

Proyecto MaTeX

Probabilidad

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)

© 2004 javier.gonzalez@unican.es
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTeX

PROBABILIDAD

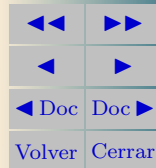


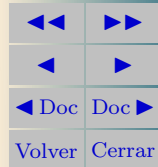
Tabla de Contenido

1. Introducción
 - 1.1. Sucesos
 - 1.2. Operaciones con sucesos
2. Probabilidad
 - 2.1. Definición de Laplace
 - 2.2. Definición axiomática
 - Propiedades
3. Probabilidad condicionada
 - 3.1. Sucesos Independientes
 - 3.2. Teoremas
 - Probabilidad Total • Teorema de Bayes
4. Ejercicios
 - Soluciones a los Ejercicios
 - Soluciones a los Tests



MaTeX

PROBABILIDAD





1. Introducción

En el capítulo **Descriptiva** se abordó el estudio de los métodos más importantes para medir y describir la variabilidad en muestras. En este capítulo estudiaremos el modelo básico para el estudio de la variabilidad en *poblaciones*: éste es el modelo de probabilidad.

Estamos interesados en estudiar un cierto tipo de experimentos que llamaremos experimentos aleatorios. Algunos ejemplos de este tipo de experimentos son:

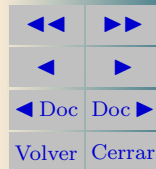
- Se lanza una moneda y se observa el resultado (cara o cruz).
- Se pone a girar una ruleta y se observa el número o el color que sale. Se puede apostar a un conjunto de números o de colores.
- Se toma una cierta cantidad de un aceite y se determina el porcentaje que contiene de una determinada substancia.

Definición 1.1 (**Experimento aleatorio**) *Decimos que un experimento es aleatorio cuando al realizarse bajo condiciones específicas*

- existe más de un posible resultado del experimento,*
- se conoce de antemano cuáles son todos los posibles resultados,*
- en cada realización del experimento, se desconoce el resultado concreto que ocurrirá de entre todos los posibles.*

MaTEX

PROBABILIDAD





1.1. Sucesos

Experimento aleatorio, se lanza un dado.

El espacio muestral es el conjunto de todos los resultados posibles

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Suceso elemental tiene un único resultado posible, por ejemplo

$$A = \{\text{multiplo de } 5\} = \{5\}$$

Suceso compuesto tiene un más de un resultado posible, por ejemplo

$$B = \{\text{sacar par}\} = \{2, 4, 6\}$$

Suceso seguro es el que siempre ocurre, por ejemplo

$$\Omega = \{\text{sacar menos que } 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Suceso imposible es el que nunca ocurre, por ejemplo

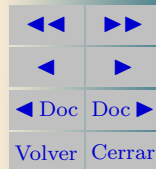
$$\emptyset = \{\text{sacar mayor que } 6\} = \{\}$$

Suceso contrario o complementario \bar{A} es la negación del suceso A , por ejemplo

$$A = \{\text{sacar par}\} = \{2, 4, 6\} \quad \bar{A} = \{\text{sacar impar}\} = \{1, 3, 5\}$$

MaTEX

PROBABILIDAD





1.2. Operaciones con sucesos

En el experimento aleatorio, lanzar un dado, donde el espacio muestral es el conjunto de todos los resultados posibles $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, considera los sucesos

$$A = \{\text{sacar par}\} = \{2, 4, 6\} \quad B = \{\text{multiplo de 3}\} = \{3, 6\}$$

Se definen las siguientes operaciones con sucesos:

☞ Suceso **intersección** $A \cap B$
cuando ocurren a la vez A y B

$$A \cap B = \{6\}$$

☞ Suceso **contrario** \bar{A} cuando no ocurre A

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

☞ Suceso **unión** $A \cup B$ cuando ocurre A o B

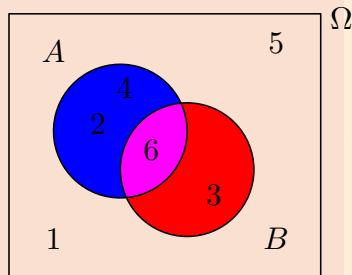
$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$

☞ Suceso **diferencia** $A - B$ cuando ocurre A y no B

$$A - B = \{2, 4\}$$

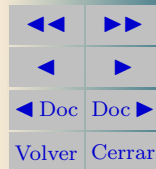
☞ Dos sucesos se dicen **incompatibles** cuando no pueden ocurrir a la vez

$$A \cap B = \emptyset$$



MaTeX

PROBABILIDAD





Test. Sea el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sean los sucesos

$$A = \{2, 5, 6\} \quad B = \{1, 3, 4, 5\} \quad C = \{4, 5, 6\} \quad D = \{3\}$$

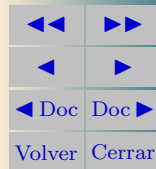
Escribe los sucesos siguientes¹:

1. $A \cup B$
2. $A \cap C$
3. \bar{A}
4. $C - B$
5. $\bar{A} \cap C$
6. $\bar{A} \cap \bar{C}$
7. $A - C$
8. $A - D$

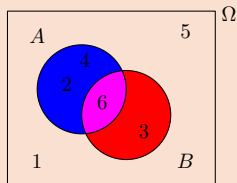
MaTEX

PROBABILIDAD

¹separando con comas y ordenados de menor a mayor. Si es vacío escribe 0 y si es el total escribe E



Inicio del Test Contesta las siguientes cuestiones sobre el diagrama de sucesos



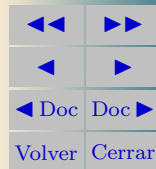
- El suceso en azul corresponde a:
 - A
 - $A - B$
 - $B - A$
- El suceso en azul corresponde a:
 - A
 - $A \cap \overline{B}$
 - $B - A$
- El suceso en rojo corresponde a:
 - B
 - $A \cup B$
 - $B - A$
- El suceso en rojo corresponde a:
 - $(A \cup B) - A$
 - $B - (A \cap B)$
 - los dos anteriores
- El suceso en rosa corresponde a:
 - $A \cup B$
 - $A \cap B$
 - $A - B$

Final del Test



MaTeX

PROBABILIDAD





2. Probabilidad

2.1. Definición de Laplace

Para calcular la probabilidad de un suceso usaremos la definición clásica

Definición 2.1 *La probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso A y el número de casos posibles del espacio muestral Ω*

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$|A|$ indica el número de elementos de A y $|\Omega|$ indica el número de elementos de Ω .

