Proyecto MaTEX

POLINOMIOS

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4

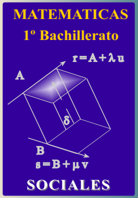


Tabla de Contenido

1. Polinomios

Definición 1.1 *Un polinomio, $P(x)$ en x es una expresión algebraica finita de sumas, diferencias y productos de x con valores numéricos constantes.*

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$$

Los números a_i son los coeficientes del polinomio. El grado del polinomio es el mayor exponente de x.

► Ejemplos de polinomios en x son:

a) $P(x) = 2\,x + 1$ es un polinomio de grado 1 o lineal.

b) $Q(x) = 3\,x^2 - 5\,x + 1$ es un polinomio de grado 2 o cuadrático.

c) $R(x) = 2\,x^3 - 4\,x^2 + 5$ es un polinomio de grado 3 o cúbico.

d) $T(x) = 2\,x^8 - 4\,x^6 + 5x - 1$ es un polinomio de grado 8.

Al referirnos al grado de un polinomio escribiremos abreviadamente $gr(P(x))$, así en los ejemplos anteriores tenemos

$$gr(P(x)) = 1 \qquad gr(Q(x)) = 2 \qquad gr(R(x)) = 3 \qquad gr(T(x)) = 8$$

◄◄ ►►
◄ ►
◄ Doc Doc ►
Volver Cerrar

1.1. Operaciones con los polinomios

- **Suma de polinomios**

  Para sumar dos polinomios se suman los términos semejantes.

Ejemplo 1.1. Sumar los polinomios

$$P(x) = 2\,x^4 - 5\,x^3 + 6x^2 - x + 3 \quad Q(x) = -x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 2x - 1.$$

Solución:

Para sumarlos es convenientes colocar los polinomios de forma que coincidan los términos semejantes o de igual grado.

$$\begin{array}{rrrrrr}
P(x) = & 2\,x^4 & -5\,x^3 & +6x^2 & -x & +3 \\
Q(x) = & -\,x^4 & +6\,x^3 & -5x^2 & -2x & -1 \\
\hline
P(x) + Q(x) = & x^4 & -\,x^3 & +x^2 & -3x & +2
\end{array}$$

$\square$

Ejercicio 1. Efectuar las sumas de los polinomios:

a) $P(x) = -3x^5 + 2x^4 - x^3 + 6x^2 - 7 \quad Q(x) = 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x$

b) $A(x) = 4 - 8x + 5x^2 - x^3 \quad B(x) = 5 + 6x - 5x^2$

- **Producto de polinomios**

Para multiplicar dos polinomios $P(x) \cdot Q(x)$ se multiplica cada término de uno de ellos por todos los términos del otro polinomio.

Ejemplo 1.2. Multiplicar los polinomios

$$P(x) = 7\,x^2 - 3\,x + 5 \qquad Q(x) = 2x - 3.$$

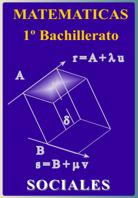
Solución:
Es conveniente disponer los cálculos como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{rrrrr}
P(x) = & & 7x^2 & -3x & +5 \\
Q(x) = & & & 2x & -3 \\
\hline
 & & -21x^2 & +9x & -15 \\
 & 14x^3 & -6x^2 & +10x & \\
\hline
P(x)\,Q(x) = & 14x^3 & -27x^2 & +19x & -15
\end{array}$$

$\square$

Ejercicio 2. Multiplicar los polinomios:

$$P(x) = 4x^2 - 3\,x + 2 \qquad Q(x) = x^2 + 2\,x - 5$$



• Cociente de polinomios

Algoritmo de la división. Los pasos a seguir para dividir dos polinomios,

$$\frac{N(x)}{D(x)} \qquad gra(N(x)) \geq gra(D(x))$$

siendo $N(x)$ el numerador o dividendo y $D(x)$ el divisor:

a) Ordenamos los términos del numerador $N(x)$ y del divisor $D(x)$ de forma que las potencias de x sean decrecientes.

b) Dividimos el primer término del numerador por el primer término del divisor. Esto da el primer término del cociente $C(x)$.

c) Ahora, multiplicamos el término del cociente calculado por el divisor y restamos al dividendo el producto calculado. El resultado es el resto.

- Si el grado del resto es menor que el grado del divisor, fin de la división.
- En caso contrario se divide el resto entre el divisor como en el apartado *b*) para calcular el siguiente término del cociente, y se repite el proceso.

Una vez hallados el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$ se puede expresar como,

$$\frac{N(x)}{D(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

▶ **Algoritmo de la división**

$$\begin{array}{rrrrr|l l}
2x^4 & +x^3 & +3\,x^2 & -5\,x & -12 & \color{red}{x^2-4} & \text{Divisor} \\ \cline{6-6}
 & & & & & 2x^2 & \text{Cociente}
\end{array}$$

Se divide el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor $2x^4 : x^2 = 2x^2$.

