Proyecto MaTEX

# Derivadas

**Fco Javier González Ortiz**

## Directorio


- **Tabla de Contenido**
- **Inicio Artículo**




**D.L.:SA-1415-2004**

ISBN: 84-688-8267-4

# Tabla de Contenido




MaTEX

DERIVADAS


◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

## 1. Introducción

Los científicos de los últimos años del siglo XVII dedicaron gran parte de su tiempo y energía a resolver el problema de la tangente que tiene relación en cuestiones como las siguientes:

- En óptica, el ángulo con el que un rayo de luz incide en una superficie de una lente está definida en términos de la tangente a la superficie.
- En física, la dirección de un cuerpo en movimiento en un punto de su recorrido es la de la tangente en ese punto.
- En geometría, al ángulo entre dos curvas que intersecan es el ángulo entre las tangentes en el punto de intersección.
- ¿Cómo encontraremos la ecuación de la tangente? Usaremos el método ya desarrollado por Fermat en 1629.

## 1.1. Tasa de variación media

La siguiente tabla da el precio en euros[1] de un producto en 8 años sucesivos

| precio | 10 | 18 | 24 | 28 | 30 | 30 | 28 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| año | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Si llamamos $P(x)$ a la función precio y $x$ designa los años, podemos preguntar cuál es la variación o incremento del precio en el intervalo $[0,1]$, y ésta sería

$$\Delta P = P(1) - P(0) = 18 - 10 = 8 \,\text{euros}$$

la variación o incremento del precio en el intervalo $[1,3]$, y ésta sería

$$\Delta P = P(3) - P(1) = 28 - 18 = 10 \,\text{euros}$$

Ahora bien, la tasa de variación media es el incremento por unidad de tiempo.

- La tasa de variación media del precio en el intervalo $[0,1]$ es

$$T.V.M. = \frac{P(1) - P(0)}{1 - 0} = \frac{18 - 10}{1} = 8 \,\text{euros/año}$$

- La tasa de variación media del precio en el intervalo $[1,3]$ es

$$T.V.M. = \frac{P(3) - P(1)}{3 - 1} = \frac{28 - 18}{2} = 5 \,\text{euros/año}$$

[1] Hemos cambiado los números para que sean más cómodos de usar



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

- La tasa de variación media del precio en el intervalo $[3,7]$, es

$$T.V.M. = \frac{P(7) - P(3)}{7-3} = \frac{24-28}{4} = -1 \,\text{euros/año}$$

que indica que el precio ha disminuido a razón de un euro por año.

De esta forma definimos de la tasa de variación media para una función $f(x)$ en un intervalo $[x, x+h]$ como

**Tasa de Variación Media**

$$T.V.M. = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En el intervalo $[x, x+h]$ la TVM representa gráficamente la pendiente del segmento que va desde el punto $(x, f(x))$ al punto $(x+h, f(x+h))$. En gráfico siguiente se muestra como varía gráficamente la TVM en distintos intervalos.

## • Interpretación geométrica

En $[1,3]$

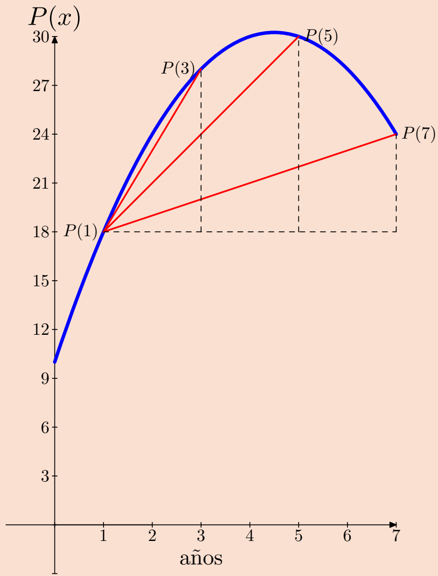
$$T.V.M. = \frac{P(3) - P(1)}{3-1} = \frac{28-18}{2} = 5\,\text{euros/año}$$

En $[1,5]$

$$T.V.M. = \frac{P(5) - P(1)}{5-1} = \frac{30-18}{4} = 3\,\text{euros/año}$$

En $[1,7]$

$$T.V.M. = \frac{P(7) - P(1)}{7-1} = \frac{24-18}{6} = 1\,\text{euros/año}$$




La $T.V.M.$ representa la pendiente del segmento que une los puntos de la curva.