Ejemplo 2.1. En el experimento aleatorio, lanzar un dado, donde el espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, consideramos los siguientes sucesos:

$$A = \{\text{sacar par}\} = \{2, 4, 6\} \implies P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

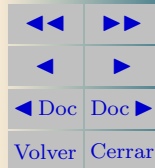
$$B = \{\text{sacar impar}\} = \{1, 3, 5\} \implies P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{\text{múltiplo de 3}\} = \{3, 6\} \implies P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$D = \{\text{número primo}\} = \{2, 3, 5\} \implies P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

MaTeX

PROBABILIDAD



Test. Una urna tiene 8 bolas rojas, cinco amarillas y siete verdes. Se extrae una bola al azar. Escribe las probabilidades siguientes:

1. Sea roja =
2. Sea verde =
3. No sea roja =
4. Sea roja o verde =

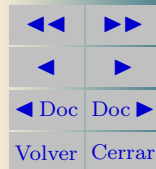
Test. De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta al azar. Escribe las probabilidades siguientes:

1. Sea de oros =
2. Sea una figura =
3. Sea figura de copas =
4. Sea figura o copas =



MaTeX

PROBABILIDAD



Ejemplo 2.2. Se clasifican 1500 personas según sean hombre o mujer y según fume o no fume. La clasificación se recoge en la tabla

	Mujer M	Hombre H	
Fuma F	200	800	1000
No fuma \bar{F}	300	200	500
	500	1000	1500

Hallar la probabilidad de que una persona elegida al azar:

- Sea mujer.
- Fume
- Sea un hombre fumador.

Solución:

$$a) \text{ Sea mujer, } p(M) = \frac{|M|}{|\Omega|} = \frac{500}{1500} = \frac{1}{3}$$

$$b) \text{ Fume, } p(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{1000}{1500} = \frac{2}{3}$$

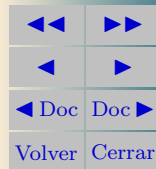
$$c) \text{ Sea un hombre fumador, } p(F \cap H) = \frac{|F \cap H|}{|\Omega|} = \frac{800}{1500} = \frac{8}{15}$$

□



MaTeX

PROBABILIDAD



Ejercicio 1. Una experiencia aleatoria consiste en preguntar a tres personas distintas, elegidas al azar, si son partidarias o no de consumir un determinado producto.

- Escribe el espacio muestral asociado a dicho experimento utilizando la letra “s” para las respuestas afirmativas y la “n” para las negativas.
- ¿Qué elementos del espacio muestral anterior constituyen el suceso $B =$ “al menos dos de las personas son partidarias de consumir el producto”?
- Describe el suceso contrario de “*más de una persona es partidaria de consumir el producto*”

Ejercicio 2. Se lanzan dos dados. Hallar la probabilidad de que:

- La suma de los puntos sea 2
- La suma de los puntos sea 7
- La suma de los puntos sea 10

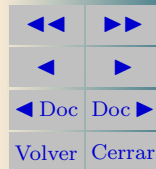
Ejercicio 3. Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Hallar la probabilidad de que la carta extraída :

- sea de oros.
- sea una figura.
- sea de figura de espadas.



MaTeX

PROBABILIDAD





2.2. Definición axiomática

Definición 2.2 La probabilidad P es una función definida sobre los sucesos de un espacio muestral Ω , y cuyos valores son números reales, que verifica los axiomas:

- $P(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega. P(\Omega) = 1$
- Si A_1, A_2, \dots, A_n son incompatibles dos a dos

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (1)$$

• Propiedades

Propiedad 1.. Sea el suceso A y su contrario \bar{A} , entonces se verifica

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Propiedad 2.. De la unión de sucesos Sean los sucesos A y B , entonces se verifica

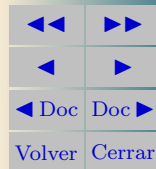
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (2)$$

Propiedad 3.. De la diferencia Sean los sucesos A y B , entonces se verifica

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad (3)$$

MaTeX

PROBABILIDAD





Ejemplo 2.3. De los sucesos A y B se sabe que:

$$P(A) = 0,6 \quad P(B) = 0,3 \quad P(A \cap B) = 0,2$$

Hallar:

- a) $P(A \cup B)$
- b) $P(\bar{A})$
- c) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$
- d) $P(A \cap \bar{B})$
- e) $P(B \cap \bar{A})$

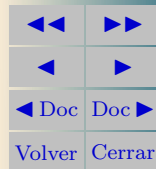
Solución:

- a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,3 - 0,2 = 0,7$
- b) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$
- c) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,7 = 0,3$
- d) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,2 = 0,4$
- e) $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0,3 - 0,2 = 0,1$

□

MaTEX

PROBABILIDAD





3. Probabilidad condicionada

Empezaremos con un ejemplo. Se clasifican 1500 personas según sean hombre o mujer y según fumen o no fumen.