▶ **Algoritmo de la división**

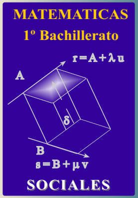
$$\begin{array}{rrrrr|l l}
2x^4 & +x^3 & +3\,x^2 & -5\,x & -12 & x^2-4 & \text{Divisor} \\ \cline{6-6}
-2x^4 & & +8\,x^2 & & & 2x^2 & \text{Cociente} \\ \cline{1-3}
 & x^3 & +5\,x^2 & -5\,x & -12 & &
\end{array}$$

Se multiplica $2x^2$ por el divisor y se cambia de signo para restárselo al dividendo

▶ Algoritmo de la división

$$
\begin{array}{rrrrr|l l}
2x^4 & +x^3 & +3\,x^2 & -5\,x & -12 & x^2-4 & \text{Divisor} \\ \cline{6-6}
-2x^4 & & +8\,x^2 & & & 2x^2+x & \text{Cociente} \\ \cline{1-3}
 & x^3 & +5\,x^2 & -5\,x & -12 & \text{resto parcial} & \\
 & -x^3 & & +4\,x & & & \\ \cline{2-4}
 & & +5\,x^2 & -x & -12 & &
\end{array}
$$

Se divide el término de mayor grado del resto parcial entre el término de mayor grado del divisor $x^3 : x^2 = x$.



▶ Algoritmo de la división

$$
\begin{array}{rrrrr|ll}
2x^4 & +x^3 & +3\,x^2 & -5\,x & -12 & x^2-4 & \text{Divisor} \\ \cline{6-6}
-2x^4 & & +8\,x^2 & & & 2x^2+x+5 & \text{Cociente} \\ \cline{1-3}
 & x^3 & +5\,x^2 & -5\,x & -12 & & \\
 & -x^3 & & +4\,x & & & \\ \cline{2-4}
 & & +5\,x^2 & -x & -12 & \text{resto parcial} & \\
 & & -5\,x^2 & & 20 & & \\ \cline{3-5}
 & & & -x & +8 & &
\end{array}
$$

Se divide el término de mayor grado del resto parcial entre el término de mayor grado del divisor $5x^2 : x^2 = 5$.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

► Algoritmo de la división

$$
\begin{array}{rrrrr|ll}
2x^4 & +x^3 & +3\,x^2 & -5\,x & -12 & \color{red}{x^2-4} & \text{Divisor} \\ \cline{6-6}
-2x^4 & & +8\,x^2 & & & 2x^2+x+5 & \text{Cociente} \\ \cline{1-3}
 & \color{red}{x^3} & +5\,x^2 & -5\,x & -12 & & \\
 & -x^3 & & +4\,x & & & \\ \cline{2-4}
 & & \color{red}{+5\,x^2} & -x & -12 & & \\
 & & -5\,x^2 & & 20 & & \\ \cline{3-5}
 & & & -x & +8 & \textbf{RESTO} &
\end{array}
$$

Cociente $C(x) = 2x^2 + x + 5$ Resto $R(x) = -x + 8$ y se cumple la relación

$$N(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$$

Cuando el grado del resto parcial es menor que el grado del divisor finaliza la división.

Ejercicio 3. Efectúa las divisiones de los polinomios.

$a)\ \dfrac{2x^3 - 3x^2 + x - 1}{x - 2}$ $\qquad b)\ \dfrac{4x^4 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$

Ejercicio 4. Efectúa las divisiones de los polinomios expresando la solución de la forma:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

$a)\ \dfrac{3x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x + 2}$ $\qquad b)\ \dfrac{3x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x^2 + 2}$

$c)\ \dfrac{4x^2 - 6x - 4}{2x + 1}$ $\qquad d)\ \dfrac{x^4 - 2x - 15}{x^2 - 5}$

$e)\ \dfrac{-2x^3 + 8x^2 + 3x + 5}{x^2 + x + 2}$ $\qquad f)\ \dfrac{x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 3x + 5}{x^2 + x + 2}$

MATEMATICAS 1º Bachillerato
r=A+λu
A
δ
B
s=B+μv
SOCIALES
MaTEX
Polinomios
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

1.2. División por $x - a$. Algoritmo de Ruffini

Cuando el divisor es de la forma $x - a$, la división se puede realizar de una forma sencilla con el algoritmo de Ruffini.
A la izquierda se realiza con la caja y a la derecha por Rufini para observar como aparecen los coeficientes del cociente y el valor del resto.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & -6x^2 & +5x & -11 & x-2 \\ \cline{5-5}
-4x^3 & +8x^2 & & & 4x^2+2x+9 \\ \cline{1-3}
 & 2x^2 & +5x & & \\
 & -2x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4}
 & & 9x & -11 & \\
 & & -9x & +18 & \\ \cline{3-4}
 & & & 7 &
\end{array}
$$

$$C(x) = 4x^2 + 2x + 9$$

$$Resto = 7$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 4 & -6 & 5 & -11 \\
2 & & & & \\ \hline
 & 4 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 4 & -6 & 5 & -11 \\
2 & & 8 & & \\ \hline
 & 4 & 2 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 4 & -6 & 5 & -11 \\
2 & & 8 & 4 & \\ \hline
 & 4 & 2 & 9 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 4 & -6 & 5 & -11 \\
2 & & 8 & 4 & 18 \\ \hline
 & 4 & 2 & 9 & \boxed{7}
\end{array}
$$

Ejemplo 1.3. Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios::

a) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x + 4}{x + 1}$ *b)* $\dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x + 1}$

c) $\dfrac{2x^3 - 15x - 8}{x - 3}$ *d)* $\dfrac{4x^3 + 4x^2 - 5x + 3}{x + 2}$

Solución:

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 2 & 4 \\
-1 & & -1 & 4 & -6 \\
\hline
 & 1 & -4 & 6 & \boxed{-2}
\end{array}$$
$C(x) = x^2 - 4x + 6$
$R(x) = -2$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
-1 & & -1 & 1 & -2 & 2 \\
\hline
 & 1 & -1 & 2 & -2 & \boxed{3}
\end{array}$$
$C(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$
$R(x) = 3$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 0 & -15 & -8 \\
3 & & 6 & 18 & 9 \\
\hline
 & 2 & 6 & 3 & \boxed{1}
\end{array}$$
$C(x) = 2x^2 + 6x + 3$
$R(x) = 1$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 4 & 4 & -5 & 3 \\
-2 & & -8 & 8 & -6 \\
\hline
 & 4 & -4 & 3 & \boxed{-3}
\end{array}$$
$C(x) = 4x^2 - 4x + 3$
$R(x) = -3$

□

1.3. Valor numérico de un polinomio. Teorema del Resto

Si en un polinomio sustituimos x por un valor numérico $x = a$ obtenemos el valor numérico del polinomio y lo indicamos como $P(a)$.

