EXAMEN COMPLETO

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.
Puntuación: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos
Calcular la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos
Se considera la función

$$f(x)=\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

a) **(1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.**

b) **(1 puntos) Calcular** $\int_0^1 f(x)dx$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos
Dado el sistema:

$$\begin{cases}(1-a)x-2y+4z=0\\ x-(1+a)y+z=0\\ -x+ay-z=0\end{cases}$$

a) **(1,5 puntos) Estudiar la compatibilidad según los valores del parámetro a.**
b) **(1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.**

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos
Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r\equiv\begin{cases}x=2-3\lambda\\ y=1+2\lambda\\ z=4-\lambda\end{cases};\qquad \pi_1\equiv 2-3x+2y-z=0;\qquad \pi_2\equiv 3+2x+2y-2z=0.$$

Se pide:
a) **(1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.**
b) **(1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.**
c) **(1 punto) Calcular la distancia de r a π_2.**

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos
Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & -1\\ 5 & -1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

se pide:

a) **(1 punto) Hallar A^{-1}.**

b) **(1 punto) Hallar la matriz X, tal que:**

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde A^T significa matriz traspuesta de A).

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos

a) (1 punto) Dado el sistema $\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$**, escribir una tercera ecuación de la forma** $ax+by=c$ **(distinta de las dos anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.**

b) (1 punto) Dado el sistema $\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$**, escribir una tercera ecuación de la forma** $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$ **(distinta de las dos anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante sea compatible indeterminado.**

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos

a) **(2 puntos) Determinar las posiciones relativas de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k:**

$$\pi_1 \equiv 2x+3y+kz=3$$
$$\pi_2 \equiv x+ky-z=-1$$
$$\pi_3 \equiv 3x+y-3z=-k$$

b) (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función $f(x)=1-x^2$**.**

a) **(1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto** $P(a, f(a))$**, donde $0 < a < 1$.**

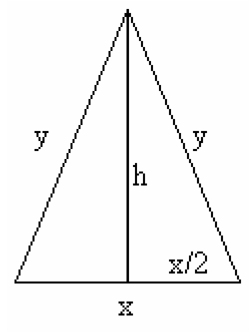
b) **(1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado a) corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.**

c) **(1 punto) Determinar el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto** $P(a, f(a))$ **es el doble de la distancia entre el punto B y el punto** $P(a, f(a))$**.**

Solución de la OPCIÓN A

Ejercicio 1

Sea el triángulo de la figura.



Su perímetro vale 8 ⇒ 2y + x = 8 ⇒ $y = \frac{8-x}{2}$

Por Pitágoras: $y^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$

Sustituyendo el valor de $y = \frac{8-x}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{64-16x+x^2}{4} - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{16-4x}$$

El área del triángulo es $A = \frac{x \cdot h}{2}$.

Sustituyendo h por su valor, $A(x) = \frac{x\sqrt{16-4x}}{2} = \sqrt{4x^2 - x^3}$

Para que A sea máxima: A´(x) = 0 y A´´(x) < 0:

$$A'(x) = \frac{8x-3x^2}{2\sqrt{4x^2-x^3}} = 0 \Rightarrow 8x - 3x^2 = 0 \Rightarrow \text{x = 0, x = 8/3}$$

En vez de calcular la derivada segunda, que resulta muy engorroso, estudiamos el crecimiento y el decrecimiento de A(x).

Para x < 0 no tiene sentido ver el signo de A´.
Para 0 < x < 8/3, A´(x) > 0 ⇒ A(x) crece.
Para x > 8/3, A´(x) < 0 ⇒ A(x) decrece.

Como la función crece a la izquierda de x = 8/3 y decrece a su derecha, en x = 8/3 se da el máximo.

Por tanto, la base pedida es x = 8/3, mientras que la altura valdrá

$$h = \sqrt{16 - 4(8/3)} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Ejercicio 2

a) El denominador de la función no se anula para ningún valor de x; por tanto no hay asíntotas verticales.