	Mujer M	Hombre H	
Fuma F	200	800	1000
No fuma \bar{F}	300	200	500
	500	1000	1500

Si elegimos una persona, la probabilidad de que fume es

$$P(F) = \frac{1000}{1500} = \frac{2}{3}$$

Si supiésemos que la persona elegida es una mujer, el suceso “fumar condicionado a que es mujer” se escribe como $F|M$ y la probabilidad de que fume, ahora es

$$P(F|M) = \frac{200}{500} = \frac{|F \cap M|}{|M|} = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{2}{5}$$

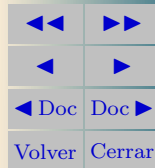
y de aquí, pasamos a la definición de **Probabilidad condicionada**

Definición 3.1 La probabilidad de un suceso A condicionado a otro B se define como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (4)$$

MaTeX

PROBABILIDAD





3.1. Sucesos Independientes

Definición 3.2 Dos sucesos A y B se dicen *independientes* cuando la ocurrencia de uno de ellos no altera la probabilidad del otro

$$P(A|B) = P(A) \quad (5)$$

Teorema 3.0. Si A y B son independientes, se cumple que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (6)$$

Ejemplo 3.1. Comprobar que los sucesos fumar F y ser mujer M son independientes en la clasificación de la tabla

	Mujer M	Hombre H	
Fuma F	200	600	800
No fuma \bar{F}	100	300	400
	300	900	1200

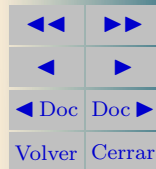
Solución: Se verifica la condición (6)

$$\left. \begin{array}{l} P(F \cap M) = \frac{200}{1200} = \frac{1}{6} \\ P(F) = \frac{2}{3} \quad P(M) = \frac{1}{4} \end{array} \right\} P(F \cap M) = P(F) \cdot P(M)$$

luego los sucesos fumar F y ser mujer M son independientes. \square

MaTeX

PROBABILIDAD



Ejercicio 4. Dados los sucesos A y B , y sabiendo que

$$P(A) = \frac{3}{4} \quad P(B) = \frac{1}{8} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

calcular:

a) $P(A|B)$

b) $P(\bar{A}|B)$

c) $P(A \cup B)$

Ejercicio 5. En un estudio sobre la relación entre el tabaco y el cáncer de pulmón se ha clasificado a 200 personas según fueran fumadoras o no, y según padecieran cáncer de pulmón o no. La tabla siguiente presenta los resultados obtenidos:

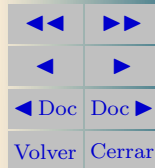
	Fumadores	No fumadores
Con cáncer	70	30
Sin cáncer	40	60

- a) Calcula la probabilidad de que una persona sea fumadora y padezca cáncer de pulmón.
- b) Calcula la probabilidad de que una persona padezca cáncer.
- c) ¿Son independientes los sucesos “ser fumador” y “padecer cáncer de pulmón”?



MaTeX

PROBABILIDAD



3.2. Teoremas

Para entender el teorema de la probabilidad total lo explicaremos con un ejemplo.

Sea Ω el conjunto de todos los alumnos de tu instituto y sean A_i las aulas del instituto, de forma que la unión de las aulas cubre todo el centro. Ahora sea el suceso B de los alumnos que tienen beca.

Para contar B podemos hacerlo contando los alumnos que tienen beca en cada aula, y sumarlos todos, es decir,

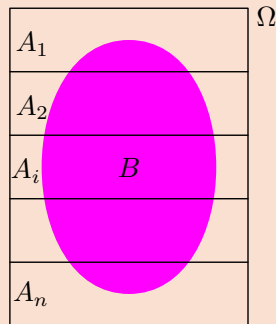
$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$
luego

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

como $P(B \cap A_i) = P(B|A_i) \cdot P(A_i)$, se obtiene al expresión

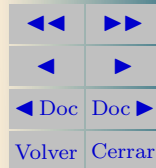
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

esto se expresa de forma general en el teorema siguiente



MaTeX

PROBABILIDAD





• Probabilidad Total

Teorema 3.0. Sea A_i una partición de Ω , $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ y el suceso $B \subset \Omega$, entonces se cumple

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i) \quad (7)$$

• Teorema de Bayes

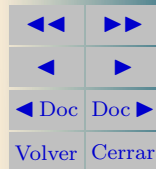
Teorema 3.0. Sea A_i una partición de Ω , $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ y el suceso $B \subset \Omega$, entonces se cumple

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)} \quad (8)$$

A $P(A_i)$ se le llama *probabilidad a priori* del suceso A_i . Supongamos que recibimos la información de que ha ocurrido el suceso B . Entonces la probabilidad de A_i pasa a ser $P(A_i|B)$ y se calcula con la fórmula del teorema de Bayes. A $P(A_i|B)$ se le llama *probabilidad a posteriori* del suceso A_i . A las probabilidades $P(B|A_i)$, que son necesarias para poder usar la fórmula del teorema, se le llama *verosimilitudes* del suceso B supuesto que hubiera ocurrido cada uno de los sucesos A_i .

MaTEX

PROBABILIDAD



Ejemplo 3.2. Se tienen tres urnas: la A que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la B tres blancas y tres rojas; y la C con una blanca y cinco rojas. Se elige una urna al azar y se extrae una bola de ella.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca?
 b) Si la bola extraída resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

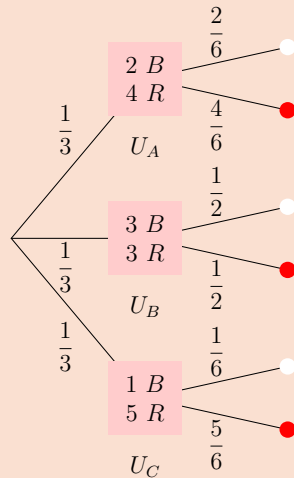
Sea B bola blanca, del diagrama se tiene

- a) Probabilidad de sacar bola blanca:

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

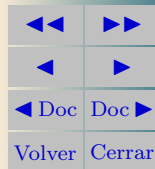
- b) Si extraemos blanca, la probabilidad de que la urna elegida haya sido la U_B , por Bayes se tiene:

$$\begin{aligned} P(U_B|B) &= \frac{P(U_B) \cdot P(B|U_B)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



MaTeX

PROBABILIDAD





4. Ejercicios

Ejercicio 6. Se tienen dos monedas, una sin trucar y otra trucada. Sabiendo que con la moneda trucada la probabilidad de obtener cruz es triple que la probabilidad de obtener cara calcular la probabilidad de que al lanzar las dos monedas:

- se obtengan dos caras.
- no se obtenga ninguna cara.
- se obtenga una cara y una cruz.
- se obtengan dos caras o dos cruces.