► Ejemplos de valor numérico de polinomios son:

a) En $x = 1$ el valor de $P(x) = 2\,x + 1$ es

$$P(1) = 2\,(1) + 1 = 3$$

b) En $x = 2$ el valor de $P(x) = 3\,x^2 - 5\,x + 1$ es

$$P(2) = 3\,(2)^2 - 5\,(2) + 1 = 3$$

c) En $x = 0$ el valor de $P(x) = 2\,x^3 - 4\,x^2 + 5$ es

$$P(0) = 2\,(0)^3 - 4\,(0)^2 + 5 = 5$$

Teorema 1.1. Teorema del resto.

El valor de $P(x)$ en $x = a$ coincide con el resto de $P(x) : (x - a)$

Ejemplo 1.4. Hallar el resto, sin dividir de $6\,x^2 - 5\,x - 6 : x - 1$.

Solución: El resto coincide con el valor numérico en $x = 1$.

$$P(1) = 6\,(1)^2 - 5\,(1) - 6 = -5$$

□

2. Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es un proceso inverso de desarrollar un producto de polinomios. Por ejemplo la expresión

$$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 3$$

observada de izquierda a derecha está desarrollada y vista de derecha a izquierda está factorizada. La factorización tiene varios usos matemáticos. Por ejemplo

Para simplificar fracciones algebraicas:

$$\begin{aligned} \frac{x^3+3x^2+2x}{x+1} &= \frac{x(x^2+3x+2)}{x+1} && \triangleleft \text{ factor común} \\ &= \frac{x(x+1)(x+2)}{x+1} && \triangleleft \text{ factorizando} \\ &= x(x+2) && \triangleleft \text{ simplificando} \end{aligned}$$

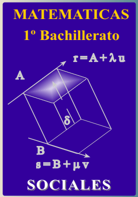
Para resolver ecuaciones: Si queremos resolver la ecuación

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 0$$

y el polinomio está factorizado

$$x(x+1)(x+2) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad x = -1 \quad x = -2$$

basta hallar los valores que anulan los factores.



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Según se pueda o no descomponer en factores un polinomio tenemos la siguiente clasificación

Reducible Un polinomio se llama **reducible** cuando se puede descomponer en producto de polinomios de grado mayor o igual que 1.

$$x^2 + 2x = x(x+2) \qquad \triangleleft \text{ reducible}$$
$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \qquad \triangleleft \text{ reducible}$$
$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x+2)(x-3) \qquad \triangleleft \text{ reducible}$$

Irreducible Un polinomio se llama **irreducible** cuando no se puede descomponer en producto de polinomios de menor grado.

Test. Considera el polinomio $P(x) = 2x^2 + 2$, como $P(x)$ se puede escribir como

$$P(x) = 2x^2 + 2 = 2\,(x^2 + 1)$$

significa esto que el polinomio es reducible?.

☐ Si. ☐ No.

Los polinomios $x^2 + 1$ y $x^2 + x + 1$ son irreducibles porque no se pueden descomponer en factores de menor grado.

Los factores de un polinomio pueden ser lineales o cuadráticos. Por ejemplo, el polinomio

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$$

tiene un factor lineal $x-1$ y un factor cuadrático x^2+1. El polinomio

$$(x-1)^3(x^2+1)$$

tiene el factor lineal $x-1$ que se repite 3 veces y decimos que es de multiplicidad 3, y el factor cuadrático irreducible x^2+1.

Ejemplo 2.1. Observa el siguiente polinomio descompuesto en factores:

$$x^3(2\,x+1)^4\,(x^2+1)^5(5-2\,x)^3\,(x^2+x+1)$$

y clasifica el tipo y multiplicidad de sus factores.

Solución:

Factor	Tipo	Multiplicidad
x^3	lineal	3
$(2\,x+1)^4$	lineal	4
$(x^2+1)^5$	cuadrático	5
$(5-2\,x)^3$	lineal	3
(x^2+x+1)	cuadrático	1

□

2.1. Raíz de un polinomio.

Definición 2.1 *Decimos que a es una raíz de $P(x)$ cuando $P(a) = 0$.*

► Ejemplos de raíces de polinomios son:

a) $x = 1$ es una raíz de $P(x) = 2\,x - 2$ pues, $P(1) = 2\,(1) - 2 = 0$.

b) $x = 2$ es una raíz de $P(x) = 3\,x^2 - 5\,x - 2$ pues, $P(2) = 3\,(2)^2 - 5\,(2) - 2 = 0$.

