EXAMEN COMPLETO

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una y sólo una de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.
Puntuación: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos
Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) **(1 punto) Determinar la matriz inversa de B.**
b) **(1 punto) Determinar una matriz X tal que A = B · X.**

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos

a) **(1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A?**
b) **(1 punto) Calcular un número k tal que:**

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos
Sea el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$.

a) **(1 punto) Hallar el punto simétrico del (0, 0, 0) respecto de π.**
b) **(1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene al eje OZ.**
c) **(1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes coordenados.**

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos
Sabiendo que la función *f*(x) tiene como derivada

$$f'(x) = (x-4)^2(x^2 - 8x + 7)$$

a) **(1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.**
b) **(1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de *f***
c) **(1 punto) ¿Es el punto x = 4 un punto de inflexión de *f*? Justificar razonadamente la respuesta.**

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos

a) **(1,5 puntos) Halla el conjunto formado por los puntos del plano z = 0 que distan 3 unidades del plano de ecuación 2x – y + 2z = 4.**

b) (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos

El plano $\pi \equiv 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

a) **(0.5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.**

b) **(0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.**

c) **(1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π.**

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos

Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

a) **(1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.**

b) **(1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que *f* tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son** $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, **respectivamente.**

c) **(1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función *f*, el eje OX, la recta x = 0, y la recta x = 2.**

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos

a) **(2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema:**

$$\begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) **(1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso λ = 2.**

Solución de la OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) La matriz B es inversible, pues $|B| = 3$. Su inversa es $B^{-1} = \dfrac{(B_{ij})^t}{|B|}$, siendo ($B_{ij}$) la matriz de los adjuntos de B.

Como: $B_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

se tendrá que

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A = B \cdot X \Rightarrow B^{-1} \cdot A = B^{-1} \cdot .B \cdot X \Rightarrow X = B^{-1} \cdot A$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & -11/3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

a) Sabemos que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, luego $|A^2| = |A| \cdot |A| = |A|^2$.

Si $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^2| = 0 \Rightarrow |A| = 0$.

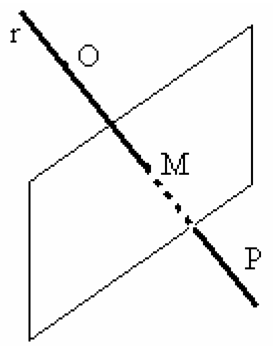
b) $\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Haciendo el cuadrado e igualando los respectivos elementos de ambas matrices, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 5-6k+k^2 & 8k-8 \\ 2-2k & -3+2k+k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5-6k+k^2 = 0 \\ 8k-8 = 0 \\ 2-2k = 0 \\ -3+2k+k^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow k = 1$$

Ejercicio 3

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ el punto simétrico de $O = (0, 0, 0)$ respecto de π.



Ambos puntos P y O estarán en la recta *r*, perpendicular a π por O. Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre P y O.

Como el vector normal del plano es $\vec{v}_\pi = (1, 2, 3)$, se deduce que $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

Corte de recta y plano:

$\lambda + 4\lambda + 9\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 3/7$.

Por tanto, M = $\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$

Punto medio entre P y O: $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{z_0}{2}\right)$

Como M = $\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right) = \left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{z_0}{2}\right) \Rightarrow x_0 = \frac{6}{7},\ y_0 = \frac{12}{7},\ z_0 = \frac{18}{7}$

Luego, el punto simétrico es P = $\left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{189}{7}\right)$

b) El plano π´, perpendicular a π, que contiene a OZ viene determinado por el punto O = (0, 0, 0,) y por los vectores $\vec{v}_\pi = (1, 2, 3)$ y $\vec{v}_{OZ} = (0, 0, 1)$.

Su ecuación es: $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 0 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y = 0$

c) Los puntos de intersección de π con los ejes coordenados son: A = (6, 0, 0), B = (0, 3, 0) y C = (0, 0, 2). Por tanto, el volumen del tetraedro vendrá dado por:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

Ejercicio 4

a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento vienen determinados por el signo de la derivada.

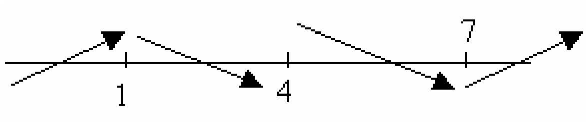
$f´(x) = (x-4)^2(x^2 - 8x + 7) = 0 \Rightarrow$ x = 4, x = 1, x = 7

$\rightarrow$ x = 1 y x = 7 son las soluciones de la ecuación $(x^2 - 8x + 7) = 0$

Por tanto:

si x < 1, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente
si 1 < x < 4, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente
si 4 < x < 7, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente
si x > 7, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente

En esquema:



b) Como la función crece a la izquierda de x = 1 y decrece a su derecha, en x = 1 hay un máximo. En x = 4 debe haber un punto de inflexión, pues la función decrece a ambos lados de x = 4.
En x = 7 hay un mínimo. La función decrece a la izquierda y crece a la derecha de x = 7.

c) Efectivamente, en x = 4 hay un PI como hemos justificado antes.
También puede estudiarse el valor de las derivadas segunda y tercera en ese punto. Veamos:

$$f''(x) = 2(x-4)(x^2-8x+7) + (x-4)^2(2x-8)$$
$$f'''(x) = 2(x^2-8x+7) + 2(x-4)(2x-8) + 2(x-4)(2x-8) + (x-4)^2 \cdot 2$$

Como $f''(4) = 0$ y $f'''(4) \neq 0$, en x = 4 se da un punto de inflexión.