Ejercicio 7. De los sucesos A y B se sabe que:

$$P(A) = \frac{2}{5} \quad P(B) = \frac{1}{3} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{1}{3}$$

Hallar:

- $P(A \cap B)$
- $P(A \cup B)$

Ejercicio 8. Sean los sucesos A y B de un experimento aleatorio, con $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,2$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,7$, calcular:

- $P(A \cap B)$ y decir si A y B son independientes
- $P(A \cup B)$

MaTeX

PROBABILIDAD



Ejercicio 9. La fabricación de cierto tipo de objetos se hace en dos fases. La probabilidad de un defecto en la primera fase es de 0,04 y la probabilidad de un defecto en la segunda es de 0,01. ¿Cuál es la probabilidad de que un objeto así fabricado, elegido al azar, no sea defectuoso?

Ejercicio 10. Las probabilidades de que tres tiradores den en el blanco son, respectivamente, de $1/6$, $1/4$ y $1/3$. Cada tirador efectúa un solo disparo. Encuentre la probabilidad de que solamente un tirador dé en el blanco.

Ejercicio 11. En un albergue coinciden 10 personas entre las cuales hay 6 que hablan español, 2 que hablan inglés y 2 que hablan ambos idiomas. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas elegidas al azar no hablen el mismo idioma?

Ejercicio 12. Dos sucesos incompatibles, A y B , tienen probabilidades respectivas 0,20 y 0,60. Calcula la probabilidad de que suceda:

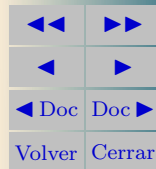
- A y B .
- A o B .
- A pero no B .

Ejercicio 13. Un aparato eléctrico está constituido por dos componentes A y B . Sabiendo que hay una probabilidad de 0,58 de que no falle ninguno de los componentes y que en el 32% de los casos falla B y no lo hace A , determina, justificando la respuesta, la probabilidad de que en uno de tales aparatos no falle la componente A .



MaTeX

PROBABILIDAD



Ejercicio 14. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0,40$, $P(B|A) = 0,25$ y $P(B) = b$. Hallar:

- $P(A \cap B)$
- $P(A \cup B)$ si $b = 0,5$.
- El menor valor posible de b y el mayor valor posible de b .

Ejercicio 15. Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es 0,6. La probabilidad de que pase la segunda es 0,8 y la de que pase ambas es 0,5. Se pide:

- Probabilidad de que pase al menos una prueba.
- Probabilidad de que no pase ninguna prueba.
- ¿Son las pruebas sucesos independientes?
- Probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera.

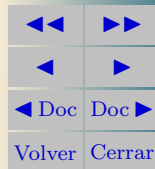
Ejercicio 16. Una clase se compone de veinte chicos y diez chicas. La mitad de las chicas y la mitad de los chicos aprueban las matemáticas. Calcula la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, resulte ser:

- Chica o que aprueba las matemáticas.
- Chico que suspenda las matemáticas.
- Sabiendo que es chico, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe las matemáticas?



MaTeX

PROBABILIDAD



d) ¿Son independientes los sucesos “chico” y “aprueba las matemáticas”?

Ejercicio 17. En una cierta ciudad, el 40 % de la población tiene cabellos castaños, el 25 % tiene los ojos castaños y el 15 % tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar:

- Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños?
- Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cabellos castaños?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

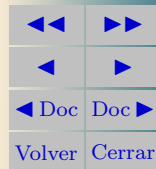
Ejercicio 18. En un almacén hay tres estanterías y en cada una dos tipos de productos: A y B. En la primera hay 140 productos y se sabe que el 25 % son del tipo A. En la segunda hay 130 productos y 91 son del tipo B y en la tercera hay 40 del tipo A y 80 del tipo B.

- Hacer una tabla que recoja la información anterior.
- Del total de productos qué proporción corresponde a cada estante?
- Calcular la probabilidad de que un producto elegido al azar sea del tipo A
- Si se sabe que el producto elegido no pertenece a la primera estantería, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tipo B.



MaTeX

PROBABILIDAD



Ejercicio 19. Una urna A contiene 2 bolas rojas y una verde y otra urna B contiene 2 bolas verdes y una roja. Se extraen dos bolas de la urna A y, sin mirar el color, se introducen en la B . A continuación se extrae una bola de la urna B . ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea verde?

Ejercicio 20. Una empresa recibe lotes de material de 3 proveedores en proporciones del 50 %, 30 % y 20 %. Se sabe que el 0,1 % de los lotes del primer proveedor, el 0,5 % de los del segundo, y el 1 % de los del tercero es rechazado en el control de calidad que realiza la empresa a la recepción del material.

- ¿Qué porcentaje de lotes es rechazado a la recepción?
- Sabiendo que un lote ha sido rechazado, ¿cuál es su proveedor más probable?

Ejercicio 21. De una urna con cuatro bolas rojas y 2 negras se extraen al azar y sin reemplazamiento dos bolas

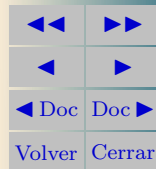
- ¿Cuál es la probabilidad de que sean las dos rojas?
- Si la segunda bola ha resultado negra, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya sido la primera?

Ejercicio 22. Una urna A contiene 6 bolas rojas y 4 negras. Otra urna B tiene 5 rojas y 9 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser rojas. Halla la probabilidad de que la urna elegida haya sido la A .



