$$\begin{cases} 3x \quad\; - z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \to (\text{por Gauss}) \to \begin{matrix} \\ E2+E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} 3x \quad\; - z = 3 \\ 4x - y = 5 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[E3+E2]{} \begin{cases} 3x \quad - z = 3 \\ 4x - y = 5 \\ 2x = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}, \ y = 1, \ z = \frac{3}{2}$$

b) Calculamos los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m(m+1) \Rightarrow$$ r(A) = 3 si m ≠ 0, −1; r(A) = 2 si m = 0 o −1.

- Para m = 0, la matriz ampliada es M = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3, pues

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Para m = −1, la matriz ampliada es M = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, que también tiene rango 3,

pues $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

En consecuencia: – Si m ≠ 0, −1 el sistema es compatible determinado.
– Si m = 0 o m = −1, el sistema es incompatible.

Ejercicio 4.

a) La distancia entre ellas es: $d(r,s) = \dfrac{\left|\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}\right]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$, siendo $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ los vectores de dirección respectivos, y $\overrightarrow{PQ}$ un vector que va de *r* a *s*: P ∈ r y Q ∈ s.

En este caso: $\vec{v}_r$ = (3, −2, 1); $\vec{v}_s$ = (2, −1, 2); y $\overrightarrow{PQ}$ = (−1, −2, 1) − (2, 1, 0) = (−3, −3, 1).

Con esto: $\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}\right] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 22$;

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-3,\ -4, 1) \Rightarrow |\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

Luego: $d(r,s) = \dfrac{22}{\sqrt{26}}$

b) Puntos genéricos de r y s son, respectivamente,

R = $(2 + 3t, 1 - 2t,\ t)$, S = $(1 + 2p, -2 - p, 1 + 2p)$

De donde **RS** = $(-3 + 2p - 3t, -6 - p + 2t, 1 + 2p - t)$. Este vector debe ser perpendicular a los de dirección de r y s, $\vec{v}_r = (3, -2, 1)$ y $\vec{v}_s = (2, -1, 2)$;

Multiplicando escalarmente: RS · $\vec{v}_r = 0$ y RS · $\vec{v}_s = 0$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} -2 + 10p - 14t = 0 \\ -1 + 9p - 10t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad t = \frac{-4}{13} \text{ y } p = \frac{-3}{13}$$

Con esto:

$$\text{R} = \left(\frac{14}{13}, \frac{21}{13}, \frac{-4}{13}\right),\ \text{S} = \left(\frac{-19}{13}, \frac{-23}{13}, \frac{7}{13}\right) \text{ y } \mathbf{RS} = \left(\frac{-33}{13}, \frac{-44}{13}, \frac{11}{13}\right) \equiv (3, 4, -1)$$

La recta perpendicular común es: $\begin{cases} x = 14/13 + 3l \\ y = 21/13 + 4l \\ z = -4/13 - l \end{cases}$