Inicio del Test Responde las siguientes cuestiones:

1. $x = -2$ es raíz de $x^2 - 4$ ☐ Cierto ☐ Falso

2. $x = -2$ es raíz de $3x^2 + 6x - 1$ ☐ Cierto ☐ Falso

3. $x = -2$ es raíz de $x^2 + 4x + 4$ ☐ Cierto ☐ Falso

4. $x = -1$ es raíz de $(x - 2)(x^2 + 1)$ ☐ Cierto ☐ Falso

5. $x = 3$ es raíz de $4x^4 - 2x^3 + 3x - 1$ ☐ Cierto ☐ Falso

Final del Test Puntos: Correctas

Teorema 2.1. Raíces y Factores lineales .

$$\boxed{x = a \text{ es una raíz de } P(x) \text{ si y solo si } (x - a) \text{ es un factor de } P(x)}$$

2.2. Métodos de Factorización

El método general de factorizar un polinomio es hallando sus raíces.

▶ **Factorización de polinomios cuadráticos** Para factorizar un polinomio cuadrático

$$P(x) = a\,x^2 + b\,x + c \qquad a \neq 0 \tag{1}$$

hallamos sus raíces con el algoritmo

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

Si las raíces son x_1 y x_2 el polinomio se factoriza de la forma

$$P(x) = a\,x^2 + b\,x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ejemplo 2.2. Factorizar $P(x) = x^2 - 3\,x - 4$.

Solución: Hallamos sus raíces:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow x_1 = -1 \qquad x_2 = 4$$

MaTEX

POLINOMIOS

luego

$$P(x) = x^2 - 3\,x - 4 = (x+1)(x-4)$$

$\square$

Ejemplo 2.3. Factorizar $P(x) = x^2 + 2\,x + 1$.

Solución: Hallamos sus raíces:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} \Rightarrow x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$$

luego

$$P(x) = x^2 + 2\,x + 1 = (x+1)(x+1) = (x+1)^2$$

$\square$

Ejemplo 2.4. Factorizar $P(x) = x^2 + x + 1$.

Solución: Hallamos sus raíces:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Rightarrow \text{ No tiene raíces}$$

luego $P(x) = x^2 + x + 1$ es Irreducible $\square$

Ejemplo 2.5. Factorizar el polinomio cuadrático $6\,x^2 + x - 1$.

Solución:

$$6\,x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$
\begin{aligned}
6\,x^2+x-1 &= 6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) && \lhd \text{ se opera}\\
&= 6\left(\frac{3\,x-1}{3}\right)\left(\frac{2\,x+1}{2}\right) && \lhd \text{ simplifica}\\
&= (3\,x-1)(2\,x+1)
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejemplo 2.6. Factorizar el polinomio cuadrático $8\,x^2+2\,x-1$.

Solución: $8\,x^2+2\,x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+32}}{16} \Longrightarrow x_1=\dfrac{1}{4} \quad x_2=-\dfrac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
8\,x^2+2\,x-1 &= 8\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) && \lhd \text{ se opera}\\
&= 8\left(\frac{4\,x-1}{3}\right)\left(\frac{2\,x+1}{2}\right) && \lhd \text{ simplifica}\\
&= (4\,x-1)(2\,x+1)
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejemplo 2.7. Factorizar el polinomio cuadrático $6\,x^2-5\,x-6$.

Solución: $6\,x^2-5\,x-6=0 \Longrightarrow x_1=3/2 \quad x_2=-2/3$

$$6\,x^2-5\,x-6=6(x-\frac{3}{2})(x+\frac{2}{3})=(2x-3)(3x+2)$$

$\square$

▶ **Factorización de $x^2 - a^2$** Para factorizar un polinomio cuadrático de la forma $x^2 - a^2$ es muy sencilla ya que se tiene

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

Ejemplo 2.8. Factorizar los polinomios cuadráticos siguientes.

a) $x^2 - 1$. *b*) $x^2 - 4$. *c*) $4\,x^2 - 9$.

Solución:

a) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

b) $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

c) $4\,x^2 - 9 = (2\,x - 3)(2\,x + 3)$

□

Ejercicio 5. Factorizar los polinomios cuadráticos siguientes.

a) $x^2 + 7\,x + 10$. *b*) $x^2 - 7\,x + 10$.

c) $x^2 - 3\,x - 10$. *d*) $x^2 + 3\,x - 10$.

e) $x^2 + 11\,x + 10$. *f*) $x^2 - 9\,x - 10$.

Ejercicio 6. Factorizar los polinomios cuadráticos siguientes.

a) $x^2 + 4\,x - 12.$ *b*) $x^2 + 3\,x - 18.$

c) $x^2 - 10\,x + 21.$ *d*) $x^2 + 7\,x - 8.$

e) $x^2 - 2\,x + 1.$ *f*) $2\,x^2 + 8\,x + 8.$

▶ Factorización de polinomios cúbicos

Para factorizar un polinomio cúbico

$$P(x) = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 \qquad a_3 \neq 0 \tag{3}$$

habrá que hallar sus raíces. El caso más sencillo es cuando $P(x)$ tenga alguna raíz entera. En este caso la raíz tiene que ser un divisor del término independiente. Esto se debe al siguiente teorema.

Teorema 2.2. Raíces enteras de un polinomio .

Si $x = a$ es una raíz entera de

$$P(x) = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$$

entonces a divide al término independiente a_0

Ejemplo 2.9. Factorizar $P(x) = x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6$.

Solución: Si hay una solución entera estará entre los divisores de 30.