MaTEX

PROBABILIDAD



Ejercicio 23. En una ciudad existen tres redes de cajeros automáticos: A , B y C . El 60% de los cajeros pertenecen a la red A , el 30% a la B , y el 10% a la C . El día 1 de Enero de 2002 dispensaban euros el 80% de los cajeros de la red A , el 75% de los de la B , y el 90% de los de la C .

- Si un ciudadano eligió un cajero al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le dispensara euros?
- Si un ciudadano consiguió euros en un cajero, ¿cuál es la probabilidad de que dicho cajero perteneciera a la red A ?

Ejercicio 24. Entre los estudiantes matriculados en cierta asignatura de una carrera universitaria las chicas duplican a los chicos. Al final del curso han aprobado el 80% de las chicas y el 60% de los chicos. Calcula:

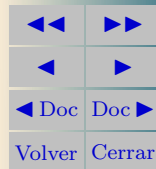
- El porcentaje de chicas dentro del total de estudiantes matriculados.
- El porcentaje de aprobados dentro del total de estudiantes matriculados.
- El porcentaje de chicas dentro de los estudiantes que no han aprobado.

Ejercicio 25. En un examen realizado a un grupo de alumnos, tres han obtenido la calificación más alta. Como sólo se puede dar una matrícula de honor, deciden que ésta será para aquel que saque la bola blanca de una bolsa que contiene dos bolas negras y una blanca. Los tres van sacando, por orden, una bola que no devuelven. ¿Quién tiene más probabilidad de sacar la bola blanca: el primero, el segundo o el tercero?.



MaTeX

PROBABILIDAD



Ejercicio 26. Sean A y B dos sucesos independientes tales que la probabilidad de que ocurran simultáneamente es $1/6$ y la de que no ocurra ninguno es $1/3$. Determina las probabilidades A y de B

Test. Responde a las cuestiones:

1. El suceso $A - B$ equivale a:

- (a) $A \cap \bar{B}$ (b) $A - (A \cap B)$ (c) los dos anteriores

2. El suceso $\overline{A \cup B}$ equivale a:

- (a) $\bar{A} \cup \bar{B}$ (b) $\bar{A} \cap \bar{B}$

3. Si A y B son incompatible :

- (a) $A - B = A$ (b) $A - B = \emptyset$ (c) $A - B = B$

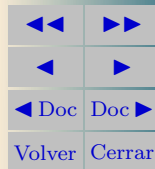
4. Si se cumple que $A \subset B$ entonces:

- (a) $A - B = A$ (b) $A - B = \emptyset$ (c) $A - B = B$



MaTEX

PROBABILIDAD



Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

a) espacio muestral asociado a dicho experimento

$$E = \{(s, s, s), (s, s, n), (s, n, s), (n, s, s), \\ (s, n, n), (n, s, n), (n, n, s), (n, n, n)\}$$

b) $B = \{(s, s, s), (s, s, n), (s, n, s), (n, s, s)\}$

c) El suceso contrario es “una persona, o ninguna, son partidarias de consumir el producto”. Por tanto, estaría formado por:

$$\{(s, n, n), (n, s, n), (n, n, s), (n, n, n)\}$$

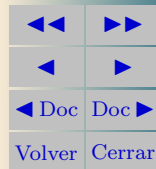
Es el suceso contrario al del apartado b).

Ejercicio 1



MaTEX

PROBABILIDAD





Ejercicio 2.

Hacemos una tabla con todos los casos posibles

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) La suma de los puntos sea 2

$$p(\text{suma} = 2) = \frac{1}{36}$$

b) La suma de los puntos sea 7

$$p(\text{suma} = 7) = \frac{6}{36}$$

c) La suma de los puntos sea 10

$$p(\text{suma} = 10) = \frac{3}{36}$$

MaTeX

PROBABILIDAD

Ejercicio 2



Ejercicio 3.

a) La carta extraída sea de oros.

$$P(\text{oros}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

b) La carta extraída sea una figura.

$$P(\text{figura}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

c) La carta extraída sea figura de espadas.

$$P(\text{figura de espadas}) = \frac{3}{40}$$

Ejercicio 3



MaTEX

PROBABILIDAD



Prueba de la Propiedad 1.Se descompone Ω en sucesos incompatibles

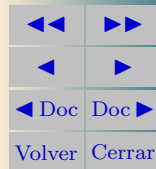
$$\Omega = A \cup \bar{A}$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

**MaTEX**

PROBABILIDAD





Prueba de la Propiedad 2.

Se descompone $A \cup B$ en sucesos incompatibles

$$A \cup B = [A - (A \cap B)] \cup (A \cap B) \cup [B - (A \cap B)]$$

y tomando probabilidades se tiene:

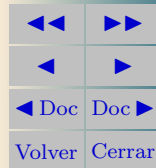
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &\quad + P(A \cap B) \\ &\quad + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

simplificando:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

MaTEX

PROBABILIDAD



Prueba de la Propiedad 3.

Se descompone A en sucesos incompatibles

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

despejando se obtiene

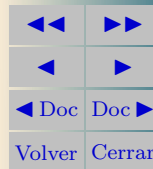
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$



MaTeX



PROBABILIDAD



Prueba del Teorema 3.0.

Si A y B son independientes, por la definición se tiene

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

despejando, se obtiene

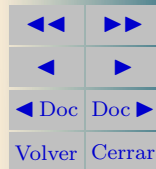
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



MaTEX



PROBABILIDAD



Ejercicio 4.

Conocemos

$$P(A) = \frac{3}{4} \quad P(B) = \frac{1}{8} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

a) por la definición de condicionada

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/10}{1/8} = \frac{2}{5}$$

b) por el suceso contrario

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

c) y por la propiedad aditiva

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{31}{40} \end{aligned}$$

MaTEX

PROBABILIDAD

Ejercicio 4



**Ejercicio 5.**

Sea F fumador y C padezca cáncer.