## 1.2. Tasa de variación instantánea

Como el intervalo $[x, x+h]$ varía con $h$, si hacemos $h$ cada vez más pequeño, es decir hacemos tender $h$ a 0, obtenemos la TVI, Tasa de variación instantánea.

**Tasa de Variación instantánea**

$$T.V.I.(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La expresión anterior es muy importante en matemáticas y se relaciona con el cálculo de la recta tangente a una función, como mostraremos a continuación.

En el ejemplo anterior de los precios la TVI significa la razón de cambio del precio en un instante de tiempo.

Gráficamente indica la pendiente de la tangente a la función en el punto $(x, f(x))$.



◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejemplo 1.1.** Si $P(x)$ es precio de un producto y $x$ designa los años, siendo

$$P(x) = -x^2 + 9\,x + 10$$

hallar la $TVI$ en el año $x = 1$ y en el año $x = 7$

*Solución*: El precio en el año $x = 1$ es $P(1) = 18$ y la $TVI$ es

$$\begin{aligned}
TVI(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{P(1+h) - P(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-(1+h)^2 + 9(1+h) + 10 - 18}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h^2 + 7h}{h} = \lim_{h\to 0} (-h+7) = 7
\end{aligned}$$

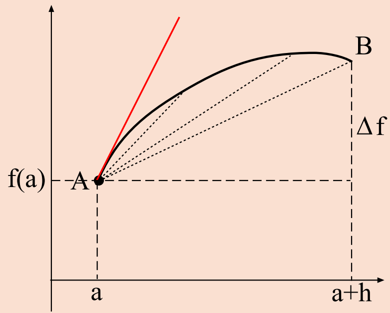
es decir, en $x = 1$ el precio está aumentando a razón de $TVI(1) = 7$ euros/año

$$\begin{aligned}
TVI(7) &= \lim_{h\to 0} \frac{P(7+h) - P(7)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-(7+h)^2 + 9(7+h) + 10 - 24}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h^2 - 5h}{h} = \lim_{h\to 0} (-h-5) = -5
\end{aligned}$$

es decir, en $x = 7$ el precio está disminuyendo a razón de $TVI(7) = -5$ euros/año □

## 1.3. El problema de la tangente

Dada una función $y = f(x)$ y un punto $A(a, f(a))$ del grafo de la función se trata de determinar la pendiente de la recta tangente al grafo de la función en el punto $A$. Consideremos la recta secante desde $A$ a $B$. Siendo los puntos $A(a, f(a))$ y $B(a+h, f(a+h))$,




la secante $AB$ tiene pendiente

$$m = \frac{\triangle f}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A medida que $h \to 0$, $B \to A$, y definimos la pendiente de la tangente $m_{tan}$ como

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esta pendiente la escribiremos como $f'(a)$ quedando la ecuación de la tangente de la forma

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)} \qquad (1)$$

**Ejemplo 1.2.** Hallar en $x = 2$ la tangente a la curva $f(x) = x^2$.

*Solución*: El punto de la curva en $x = 2 \Longrightarrow f(2) = 2^2 = 4$, $A(2,4)$. La pendiente de la tangente es

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h\to 0} (4 + h) = 4 \end{aligned}$$

Siendo la recta tangente

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

□

**Ejemplo 1.3.** Hallar en $x = 1$ la tangente a la curva $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

*Solución*: El punto de la curva en $x = 1 \Longrightarrow f(1) = \dfrac{1}{1} = 1$, $A(1,1)$. La pendiente de la tangente es

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{(1+h)\,h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{1+h} = -1 \end{aligned}$$

Siendo la recta tangente

$$y - 1 = -(x - 1)$$

□



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

## 2. Derivada en un punto

Sea $f$ una función, definimos la derivada en $x = a$, $f'(a)$ como

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} \tag{2}$$

### 2.1. Derivadas laterales

**Definición 2.1** *Sea $f$ una función y $a \in Dom(f)$*

1. *Definimos la derivada por la izquierda de $f$ en $a$ cuando*

$$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{existe} \tag{3}$$

2. *Definimos la derivada por la derecha de $f$ en $a$ cuando*

$$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{existe} \tag{4}$$

**Teorema 2.1.** Sea $f$ una función definida en un intervalo abierto conteniendo a $x$, entonces $f'(x)$ existe si y solo si existen las derivadas laterales $f'(x^-)$ y $f'(x^+)$ y son iguales. En este caso

$$f'(x) = f'(x^-) = f'(x^+)$$

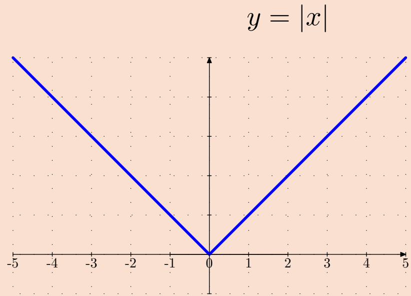
*Solución*: Se deduce de la propia definición de límite, ya que para que un límite exista deben existir los límites laterales y ser iguales. ◀


MaTEX
DERIVADAS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejemplo 2.1.** ¿Es derivable $f(x)=|x|$ en $x=0$ ?.