		1	-2	-5	6
Aplicamos Ruffini con $x = 1$ $\triangleright$	1		1	-1	-6
Cociente $x^2 - x - 6$ $\triangleright$		1	-1	-6	$\boxed{0}$
Aplicamos Ruffini con $x = -2$ $\triangleright$	-2		-2	6	
Cociente $x - 3$ $\triangleright$		1	-3	$\boxed{0}$	
Aplicamos Ruffini con $x = 3$ $\triangleright$	3		3		
		1	$\boxed{0}$		

Luego la factorización de $P(x)$ tiene tres factores lineales:

$$P(x) = x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6 = (x-1)(x+2)(x-3).$$

□

Ejemplo 2.10. Factorizar $P(x) = x^4 + x^3 - 19\,x^2 + 11x + 30$.

Solución: Si hay una solución entera estará entre los divisores de 30.

		1	1	-19	11	30
Aplicamos Ruffini con $x = -1$ $\triangleright$	-1		-1	0	19	-30
Cociente $x^3 - 19x + 30$ $\triangleright$		1	0	-19	30	$\boxed{0}$
Aplicamos Ruffini con $x = 2$ $\triangleright$	2		2	4	-30	
Cociente $x^2 + 2x - 15$ $\triangleright$		1	2	-15	$\boxed{0}$	
Aplicamos Ruffini con $x = 3$ $\triangleright$	3		3	15		
Cociente $x + 5$ $\triangleright$		1	5	$\boxed{0}$		
Aplicamos Ruffini con $x = -5$ $\triangleright$	-5		-5			
		1	$\boxed{0}$			

Luego la factorización de $P(x)$ tiene cuatro factores lineales:

$$P(x) = x^4 + x^3 - 19\,x^2 + 11x + 30 = (x+1)(x-2)(x-3)(x+5)$$

$\square$

Ejemplo 2.11. Factorizar $P(x) = 3\,x^4 - 2\,x^3 + 2\,x - 3$.

Solución: Si hay una solución entera estará entre los divisores de -3.

		3	-2	0	2	-3
Aplicamos Ruffini con $x = 1$ ▷	1		3	1	1	3
Cociente $3x^3 + x^2 + x + 3$ ▷		3	1	1	3	$\boxed{0}$
Aplicamos Ruffini con $x = -1$ ▷	-1		-3	2	-3	
Cociente $3x^2 - 2x + 3$ ▷		3	-2	3	$\boxed{0}$	

El último cociente es cuadrático y con Ruffini no encontramos raíces. Resolvemos con la ecuación de 2º grado.

$$3x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-32}}{6} \Rightarrow \text{ No tiene raíces}$$

luego el último cociente $3x^2 - 2x + 3$ es irreducible. Luego la factorización de $P(x)$ tiene dos términos lineales y uno cuadrático irreducible.

$$P(x) = 3\,x^4 - 2\,x^3 + 2\,x - 3 = (x-1)(x+1)(3x^2 - 2x + 3)$$

□

Ejercicio 7. Descomponer en factores los polinomios.

a) $x^2 - 25.$

b) $3x^4 + 9\,x^2.$

c) $x^3 + x^2 + x.$

d) $3\,x^3 - 20\,x^2 + 27\,x - 10.$

e) $x^3 - 4\,x^2 + 5\,x - 2.$

f) $x^4 - 5\,x^3 + 9\,x^2 - 7\,x + 2.$

g) $x^4 - 6\,x^3 + 13\,x^2 - 12\,x + 4.$

h) $x^3 + 3\,x^2 - 4\,x - 12.$

Ejercicio 8. Descomponer en factores los polinomios.

a) $x^3 - 3\,x - 2.$

b) $3x^3 + 5x^2 - 2x.$

c) $x^4 - 3\,x^3 - 12\,x^2 + 52\,x - 48.$

d) $x^4 - 5\,x^3 + 5\,x^2 - x - 12.$

e) $x^3 - x^2 - 14\,x + 24.$

f) $2\,x^4 + 7\,x^3 + 4\,x^2 - 7\,x - 6.$

g) $x^3 - 13\,x^2 + 55\,x - 75.$

h) $x^3 + 2\,x + 3.$

i) $x^3 - 2\,x^2 - x + 2.$

j) $3\,x^4 - 2\,x^3 + 2\,x - 3.$

3. Fracciones Algebraicas

Definición 3.1 *Una fracción algebraica, es toda expresión de la forma*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

► Ejemplos de fracciones algebraicas son:

$$\frac{2\,x+1}{x}, \qquad \frac{x-5}{x^2+1}, \qquad \frac{2\,x^2+1}{x^3+3\,x}.$$

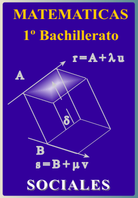
Definición 3.2 *Cuando en una fracción algebraica el numerador y denominador tienen factores comunes se llama reducible. En caso contrario se llama irreducible.*

$$\frac{2\,x+1}{x} \qquad \triangleleft \text{ irreducible}$$

$$\frac{x+1}{x^2+x} = \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1} \qquad \triangleleft \text{ reducible}$$

$$\frac{x^2+x}{x^2-1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x-1} \qquad \triangleleft \text{ reducible}$$

Ejercicio 9. Simplifica por factorización las fracciones algebraicas siguientes:



$a)\ \dfrac{14x^2 - 7x}{7x}$ $\qquad$ $b)\ \dfrac{4x^2 - 1}{4x^2 - 12x + 9}$

$c)\ \dfrac{2x^2 - 6x}{6x^2 - 54}$ $\qquad$ $d)\ \dfrac{x^2 - 18x + 81}{x^2 - 81}$

$e)\ \dfrac{x^2 + 8\,x + 16}{x^3 - 16\,x}$ $\qquad$ $f)\ \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$

3.1. Operaciones con fracciones algebraicas

- **Suma de fracciones algebraicas**

  Para sumar dos fracciones algebraicas se reduce a común denominador.