	Fumadores	No fumadores	
Con cáncer	70	30	100
Sin cáncer	40	60	100
	110	90	200

A partir de la tabla se obtienen fácilmente las probabilidades pedidas.

$$a) P(F \cap C) = \frac{70}{200}$$

$$b) P(C) = \frac{100}{200}$$

c) Como $P(C) = \frac{100}{200}$ y $P(C|F) = \frac{70}{110}$ son distintos, entonces los sucesos son dependientes.

Ejercicio 5

MaTeX

PROBABILIDAD



Prueba del Teorema 3.0.

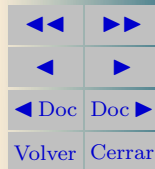
$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$$

y como $P(B \cap A_i) = P(B|A_i) P(A_i)$ se tiene:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

**MaTEX**

PROBABILIDAD



Prueba del Teorema 3.0.

Sea A_i una partición de Ω $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ y el suceso $B \subset \Omega$ la probabilidad de

$$p(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)}$$

y por el teorema de la probabilidad total para B se tiene:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$



MaTEX

PROBABILIDAD





Ejercicio 6.

Sea B la moneda buena sin trucar y sea M la moneda mala trucada. Como

$$P(C_M) + P(X_M) = 1 \quad P(X_M) = 3 \cdot P(C_M) \implies P(X_M) = \frac{1}{4}$$

La probabilidad de:

a) obtener dos caras

$$P(C_B C_M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

b) no obtener ninguna cara.

$$P(X_B X_M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

c) obtener una cara y una cruz.

$$P(C_B X_M) + P(X_B C_M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

d) obtener dos caras o dos cruces.

$$P(C_B C_M) + P(X_B X_M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

MaTeX

PROBABILIDAD

Ejercicio 6



Ejercicio 7.

Se conoce

$$P(A) = \frac{2}{5} \quad P(B) = \frac{1}{3} \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{1}{3}$$

a) Como

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup \overline{B}) &= P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{1}{3} \\ \implies P(A \cap B) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

b) $P(A \cup B)$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

Ejercicio 7

MaTEX

PROBABILIDAD



**Ejercicio 8.**

$P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,2$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,7$, luego:

a) Como

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup \overline{B}) &= P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,7 \\ \implies P(A \cap B) &= 0,3 \end{aligned}$$

No son independientes pues

$$P(A \cap B) = 0,3 \neq P(A) \cdot P(B) = 0,12$$

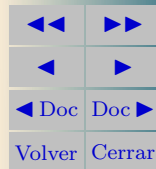
b) $P(A \cup B)$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,6 + 0,2 - 0,3 = 0,5 \end{aligned}$$

Ejercicio 8

MaTeX

PROBABILIDAD



Ejercicio 9.

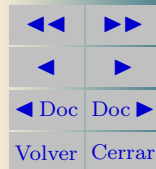
La probabilidad de que un objeto así fabricado, elegido al azar, no sea defectuoso es el producto de las probabilidades de que no sea defectuoso en ninguna de las fases.

$$P(\text{no defectuoso}) = 0,96 \cdot 0,99 = 0,9504$$

Ejercicio 9

*MaT_EX*

PROBABILIDAD



Ejercicio 10.

Sea A acierto y F fallo, entonces la probabilidad de que un solo un tirador dé en el blanco es

$$\left. \begin{array}{l} A \quad F \quad F \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{72} \\ F \quad A \quad F \rightarrow \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{72} \\ F \quad F \quad A \rightarrow \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{15}{72} \end{array} \right\} = \frac{31}{72}$$

Ejercicio 10



MaTeX

PROBABILIDAD



**Ejercicio 11.**

Sean el suceso $E = \{\text{una persona habla español}\}$, y el suceso $I = \{\text{una persona habla inglés}\}$

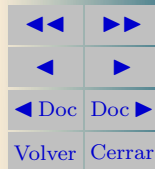
Si elegimos dos personas al azar, que no hablen el mismo idioma se puede presentar de dos formas $\{E I\}$ o $\{I E\}$

$$P(\{E I\} \cup \{I E\}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{12}{45}$$

Ejercicio 11

MaTeX

PROBABILIDAD



Ejercicio 12.

Si A y B son incompatibles, $A \cap B = \emptyset$.

$$a) P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

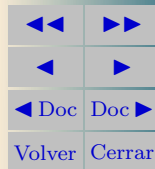
$$b) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\emptyset) = 0,1 + 0,6 - 0 = 0,8$$

$$c) P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,2 - 0 = 0,2.$$

Ejercicio 12

**MaTEX**

PROBABILIDAD



Ejercicio 13.

Datos

$$P(A \cap B) = 0,58 \quad P(A \cap \bar{B}) = 0,32$$

Como

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,32$$

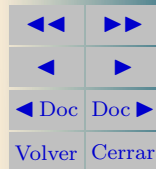
entonces

$$P(A) = 0,32 + P(A \cap B) = 0,9$$

MaTEX

Ejercicio 13

PROBABILIDAD



**Ejercicio 14.**

Sean $P(A) = 0,40$, $P(B|A) = 0,25$ y $P(B) = b$.

a)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0,25 \implies P(A \cap B) = 0,10$$

b) Si $b = 0,5$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,4 + 0,5 - 0,1 = 0,8 \end{aligned}$$

c) El suceso menor es $A \cap B$ y el mayor $A \cup B$.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) \leq 1 &\implies 0,4 + b - 0,1 \leq 1 \implies b \leq 0,7 \\ P(A \cap B) \leq P(B) &\implies 0,1 \leq b \end{aligned}$$

luego el menor valor posible de b es 0.1 y el mayor valor posible de b es 0.7.

Ejercicio 14

MaTeX

PROBABILIDAD





Ejercicio 15.