*Solución*: Siendo $f(x)=|x|=\begin{cases} -x & \leq 0 \\ x & > 0 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
f'(0^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \\
f'(0^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1
\end{aligned}
$$




Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ la función no es derivable en $x=0$

□

Test. La función $f(x)=x-|1-x|$ es derivable en $x=1$.

(a) Si (b) No

## 3. Reglas básicas

### • Derivada de una constante

**Teorema 3.1.** Sea $f$ una función constante $f(x) = c \quad \forall x \in R$, siendo $c$ un número real, entonces

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in R$$

### • Derivada de la potencia

**Teorema 3.2.** (Regla de la potencia) Consideremos la función $f(x) = x^n$, para algún número natural $n \in N$. Entonces

$$f'(x) = n x^{n-1} \qquad x \in R \tag{5}$$

*Nota al Teorema.* La regla anterior se extiende y funciona cuando el exponente es cualquier **número real**.

**Ejemplo 3.1.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = x^6 \qquad g(x) = x^{-5} \qquad h(x) = x^{5/3}$$

*Solución*:

$$f'(x) = 6x^5 \qquad g'(x) = -5x^{-6} \qquad h'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3}$$

□

**Ejercicio 1.** Calcular las derivadas.

$a)$ $f(x) = 2x^{13}$ $\qquad$ $b)$ $f(x) = \sqrt{x^3}$ $\qquad$ $c)$ $f(x) = \sqrt[5]{x^7}$

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
DERIVADAS
◄◄ ►► ◄ ► ◄ Doc Doc ► Volver Cerrar

## 4. Reglas de Derivación

### • Regla de la suma

**Teorema 4.1.** (Derivada de la suma) Sean las funciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) \tag{6}$$

$$\boxed{[u + v]' = u' + v'} \tag{7}$$

**Ejemplo 4.1.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = x^3 + x^4 \qquad g(x) = x^2 - x^{-3}$$

*Solución*:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x^3 \qquad g'(x) = 2x + 3x^{-4}$$

□

**Ejercicio 2.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = 3\,x^2 - 5\,x^{-3}$ *b*) $f(x) = x^2 - 3,\, x^5$

*c*) $f(x) = x^{10} + x^{-10}$ *d*) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^5}$

*e*) $f(x) = x^8 + x^{8,003}$ *f*) $f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[5]{x}$

## • Regla del producto

**Teorema 4.2.** (Derivada del producto) Sean las funciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{8}$$

$$\boxed{[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'} \tag{9}$$

**Ejemplo 4.2.** Hallar la derivada del producto

$$f(x) = (x^3 + x^4)(x^2 - x^{-3})$$

*Solución*:

$$f'(x) = (3x^2 + 4x^3) \cdot (x^2 - x^{-3}) + (x^3 + x^4) \cdot (2x + 3x^{-4})$$

□

**Ejercicio 3.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = (x^2 + 10)(1 - x^2)$

*b*) $f(x) = (x + x^2 + 1) \cdot (1 + x)$

*c*) $f(x) = (x^{10} + 1)(1 - x)$

*d*) $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot (1 - x^2)$

*e*) $f(x) = (x^2 + x^3) \cdot (3 + x)$

*f*) $f(x) = (\sqrt{x^3} + x) \cdot (x - \sqrt[5]{x})$

## • Regla del cociente

**Teorema 4.3.** (Derivada del cociente) Sean $u = f(x)$ y $v = g(x)$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{10}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}} \tag{11}$$

**Ejemplo 4.3.** Hallar la derivada del cociente $f(x) = \dfrac{x^3 + x^4}{x^2 - x^{-3}}$

*Solución*:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x^3)(x^2 - x^{-3}) - (x^3 + x^4)(2x + 3x^{-4})}{(x^2 - x^{-3})^2}$$

□

**Ejercicio 4.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *b*) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

*c*) $f(x) = \dfrac{x^{10} + 1}{1 - x}$ *d*) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x + 3}$