► Si tienen el mismo denominador, se suman los numeradores y se deja el mismo denominador.

$$\frac{2\,x + 1}{x + 1} + \frac{3x}{x + 1} = \frac{5\,x + 1}{x + 1}$$

► Si tienen distinto denominador, se calcula el común denominador, que es el mínimo común múltiplo **m.c.m.** de los denominadores.

MATEMATICAS 1º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
POLINOMIOS
Doc Doc
Volver Cerrar

Ejemplo 3.1.

$$\frac{x+1}{x+2} + \frac{3-x}{x+1} = \frac{(x+1)(x+1)+(3-x)(x+2)}{(x+2)(x+1)} \qquad \mathbf{m.c.m} = (x+2)(x+1)$$

$$= \frac{3x-5}{(x+2)(x+1)} \qquad \triangleleft \text{ operando}$$

Ejemplo 3.2.

$$\frac{2\,x+1}{x+1} + \frac{3x}{x^2-1} = \frac{2\,x+1}{x+1} + \frac{3x}{(x-1)(x+1)} \qquad \mathbf{m.c.m} = (x-1)(x+1)$$

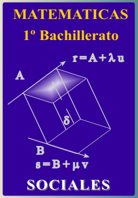
$$= \frac{(2x+1)(x-1)+3x}{(x-1)(x+1)} \qquad \triangleleft \text{ operando}$$

$$= \frac{2x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)}$$

Ejercicio 10. Efectúa las sumas reduciendo a común denominador.

a) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{3}{x^2-1}$ *b)* $\dfrac{1}{x^2+x} + \dfrac{3}{x+1}$

c) $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{3}{4x^2-4x}$ *d)* $\dfrac{1}{x^2+x} + \dfrac{3}{x^2-x}$



• Producto y división de fracciones algebraicas

Para multiplicar o dividir dos fracciones algebraicas se efectúa:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot R(x)}{Q(x) \cdot S(x)}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot S(x)}{Q(x) \cdot R(x)}$$

Ejemplo 3.3.

$$\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+3}{x} = \frac{x(x+3)}{(x+1)x} = \frac{x+3}{x+1}$$

$$\frac{x}{x+1} : \frac{x+3}{x} = \frac{x \cdot x}{(x+1)\cdot(x+3)} = \frac{x^2}{x^2+4x+3}$$

$$\frac{x}{x^2-1} : \frac{3}{x+1} = \frac{x(x+1)}{3(x+1)(x-1)} = \frac{x}{3(x-1)}$$

Ejercicio 11. Opera y simplifica las fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{3x+3}{12x-12} : \dfrac{(x+1)^2}{x^2-1}$ *b)* $\dfrac{x^2+2x-3}{(x-2)^3} \cdot \dfrac{(x-2)^2}{x^2-1}$

Ejercicio 12. Calcula y simplifica si es posible:

a) $\dfrac{2x}{5} \cdot \dfrac{1-3x}{x^2+2x}$

b) $\dfrac{6x+4}{x-2} \cdot \dfrac{4x+1}{2x+4}$

c) $\dfrac{-6x^2}{x^2+2x+1} \cdot \dfrac{x+1}{3x^3} \cdot \dfrac{x+1}{3x}$

d) $\dfrac{4x^2-9}{7x} \cdot \dfrac{3}{3-2x}$

Ejercicio 13. Simplificar:

a) $\dfrac{x^2+1}{x} \cdot \dfrac{y^2+1}{y} + \dfrac{x^2-1}{y} \cdot \dfrac{y^2-1}{x}$

b) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} : \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+12}$

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

$$a)\quad \begin{array}{rrrrrrr} P(x) = & -3x^5 & +2\,x^4 & -\,x^3 & +6x^2 & & -7 \\ Q(x) = & & 2\,x^4 & -2\,x^3 & +5x^2 & +x & \\ \hline P(x)+Q(x) = & -3x^5 & 4\,x^4 & -3\,x^3 & +11\,x^2 & +x & -7 \end{array}$$

$$b)\quad \begin{array}{rrrrr} A(x) = & -\,x^3 & +5x^2 & -8\,x & +4 \\ B(x) = & & -5x^2 & +6x & 5 \\ \hline A(x)+B(x) = & -\,x^3 & & -2\,x & +9 \end{array}$$

Ejercicio 1

MaTEX

POLINOMIOS

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 2.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
P(x) = & & & 4x^2 & -3x & +2 \\
Q(x) = & & & x^2 & +2x & -5 \\
\hline
 & & & -20x^2 & +15x & -10 \\
 & & 8x^3 & -6x^2 & +4x & \\
 & 4x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & \\
\hline
P(x)\,Q(x) = & 4x^4 & +5x^3 & -24x^2 & +19x & -10
\end{array}
$$

Ejercicio 2

Doc Doc Volver Cerrar

Ejercicio 3.

a) $$\frac{2x^3-3x^2+x-1}{x-2}=2x^2+x+3+\frac{5}{x-2}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -3\,x^2 & +x & -1 & \color{red}{x-2} \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +4\,x^2 & & & 2x^2+x+3 \\ \cline{1-3}
 & x^2 & +x & -1 & \\
 & -x^2 & +2\,x & & \\ \cline{2-4}
 & & 3x & -1 & \\
 & & -3\,x & +6 & \\ \cline{3-4}
 & & & +5 &
\end{array}$$

b) $$\frac{4x^4+2x^2+x+1}{x^2+1}=4x^2-2+\frac{x+3}{x^2+1}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
4x^4 & +2\,x^2 & +x & +1 & \color{red}{x^2+1} \\ \cline{5-5}
-4x^4 & -4\,x^2 & & & 4x^2-2 \\ \cline{1-2}
 & -2x^2 & +x & +1 & \\
 & 2x^2 & & +2 & \\ \cline{2-4}
 & & x & +3 &
\end{array}$$