Sea E_1 el suceso pasa la 1ª prueba y E_2 el suceso pasa la 2ª prueba

$$a) P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0,6 + 0,8 - 0,5 = 0,9$$

$$b) P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = P(\overline{E_1 \cup E_2}) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = 0,1$$

c) Como

$$P(E_2) = 0,8 \neq P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = 5/6$$

los sucesos son dependientes.

d) Probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera.

$$P(E_2|\overline{E_1}) = \frac{P(E_2 \cap \overline{E_1})}{P(\overline{E_1})} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$$

$$P(E_2 \cap \overline{E_1}) = P(E_2 - E_1) = P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0,8 - 0,5 = 0,3$$

Ejercicio 15

MaTeX

PROBABILIDAD



**Ejercicio 16.**

El diseño de una tabla de doble entrada simplifica los cálculos

	Chicos (H)	Chicas (M)	
Aprueban (A)	10	5	15
Suspenden (S)	10	5	15
	20	10	30

$$a) P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$b) P(H \cap S) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

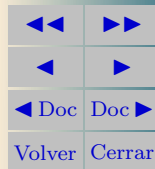
$$c) P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{10}{20}$$

d) ¿Son independientes: “ser chico” y “aprobar las matemáticas”? Como $P(H) = \frac{20}{30}$ y $P(H|A) = \frac{20}{30}$ son iguales, entonces los sucesos son independientes.

Ejercicio 16

MaTeX

PROBABILIDAD



Ejercicio 17.

El diseño de una tabla de doble entrada cuyo total sume 100 simplifica los cálculos

	Ojos castaños (OC)	Ojos no castaños (\overline{OC})	
Pelo castaño (PC)	15	25	40
Pelo no castaño (\overline{PC})	10	50	60
	25	75	100

$$a) P(OC|PC) = \frac{P(OC \cap PC)}{P(PC)} = \frac{15}{40}$$

$$b) P(PC|OC) = \frac{P(PC \cap OC)}{P(OC)} = \frac{15}{25}$$

$$c) P(\overline{PC} \cap \overline{OC}) = \frac{50}{100}$$

Ejercicio 17



MaTeX

PROBABILIDAD





Ejercicio 18.

a) Recogemos los datos en la siguiente tabla

	Tipo (A)	Tipo (B)	
Estantería 1 (E_1)	35	105	140
Estantería 2 (E_2)	39	91	130
Estantería 3 (E_3)	40	80	120
	114	276	390

b) proporción de cada estante

$$p_{E_1} = \frac{140}{390} \quad p_{E_2} = \frac{130}{390} \quad p_{E_3} = \frac{120}{390}$$

c) probabilidad de que un producto elegido al azar sea del tipo A

$$P(A) = \frac{114}{390}$$

d)

$$P(B|\bar{E}_1) = \frac{91 + 82}{130 + 120} = \frac{173}{250}$$

MaTeX

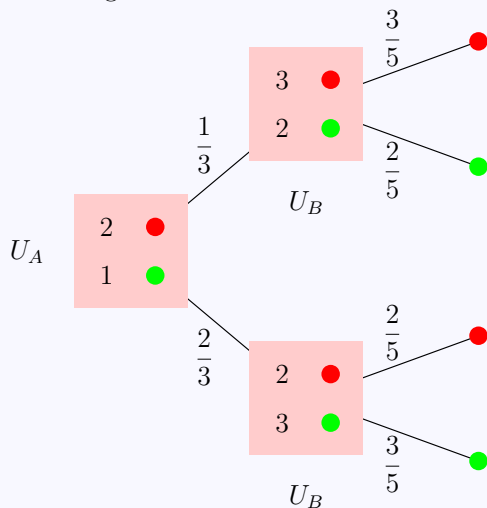
PROBABILIDAD

Ejercicio 18



Ejercicio 19.

Sea V el suceso extraer bola verde. En el diagrama en árbol se muestra la experiencia aleatoria. Luego



$$P(V) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8}{15}$$

Ejercicio 19



MaTeX

PROBABILIDAD





Ejercicio 20.

Si el lote procede del proveedor i lo indicamos con P_i . Si es aceptado con A y si es rechazado con R . Véase el diagrama en árbol

a)

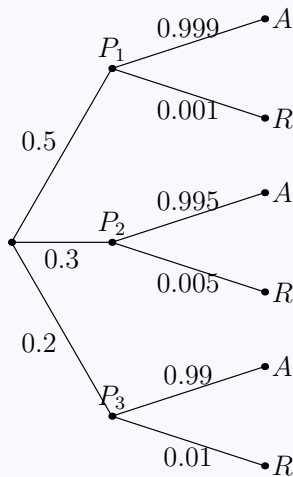
$$P(R) = 0,5 \cdot 0,001 + 0,3 \cdot 0,005 + 0,2 \cdot 0,01 \\ = 0,004$$

b)

$$P(P_1|R) = \frac{P(P_1) \cdot P(R|P_1)}{P(R)} = 0,125$$

$$P(P_2|R) = \frac{P(P_2) \cdot P(R|P_2)}{P(R)} = 0,375$$

$$P(P_3|R) = \frac{P(P_3) \cdot P(R|P_3)}{P(R)} = 0,500$$

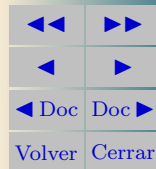


Si un lote ha sido rechazado, es más probable que proceda del proveedor P_3 .