## • Regla de la cadena

**Teorema 4.4.** (Regla de la cadena) Sea las funciones $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Supongamos que $g$ es derivable en $x$ y $f$ es derivable en $u$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es derivable en $x$ y su derivada es

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)} \tag{12}$$

**Ejemplo 4.4.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = (2x + x^2 + 5)^3 \quad g(x) = (2 - x^{12})^6$$

*Solución*:

$$f'(x) = 3(2x + x^2 + 5)^2(2 + 2\,x)$$
$$g'(x) = 6(2 - x^{12})^5(-12\,x^{11})$$

$\square$

**Ejercicio 5.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = (1 + 2\,x)^3$ *b*) $f(x) = (x + x^2)^3$

*c*) $f(x) = (x^{10} + 1)^2$ *d*) $f(x) = (2x^3 + x)^3$

*e*) $f(x) = x^2(2x^3 + x)^3$ *f*) $f(x) = (1 - x^2)^3(5 + x)^5$

**Ejemplo 4.5.** Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq 0 \\ 3 - (x-1)^2 & 0 < x \end{cases}$$

*a*) Hallar la derivada $f'(x)$.

*b*) ¿Cuál es el valor de $f'(-1)$?.

*c*) ¿Cuál es el valor de $f'(1)$?.

*d*) ¿Cuál es el valor de $f'(0)$?.

*e*) ¿Que significado geométrico tiene que no exista $f'(0)$?.

*Solución*:

*a*) Se deriva cada rama

$$f'(x) = \begin{cases} 2\,x & x < 0 \\ -2\,(x-1) & 0 < x \end{cases}$$

*b*) Para hallar $f'(-1)$ se sustituye en la primera rama de $f'$, $f'(-1) = -2$.

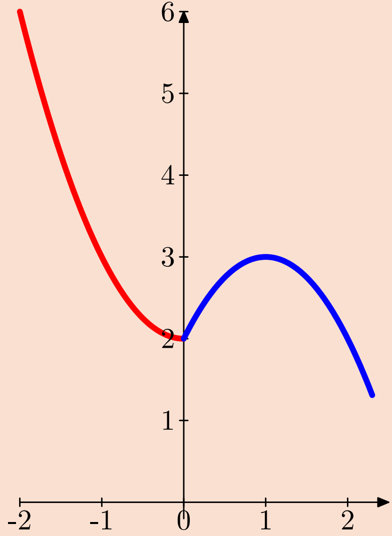
*c*) Para hallar $f'(1)$ se sustituye en la segunda rama de $f'$, $f'(1) = 0$.

*d*) Para hallar $f'(0)$ estudiamos las derivadas laterales

$$\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 2 \end{array} \Longrightarrow f'(0) \text{ no existe}$$

la función no es derivable en $x = 0$.

*e*) Como no existe la derivada en $x = 0$, geométricamente significa que la función en ese punto no tiene tangente. Observamos el gráfico de la función y apreciamos que por la rama de la izquierda llega con una inclinación a 0 y por la rama de la derecha en 0 tiene una inclinación distinta.



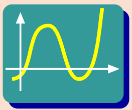

□

**Ejercicio 6.** Hallar $a$ y $b$ para que $f(x)$ sea una función derivable en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x \leq 0 \\ a\,x + b & 0 < x \end{cases}$$

**Ejercicio 7.** Hallar $a$ y $b$ para que $f(x)$ sea una función derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + b\,x - 1 & x \leq 1 \\ 2\,b\,x - 2 & 1 < x \end{cases}$$



◀ Pulsa y elige el botón Funciones a Trozos y realiza la siguiente práctica con las funciones anteriores.

**Práctica 4.1.**

*a*) Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x \leq 0 \\ a\,x + b & 0 < x \end{cases}$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `x<0 ? x^3+1:a*x+b` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza los controladores de $a$ y $b$ y observa que la función es derivable en $x = 0$ cuando $a = 0$ y $b = 1$.

*b*) Sea la función: $f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + b\,x - 1 & x \leq 1 \\ 2\,b\,x - 2 & 1 < x \end{cases}$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `x<1 ? a*x^2+b*x-1:2*b*x-2` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza los controladores de $a$ y $b$ y observa que la función es derivable en $x = 1$ cuando $a = 1$ y $b = 2$.