Ejercicio 3

Ejercicio 4.

a) $$\frac{3x^3+4x^2+5x-1}{x+2} = 3x^2-2x+9-\frac{19}{x+2}$$

b) $$\frac{3x^3+4x^2+5x-1}{x^2+2} = 3x+4-\frac{x+9}{x^2+2}$$

c) $$\frac{4x^2-6x-4}{2x+1} = 2x-4$$

d) $$\frac{x^4-2x-15}{x^2-5} = x^2+5+\frac{-2x+10}{x^2-5}$$

e) $$\frac{-2x^3+8x^2+3x+5}{x^2+x+2} = -2x+10-\frac{3x+15}{x^2+x+2}$$

f) $$\frac{x^4-2x^3+8x^2+3x+5}{x^2+x+2} = x^2-3x+9-\frac{13}{x^2+x+2}$$

Ejercicio 4

Prueba del Teorema 1.1. En efecto, si dividimos $P(x) : (x-a)$ obtendremos un cociente $C(x)$ y un resto R, de forma que

$$P(x) = (x-a) \cdot C(x) + R$$

Sustituyendo x por a en la expresión anterior

$$P(a) = (a-a) \cdot C(a) + R = 0 + R = R$$

◀

Prueba del Teorema 2.1. En efecto:

▶ Si $x = a$ es una raíz de $P(x)$, al dividir $P(x) : (x - a)$ obtendremos un cociente $C(x)$ y un resto R, de forma que

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$$

Sustituyendo x por a en la expresión anterior

$$P(a) = (a - a) \cdot C(a) + R = 0 + R = R = 0$$

como $R = 0$ la división es exacta y se tiene que $P(x) = (x - a) \cdot C(x)$, y por tanto $x - a$ es un factor de $P(x)$.

▶ Si $(x - a)$ es un factor de $P(x)$, entonces se tiene que

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x)$$

y al sustituir por a, el valor de $P(a)$ es 0, y por tanto $x = a$ es una raíz de $P(x)$. ◀

Ejercicio 5.

a) $x^2 + 7\,x + 10 = (x+2)(x+5)$

b) $x^2 - 7\,x + 10) = (x-2)(x-5)$

c) $x^2 - 3\,x - 10 = (x+2)(x-5)$

d) $x^2 + 3\,x - 10 = (x-2)(x+5)$

e) $x^2 + 11\,x + 10 = (x+1)(x+10)$

f) $x^2 - 9\,x - 10 = (x+1)(x-10)$

Ejercicio 5

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 6.

a) $x^2 + 4\,x - 12 = (x-2)(x+6)$

b) $x^2 + 3\,x - 18 = (x+6)(x-3)$

c) $x^2 - 10\,x + 21 = (x-3)(x-7)$

d) $x^2 + 7\,x - 8 = (x-1)(x+8)$

e) $x^2 - 2\,x + 1 = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$

f) $2\,x^2 + 8\,x + 8 = 2(x+2)^2$

Ejercicio 6

Prueba del Teorema 2.2. En efecto, si a es una raíz de $P(x)$ se tiene que al dividir $P(x) : (x - a)$ obtendremos un cociente $C(x)$, de forma que

$$P(x) = a_3\, x^3 + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0 = (x - a) \cdot C(x)$$

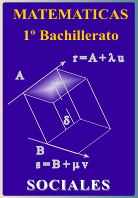
Sustituyendo x por a en la expresión anterior

$$a_3\, a^3 + a_2\, a^2 + a_1\, a + a_0 = (a - a) \cdot C(a) = 0$$

y despejando a_0 observamos que a_0 es un múltiplo de a

$$a_0 = -a(a_3\, a^2 + a_2\, a + a_1)$$

y por tanto a es un divisor del término independiente a_0 de $P(x)$. ◀



Ejercicio 7.

$a)$ $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$

$b)$ $3x^4 + 9\,x^2 = 3\,x^2(x^2+3)$

$c)$ $x^3 + x^2 + x = x(x^2+x+1)$

$d)$ $3\,x^3 - 20\,x^2 + 27\,x - 10 = (x-1)(x-5)(3x-2)$

$e)$ $x^3 - 4\,x^2 + 5\,x - 2 = (x-1)^2(x-2)$

$f)$ $x^4 - 5\,x^3 + 9\,x^2 - 7\,x + 2 = (x-1)^3(x-2)$

$g)$ $x^4 - 6\,x^3 + 13\,x^2 - 12\,x + 4 = (x-1)^2(x-2)^2$

$h)$ $x^3 + 3\,x^2 - 4\,x - 12 = (x+3)(x+2)(x-2)$

Ejercicio 7

Ejercicio 8.