Como

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{ (aplicando L´Hôpital)}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x-8}{8x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{8}=1$$

la función tiene por asíntota horizontal la recta y = 1.

Máximo y mínimo.

Hacemos la derivada y la igualamos a 0:

$$f(x)=\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}=\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f´(x)=\frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2}=0 \Rightarrow 16x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

Como:

para $x < -1/2$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece

para $-1/2 < x < 1/2$, $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece $\Rightarrow$ En $x = -1/2$ hay un máximo

para $x > 1/2$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece $\Rightarrow$ En $x = 1/2$ hay un mínimo

Los valores máximos y mínimos son, respectivamente, $f(-1/2)=2$ y $f(1/2)=0$.

NOTA. La existencia de la asíntota horizontal es suficiente para saber que tanto el máximo como el mínimo son absolutos.

b) $\int_0^1 f(x)dx =$

$$=\int_0^1\left(\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\right)dx=\int_0^1\left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx=\left[x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)\right]_0^1=1-\frac{1}{2}\ln 5$$

Ejercicio 3

Como el sistema es homogéneo siempre será compatible. Si el rango de la matriz de coeficientes es 3, será compatible determinado; si vale menos que 3, compatible indeterminado.

El determinante de A, $|A|=\begin{vmatrix}1-a & -2 & 4\\ 1 & -1-a & 1\\ -1 & a & -1\end{vmatrix}=a+3$

Por tanto, si $a\neq -3 \Rightarrow$ r(A) = 3. El sistema será compatible determinado; y su solución, la trivial: x = 0, y = 0, z =0.

Para $a = -3$, la matriz A queda: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2, pues el menor $M_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$. Por tanto, el sistema será compatible indeterminado con un grado de indeterminación.

b) Para $a = -3$, el sistema queda:

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x - 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1 - 4E2 \\ \\ E3 + E2 \end{matrix} \begin{cases} -10y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Ejercicio 4

a) El vector de dirección de la recta y los característicos de los planos son, respectivamente, $\vec{v}_r = (-3, 2, -1)$, $\vec{v}_{\pi 1} = (-3, 2, -1)$, $\vec{v}_{\pi 2} = (2, 2, -2)$.

- Como $\vec{v}_r = \vec{v}_{\pi 1}$, la recta es perpendicular al plano π_1. Para determinar el punto de corte, aunque no se pide en el ejercicio, sustituimos las ecuaciones de la recta en la del plano; se obtiene:

$$2 - 3(2 - 3\lambda) + 2(1 + 2\lambda) - (4 - \lambda) = 0 \Rightarrow 14\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 3/7.$$

El punto de corte es: P = (5/7, 13/7, 25/7)

- Como $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_{\pi 2} = (-3, 2, -1) \cdot (2, 2, -2) = 0$, la recta es paralela al plano o está contenida en él. Para determinar la posición precisa sustituimos las ecuaciones de la recta en la del plano; se obtiene:

$$3 + 2(2 - 3\lambda) + 2(1 + 2\lambda) - 2(4 - \lambda) = 0 \Rightarrow 0\lambda - 1 = 0$$

que es absurdo (no hay solución). Luego la recta r y el plano π_2 son paralelos.

b) Como $\vec{v}_{\pi 1} \cdot \vec{v}_{\pi 2} = (-3, 2, -1) \cdot (2, 2, -2) = 0$, los planos son perpendiculares. Se cortan en una recta, cuyas ecuaciones vienen dadas por la solución del sistema

$\pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0$

$\pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3x + 2y - z = -2 \\ 2x + 2y - 2z = -3 \end{cases}$

c) Como r es paralela a π_2, la distancia de r a π_2 es la de cualquiera de los puntos de r, por ejemplo A = (2, 1, 4), al plano.

Por tanto:

$$d(r, \pi_2) = d(A = (2,1,4), \pi_2) = \left| \frac{3 + 4 + 2 - 8}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$