◀

# 5. Derivadas de las funciones trascendentes

## 5.1. Derivadas Trigonométricas

**Teorema 5.1.** Las derivadas trigonométricas elementales son:

$$\boxed{(\operatorname{sen} x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\operatorname{sen} x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}} \tag{13}$$

**Ejemplo 5.1.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = \operatorname{sen} 6x \qquad g(x) = \cos(1 + x^2) \qquad h(x) = \tan x^3$$

*Solución*: Del teorema y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = 6 \cos 6x \qquad g'(x) = -2x \operatorname{sen}(1 + x^2) \qquad h'(x) = \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}$$

□

**Ejercicio 8.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = \operatorname{sen}(3x + 1)$

*b*) $f(x) = \operatorname{sen}(x^3 + 1)$

*c*) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2 + 1)$

*d*) $f(x) = \cos(\dfrac{x}{1 - x})$

*e*) $f(x) = \tan(1 + 2x^2 + x^3)$

*f*) $f(x) = \sec(1 - x^2)$

## 5.2. Derivadas Exponenciales

**Teorema 5.2.** Las derivadas de la función exponencial son:

$$\boxed{(e^x)' = e^x \qquad\qquad (a^x)' = a^x \, \ln a \quad (a > 1)} \tag{14}$$

**Ejemplo 5.2.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = e^{6x} \qquad g(x) = e^{1+x^2} \qquad h(x) = 6^{\operatorname{sen} x}$$

*Solución*: Del teorema y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = 6\, e^{6x} \qquad g'(x) = 2x\, e^{1+x^2} \qquad h'(x) = 6^{\operatorname{sen} x} \, \ln 6 \, \cos x$$

□

**Ejercicio 9.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = e^{-5x+4x^2}$

*b*) $f(x) = e^{x \, \operatorname{sen} x}$

*c*) $f(x) = e^{1-\operatorname{sen}^2 x}$

*d*) $f(x) = 2^{\tan 3x}$

*e*) $f(x) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^2+3x}$

*f*) $f(x) = a^{\operatorname{sen} x + \cos x}$

## 5.3. Derivadas Logarítmicas

**Teorema 5.3.** Las derivadas de la función logarítmica son:

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad\qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x\,\ln a} \quad (a > 1)} \tag{15}$$

**Ejemplo 5.3.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = \ln(5x - x^2) \qquad g(x) = \ln(5 - \operatorname{sen} x) \qquad h(x) = \log_3(x^2 + e^x)$$

*Solución*: Del teorema y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = \frac{5 - 2x}{5x - x^2} \qquad g'(x) = \frac{-\cos x}{5 - \operatorname{sen} x} \qquad h'(x) = \frac{1}{\ln 3}\,\frac{2x + e^x}{x^2 + e^x}$$

□

**Ejercicio 10.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x} + 1)$

*b*) $f(x) = \ln(x^2 + \operatorname{sen} x)$

*c*) $f(x) = \ln(x^2\ \operatorname{sen} x)$

*d*) $f(x) = \ln^2(1 + e^x)$

*e*) $f(x) = \ln^2(1 + \ln x)$

*f*) $f(x) = \log_5(\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x})$

## 5.4. Derivadas de Arcos trigonométricos

**Teorema 10.** Las derivadas de los arcos trigonométricos son:

*a*) $(\operatorname{arc\,sen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

*b*) $(\operatorname{arc\,cos} x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

*c*) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

**Ejemplo 5.4.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = \operatorname{arc\,sen} 6x \qquad g(x) = \arctan x^3$$

*Solución*:

$$f'(x) = \frac{6}{\sqrt{1-(6x)^2}} \qquad g'(x) = \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}$$

□

**Ejercicio 11.** Calcular las derivadas.

*a*) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\ln x + x)$

*b*) $f(x) = \operatorname{arc\,cos}(1-x)$

*c*) $f(x) = \arctan(\operatorname{sen} x)$

*d*) $f(x) = \arctan(\ln x)$



Doc Doc
Volver Cerrar

**Ejercicio 12.** Hallar $a$ y $b$ para que $f(x)$ sea una función derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \leq 1 \\ a\,x + b & 1 < x \end{cases}$$

**Ejercicio 13.** Calcular las derivadas.

$a)$ $f(x) = \ln^2(1 + \cos x)^3$ $\qquad$ $b)$ $f(x) = \operatorname{sen} x(1 + \cos x)^3$

$c)$ $f(x) = e^{1-\operatorname{sen} x}$ $\qquad$ $d)$ $f(x) = 8^{x-\ln x}$

**Ejercicio 14.** Calcular las derivadas.

$a)$ $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})^2$ $\qquad$ $b)$ $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}$