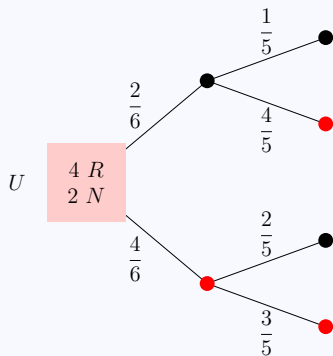
Ejercicio 20

MaTeX

PROBABILIDAD



Ejercicio 21.



a)

$$P(RR) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

b)

$$P(1^{\circ} N | 2^{\circ} N) = \frac{P(NN)}{P(2^{\circ} N)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{1}{5}$$

Ejercicio 21



MaTEX

PROBABILIDAD



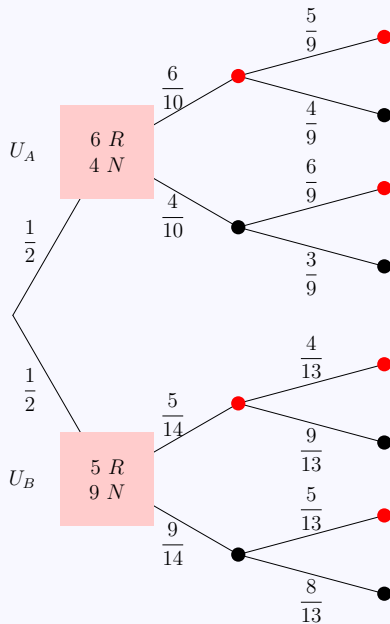
Ejercicio 22. Sea R bola roja, del diagrama se tiene

Probabilidad de sacar dos rojas:

$$P(RR) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = 0,22$$

Si extraemos dos rojas, la probabilidad de que la urna elegida haya sido la U_A , por Bayes se tiene:

$$P(U_A|RR) = \frac{P(U_A) \cdot P(RR|U_A)}{P(RR)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}}{0,22} = 0,75$$



Ejercicio 22



MaTEX

PROBABILIDAD



**Ejercicio 23.**

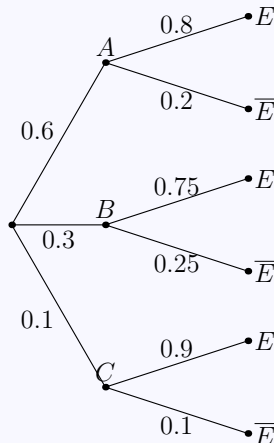
Si el cajero dispensa euros lo indicamos con E . Véase el diagrama

a)

$$\begin{aligned} P(E) &= 0,6 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,75 + 0,1 \cdot 0,9 \\ &= 0,795 \end{aligned}$$

b) Si un ciudadano consiguió euros en un cajero, ¿cuál es la probabilidad de que dicho cajero perteneciera a la red A?

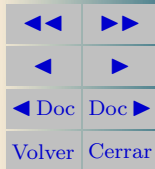
$$\begin{aligned} P(A|E) &= \frac{P(A) \cdot P(E|A)}{P(E)} \\ &= \frac{0,48}{0,795} = 0,60 \end{aligned}$$



Ejercicio 23

MaTeX

PROBABILIDAD





Ejercicio 24.

Recogemos los datos en la siguiente tabla sobre un total de por ejemplo 300 alumnos para tener el doble de chicas 200 que de chicos 100. De las chicas aprueban el $80\% \cdot 200 = 160$ y de las chicos aprueban el $60\% \cdot 100 = 60$

	chicas (M)	chicos (H)	
Aprobados (A)	160	60	220
Suspensos 2 (S)	40	40	80
	200	100	300

- a) El porcentaje de chicas dentro del total de estudiantes matriculados.

$$\frac{200}{300} \cdot 100 = 66,67\%$$

- b) El porcentaje de aprobados dentro del total de estudiantes matriculados.

$$\frac{220}{300} \cdot 100 = 73,33\%$$

- c) El porcentaje de chicas dentro de los estudiantes que no han aprobado.

$$\frac{40}{80} \cdot 100 = 50\%$$

MaTeX

PROBABILIDAD

Ejercicio 24





Ejercicio 25.

Sean los alumnos A , B y C , que juegan por ese orden. Indicamos en el diagrama en árbol, cuando juega A por J_A , cuando juega B por J_B , y cuando juega C por J_C .

Del gráfico se obtiene:

Probabilidad de que gane A

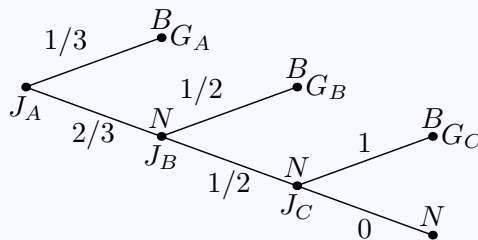
$$P(G_A) = \frac{1}{3}$$

Probabilidad de que gane B

$$P(G_B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Probabilidad de que gane C

$$P(G_C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$



MaTeX

PROBABILIDAD

Los tres tienen la misma probabilidad de sacar la bola blanca.

Ejercicio 25



**Ejercicio 26.**

Datos:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{3}$$

Como A y B son independientes

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6}$$

también \bar{A} y \bar{B} son independientes

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \frac{1}{3}$$

Llamando $P(A) = a$ y $P(B) = b$ y sustituyendo en las expresiones anteriores, se obtiene un sistema

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot b = \frac{1}{6} \\ (1 - a) \cdot (1 - b) = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow 6a^2 + 5a + 1 = 0$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{b = \frac{1}{3}}$$

MaTEX

PROBABILIDAD

Ejercicio 26



Soluciones a los Tests

Solución al Test: En efecto por definición se tiene por una parte

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

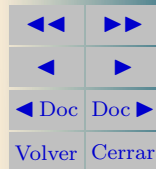
que coincide con $A - (A \cap B)$.

Final del Test



MaTEX

PROBABILIDAD



Índice alfabético

espacio muestral, 4
experimento aleatorio, 3

probabilidad

axiomática, 12
condicionada, 14
de Laplace, 8
propiedades, 12

suceso, 4

compuesto, 4
contrario, 4, 5
diferencia, 5
elemental, 4
imposible, 4
incompatibles, 5
intersección, 5
seguro, 4
unión, 5

Sucesos Independientes, 15

Teorema, 17

de Bayes, 18
de probabilidad total, 18



MaTeX

PROBABILIDAD