a) $x^3 - 3\,x - 2 = (x+1)^2(x-2)$

b) $3x^3 + 5x^2 - 2x = x(x+2)(3x-1)$

c) $x^4 - 3\,x^3 - 12\,x^2 + 52\,x - 48 = (x-2)^2(x-3)(x+4)$

d) $x^4 - 5\,x^3 + 5\,x^2 - \; x - 12 = (x+1)(x-4)(x^2-2x+3)$

e) $x^3 - x^2 - 14\,x + 24 = (x-2)(x-3)(x+4)$

f) $2\,x^4 + 7\,x^3 + 4\,x^2 - 7\,x - 6 = (x-1)(x+1)(x+2)(2x+3)$

g) $x^3 - 13\,x^2 + 55\,x - 75 = (x-5)^2(x-3)$

h) $x^3 + 2\,x + 3 = (x+1)(x^2-x+3)$

i) $x^3 - 2\,x^2 - \; x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$

j) $3\,x^4 - 2\,x^3 + 2\,x - 3 = (x+1)(x-1)(3\,x^2 - 2\,x + 3)$

Ejercicio 8

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 9.

a) $$\frac{14x^2-7x}{7x}=\frac{7x(2x-1)}{7x}=2x-1$$

b) $$\frac{4x^2-9}{4x^2-12x+9}=\frac{(2x-3)(2x+3)}{(2x-3)^2}=\frac{2x+3}{2x-3}$$

c) $$\frac{2x^2-6x}{6x^2-54}=\frac{2x(x-3)}{6(x-3)(x+3)}=\frac{x}{3(x+3)}$$

d) $$\frac{x^2-18x+81}{x^2-81}=\frac{(x-9)^2}{(x-9)(x+9)}=\frac{x-9}{x+9}$$

e) $$\frac{x^2+8\,x+16}{x^3-16\,x}=\frac{(x+4)^2}{x(x-4)(x+4)}=\frac{x+4}{x(x-4)}$$

f) $$\frac{x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x-1}$$

Ejercicio 9

Ejercicio 10.

a) $m.c.m. = (x-1)(x+1)$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x^2-1} = \frac{(x-1)+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{(x-1)(x+1)}$$

b) $m.c.m. = x(x+1)$

$$\frac{1}{x^2+x} + \frac{3}{x+1} = \frac{1+3x}{(x-1)(x+1)}$$

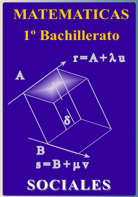
c) $m.c.m. = 4x(x-1)$

$$\frac{1}{2x} - \frac{3}{4x(x-1)} = \frac{2(x-1)-3}{4x(x-1)} = \frac{2x-5}{4x(x-1)}$$

d) $m.c.m. = x(x-1)(x+1)$

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{3}{x(x-1)} = \frac{(x-1)+3(x+1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{4x+2}{x(x+1)(x-1)}$$

Ejercicio 10



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 11.

a)

$$\begin{aligned}
\frac{3x+3}{12x-12} : \frac{(x+1)^2}{x^2-1} &= \frac{(3x+3)(x^2-1)}{(12x-12)(x+1)^2} && \triangleleft \text{ se opera} \\
&= \frac{3(x+1)(x-1)(x+1)}{12(x-1)(x+1)^2} && \triangleleft \text{ factorizando} \\
&= \frac{1}{4} && \triangleleft \text{ simplificando}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2x-3}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2-1} &= \frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{(x-1)(x+1)} && \triangleleft \text{ factorizando} \\
&= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)} && \triangleleft \text{ simplificando}
\end{aligned}$$

Ejercicio 11

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 12.

a)

$$\frac{2x}{5}\cdot\frac{1-3x}{x^2+2x}=\frac{2x(1-3x)}{5x(x+2)}=\frac{2(1-3x)}{5(x+2)}$$

b)

$$\frac{6x+4}{x-2}\cdot\frac{4x+1}{2x+4}=\frac{2(3x+2)(4x+1)}{2(x-2)(x+2)}=\frac{(3x+2)(4x+1)}{(x-2)(x+2)}$$

c)

$$\frac{-6x^2}{x^2+2x+1}\cdot\frac{x+1}{3x^3}\cdot\frac{x+1}{3x}=-\frac{6x^2(x+1)^2}{9(x+1)^2x^4}=-\frac{2}{3x^2}$$

d)

$$\frac{4x^2-9}{7x}\cdot\frac{3}{3-2x}=\frac{3(2x-3)(2x+3)}{7x(3-2x)}=-\frac{3(2x+3)}{7}$$

Ejercicio 12

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 13.

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{y^2+1}{y}+\frac{x^2-1}{y}\cdot\frac{y^2-1}{x}= \\
&\quad=\frac{(x^2+1)(y^2+1)}{x\,y}+\frac{(x^2-1)(y^2-1)}{x\,y}= \\
&\quad=\frac{x^2\,y^2+x^2+y^2+1+x^2\,y^2-x^2-y^2+1}{x\,y} \\
&\quad=\frac{2\,x^2\,y^2+2}{x\,y}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}:\frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+12}= && \triangleleft \text{ se opera} \\
&\quad=\frac{(x^2-3x+2)(x^2-7x+12)}{(x^2-5x+6)(x^2-5x+4)} && \triangleleft \text{ factorizando} \\
&\quad=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-1)}=\boxed{1} && \triangleleft \text{ simplificando}
\end{aligned}$$

Ejercicio 13

Soluciones a los Tests

Solución al Test: La respuesta es que no es reducible, pues hemos definido polinomio reducible cuando se puede descomponer en producto de polinomios de grado mayor o igual que 1. Si escribimos

$$P(x) = 2x^2 + 2 = 2\,(x^2 + 1)$$

El factor 2 es un polinomio, pero de grado 0 y no se ajusta a la definición, luego $2x^2 + 2$ así como $x^2 + 1$ son polinomios irreducibles. Final del Test

Índice alfabético