**Ejercicio 15.** Calcular las derivadas.

$a)$ $f(x) = x^2 \cdot \arctan x^{-1/2}$ $\qquad$ $b)$ $f(x) = x^x$

**Ejercicio 16.** Calcular las derivadas.

$a)$ $f(x) = (\tan x)^{\operatorname{sen} x}$ $\qquad$ $b)$ $f(x) = e^x \cdot \sqrt[x]{x}$


MaTEX
DERIVADAS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

## Soluciones a los Ejercicios

### Ejercicio 1.

*a*) Si $f(x) = 2x^{13}$,

$$f'(x) = 26\,x^{12}$$

*b*) $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$. Luego

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

*c*) $f(x) = \sqrt[5]{x^7} = x^{7/5}$. Luego

$$f'(x) = \frac{7}{5}x^{2/5}$$

Ejercicio 1

**Ejercicio 2.**

*a*) Si $f(x) = 3\,x^2 - 5\,x^{-3}$,

$$f'(x) = 6\,x + 15\,x^{-4}$$

*b*) Siendo $f(x) = x^2 - 3\,x^5$,

$$f'(x) = 2\,x - 15\,x^4$$

*c*) Si $f(x) = x^{10} + x^{-10}$,

$$f'(x) = 10\,x^9 - 10\,x^{-11}$$

*d*) Siendo $f(x) = x - \sqrt[3]{x^5}$,

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{3}x^{2/3}$$

*e*) Siendo $f(x) = x^8 + x^{8{,}003}$,

$$f'(x) = 8x^7 + 8{,}003x^{7{,}003}$$

*f*) Siendo $f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[5]{x}$,

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{1}{5}x^{-4/5}$$

Ejercicio 2

**Ejercicio 3.**

*a*) Si $f(x) = (x^2 + 10)(1 - x^2)$,

$$f'(x) = (2\,x) \cdot (1 - x^2) + (x^2 + 10) \cdot (-2\,x)$$

*b*) Siendo $f(x) = (x + x^2 + 1) \cdot (1 + x)$,

$$f'(x) = (1 + 2\,x) \cdot (-2\,x) + (x + x^2 + 1) \cdot (-2)$$

*c*) Si $f(x) = (x^{10} + 1)(1 - x)$,

$$f'(x) = (10x^9) \cdot (1 - x) + (x^{10} + 1) \cdot (-1)$$

*d*) Siendo $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot (1 - x^2)$,

$$f'(x) = (2x - 2) \cdot (1 - x^2) + (x^2 - 2x) \cdot (-2x)$$

*e*) Siendo $f(x) = (x^2 + x^3) \cdot (3 + x)$,

$$f'(x) = (2x + 3x^2) \cdot (3 + x) + (x^2 + x^3) \cdot (1)$$

*f*) Siendo $f(x) = (\sqrt{x^3} + x) \cdot (x - \sqrt[5]{x})$.

$$f'(x) = (\frac{3}{2}x^{1/2} + 1) \cdot (x - \sqrt[5]{x}) + (\sqrt{x^3} + x) \cdot (1 - \frac{1}{5}x^{-4/5})$$

Ejercicio 3

**Ejercicio 4.**

*a*) Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

$$f'(x) = \frac{(0)(x) - (1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

*b*) Si $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$,

$$f'(x) = \frac{(2x)(x) - (x^2+1)(1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

*c*) Si $f(x) = \dfrac{x^{10}+1}{1-x}$,

$$f'(x) = \frac{(10x^9)(1-x) - (x^{10}+1)(-1)}{(1-x)^2}$$

*d*) Siendo $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x+3}$,

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+3) - (x^2+x)(1)}{(x+3)^2}$$

Ejercicio 4


MaTEX
DERIVADAS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 5.**

*a*) Si $f(x) = (1 + 2\,x)^3$,
$$f'(x) = 3(1 + 2\,x)^2\,(2)$$

*b*) Siendo $f(x) = (x + x^2)^3$,
$$f'(x) = 3(x + x^2)^2(1 + 2\,x)$$

*c*) Si $f(x) = (x^{10} + 1)^2$,
$$f'(x) = 2(x^{10} + 1)(10\,x^9)$$

*d*) Siendo $f(x) = (2x^3 + x)^3$,
$$f'(x) = 3(2x^3 + x)^2(6x^2 + 1)$$

*e*) Si $f(x) = f(x) = x^2(2x^3 + x)^3$,
$$f'(x) = 2x(2x^3 + x)^3 + x^2\,3\,(2x^3 + x)^2(6x^2 + 1)$$

*f*) Siendo $f(x) = (1 - x^2)^3(5 + x)^5$,
$$f'(x) = 3(1 - x^2)^2(-2x)(5 + x)^5 + (1 - x^2)^3\,5\,(5 + x)^4$$

Ejercicio 5

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
DERIVADAS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 6.** Siendo

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x \leq 0 \\ a\,x + b & 0 < x \end{cases}$$

- Para que sea continua en $x = 0$

$$f(0^-) = 1 = f(0^+) = b \Longrightarrow \boxed{b = 0}$$

- Para que sea derivable en $x = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & x < 0 \\ a & 0 < x \end{cases}$$

$$f'(0^-) = 0 = f'(0^+) = a \Longrightarrow \boxed{a = 0}$$

Ejercicio 6



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 7.** Siendo

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + b\,x - 1 & x \leq 1 \\ 2\,b\,x - 2 & 1 < x \end{cases}$$

- Para que sea continua en $x = 1$

$$f(1^-) = a + b - 1 = f(1^+) = 2\,b - 2 \Longrightarrow \boxed{a = b - 1}$$

- Para que sea derivable en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2\,a\,x + b & x < 1 \\ 2\,b & 1 < x \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 2\,a + b = f'(1^+) = 2\,b \Longrightarrow \boxed{2\,a = b}$$

Resolviendo el sistema con las dos condiciones se obtiene $a = 1$ y $b = 2$
.

Ejercicio 7

**Ejercicio 8.**

*a*) Si $f(x) = \operatorname{sen}(3x+1)$.

$$f'(x) = 3\cos(3x+1)$$

*b*) Si $f(x) = \operatorname{sen}(x^3+1)$.

$$f'(x) = 3x^2\,\cos(x^3+1)$$

*c*) Si $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2+1)$. Luego

$$f'(x) = 3\operatorname{sen}^2(x^2+1)\cos(x^2+1)\,(2x)$$

*d*) Si $f(x) = \cos(\dfrac{x}{1-x})$.

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(\frac{x}{1-x})\frac{1}{(1-x)^2}$$

*e*) Si $f(x) = \tan(1+2x^2+x^3)$,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(1+2x^2+x^3)}(4x+3x^2)$$

*f*) Si $f(x) = \sec(1-x^2) = \dfrac{1}{\cos(1-x^2)}$

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(1-x^2)\,(-2x)}{\cos^2(1-x^2)}$$

Ejercicio 8

**Ejercicio 9.**

*a*) Si $f(x) = e^{-5x+4x^2}$.

$$f'(x) = e^{-5x+4x^2}\,(-5+8x)$$

*b*) Si $f(x) = e^{x\ \operatorname{sen} x}$.

$$f'(x) = e^{x\ \operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x + x\cos x)$$

*c*) Si $f(x) = e^{1-\operatorname{sen}^2 x}$. Luego

$$f'(x) = e^{1-\operatorname{sen}^2 x}(-2\operatorname{sen} x\ \cos x)$$

*d*) Si $f(x) = 2^{\tan 3x}$.

$$f'(x) = 2^{\tan 3x}\ln 2\,\frac{3}{\cos^2 3x}$$

*e*) Si $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x}$,

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x}(2x+3)\ \ln\frac{3}{5}$$

*f*) Si $f(x) = a^{\operatorname{sen} x+\cos x}$

$$f'(x) = a^{\operatorname{sen} x+\cos x}\ln a\,(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

Ejercicio 9



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 10.**

*a)* Si $f(x) = \ln(x + \sqrt{x} + 1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x} + 1}(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$$

*b)* Si $f(x) = \ln(x^2 + \operatorname{sen} x)$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + \operatorname{sen} x}(2x + \cos x)$

*c)* Si $f(x) = \ln(x^2 \ \operatorname{sen} x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 \ \operatorname{sen} x}(2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x)$$

*d)* Si $f(x) = \ln^2(1 + \ln x)$.

$$f'(x) = 2\ln(1 + e^x)\frac{1}{1 + e^x}e^x$$

*e)* Si $f(x) = \ln^2(1 + \ln x)$.

$$f'(x) = 2\ln(1 + \ln x)\frac{1}{1 + \ln x}\frac{1}{x}$$

*f)* Si $f(x) = \log_5(\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x})$.

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 5}\,\frac{1}{\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}}\,\frac{-\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} = -\frac{1}{\ln 5}\,\frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

Ejercicio 10



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 11.**

*a*) Si $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\ln x + x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\ln x + x)^2}}\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

*b*) Si $f(x) = \arccos(1 - x)$.

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x)^2}}(-1)$$

*c*) Si $f(x) = \arctan(\operatorname{sen} x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\operatorname{sen} x)^2} \cos x$$

*d*) Si $f(x) = \arctan(\ln x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \frac{1}{x}$$

Ejercicio 11

MATEMATICAS
2º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
DERIVADAS
Doc Doc
Volver Cerrar

**Ejercicio 12.** Siendo

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \leq 1 \\ a\,x + b & 1 < x \end{cases}$$

- Para que sea continua en $x = 1$

$$f(1^-) = 0 = f(1^+) = a + b \Longrightarrow a + b = 0$$

- Para que sea derivable en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & x < 1 \\ a & 1 < x \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 3 = f'(1^+) = a \Longrightarrow \boxed{a = 3}$$

Sustituyendo en la ecuación $a + b = 0$, se tiene $\boxed{b = -3}$

Ejercicio 12

**Ejercicio 13.**

*a*) Si $f(x) = \ln^2(1+\cos x)^3$.

$$f'(x) = 2\,\ln(1+\cos x)^3 \frac{1}{(1+\cos x)^3} 3(1+\cos x)^2(-\operatorname{sen} x)$$
$$= -6\,\ln(1+\cos x)^3 \frac{\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)}$$

*b*) Si $f(x) = \operatorname{sen} x(1+\cos x)^3$.

$$f'(x) = \cos x(1+\cos x)^3 + \operatorname{sen} x\, 3(1+\cos x)^2(-\operatorname{sen} x)$$

*c*) Si $f(x) = e^{1-\operatorname{sen} x}$.

$$f'(x) = -e^{1-\operatorname{sen} x}\cos x$$

*d*) Si $f(x) = 8^{x-\ln x}$.

$$f'(x) \quad = \quad 8^{x-\ln x}\cdot \ln 8 \cdot (1-\frac{1}{x})$$

Ejercicio 13


MaTEX
DERIVADAS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 14.**

*a*) Si $f(x) = \ln(1-\sqrt{x})^2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-\sqrt{x})^2} 2(1-\sqrt{x}) \frac{-1}{2\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \end{aligned}$$

*b*) Si $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}} \cdot \\ & \cdot \frac{\sec^2 x(1-\tan x) + (1+\tan x)\sec^2 x}{(1-\tan x)^2} \\ &= \frac{1-\tan x}{2(1+\tan x)} \cdot \frac{2\sec^2 x}{(1-\tan x)^2} \\ &= \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)(1-\tan x)} \end{aligned}$$

Ejercicio 14



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 15.**

*a*) Si $f(x) = x^2 \cdot \arctan x^{-1/2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2 \cdot \frac{1}{1 + (\frac{1}{\sqrt{x}})^2} \cdot \frac{-1}{2} x^{-3/2} \\ &= 2x \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{1 + (\frac{1}{\sqrt{x}})^2} \end{aligned}$$

*b*) Si $f(x) = x^x$. Aplicando logaritmos

$$\ln f(x) = x \, \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (\ln x + 1) \cdot x^x$$

Ejercicio 15



◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 16.**

*a*) Si $f(x) = (\tan x)^{\operatorname{sen} x}$. Aplicando logaritmos

$$\ln f(x) = \operatorname{sen} x \, \ln \tan x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \, \ln \tan x + \operatorname{sen} x \, \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \, \ln \tan x + \frac{1}{\cos x}$$

$$f'(x) = (\cos x \, \ln \tan x + \frac{1}{\cos x}) \cdot (\tan x)^{\operatorname{sen} x}$$

*b*) Si $f(x) = e^x \cdot \sqrt[x]{x}$. Aplicando logaritmos

$$\ln f(x) = x + \frac{1}{x} \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x^2} \, \ln x + \frac{1}{x} \, \frac{1}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = (1 - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}) \cdot e^x \cdot \sqrt[x]{x}$$

Ejercicio 16



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

## Soluciones a los Tests

**Solución al Test:** Siendo $f(x) = x - |1-x| = \left\{ \begin{array}{cc} 2x-1 & \leq 1 \\ 1 & > 1 \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{2(1+h) - 1 - 1}{h} = 2 \\ f'(1^+) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{1-1}{h} = 0 \end{aligned}$$

Como $f'(1^-) \neq f'(1^+)$ la función no es derivable en $x = 1$. Final del Test



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

# Índice alfabético