Proyecto MaTEX

# Determinantes

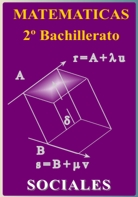
**Fco Javier González Ortiz**

## Directorio

- 
- Inicio Artículo


**D.L.:SA-1415-2004**

ISBN: 84-688-8267-4




MaTEX

DETERMINANTES

# Tabla de Contenido






◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

## 1. Introducción

Los determinantes históricamente son previos a las matrices. Si bien su importancia en un principio fué mayor en la actualidad el concepto de matriz ha resultado más fértil.

En el capítulo de sistemas hemos aprendido a resolver sistemas por el método de Gauss. La idea de expresar las soluciones en función de los coeficientes y los términos independientes llevó a Leibnitz en el siglo XVII, a la teoría de los determinantes.

El uso de determinantes nos permitirá

- Calcular la inversa de una matriz
- Expresar la solución de un sistema de ecuaciones y
- Determinar el rango de una matriz.

## 2. Determinantes

**Definición 2.1** *Sea $A$ una matriz de orden 2, llamamos determinante de la matriz $A$ y lo representamos como $|A|$, al número*

$$\boxed{|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c} \tag{1}$$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

## 2.1. Propiedades

**D1** El determinante es una función lineal de cualquiera de sus filas o columnas. Como las operaciones lineales con vectores son la suma y producto por un escalar, en realidad esta propiedad expresa dos reglas:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (D1a)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda\, a & \lambda\, b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (D1b)$$

**D2** El determinante cambia de signo cuando se intercambian dos líneas consecutivas,

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = c\, b - a\, d = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (D2)$$

**D3** El determinante de la matriz identidad es 1,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (D3)$$

**D4** Si dos líneas paralelas de $A$ son iguales, el determinante es nulo,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = a\, b - b\, a = 0 \qquad (D4)$$

**D5** Si sumamos a una linea de $A$ un múltiplo de otra linea paralela, el determinante no varia,

$$\begin{vmatrix} a + k\,c & b + k\,d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (D5)$$

**D6** Si $A$ tiene una linea nula, el determinante es nulo,

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (D6)$$

**D7** Si $A$ es una matriz triangular, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = a\,d \qquad (D7)$$

**D8** El determinante de $A$ y de $A^T$ son iguales,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \qquad (D8)$$

**D9** Si una linea es múltiplo de otra linea paralela, el determinante es nulo,

$$\begin{vmatrix} a & \lambda\,a \\ c & \lambda\,c \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} = 0 \qquad (D9)$$

Test. Hallar $\star$ para que se cumpla $\begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \star \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

(a) 1 (b) 3 (c) 2 (d) 4

**Ejercicio 1.** Expresa como sumas los determinantes

$a)\ \begin{vmatrix} a+1 & 4 \\ a+2 & 7 \end{vmatrix}$ $\qquad b)\ \begin{vmatrix} a-1 & 2a+4 \\ 1+a & a \end{vmatrix}$

Inicio del Test A partir de $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3$, hallar :

**1.** El valor de $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 6 ☐ $-6$ ☐ 0 ☐ 2

**2.** El valor de $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ $-4$ ☐ 4 ☐ 0 ☐ 5

**3.** El valor de $\begin{vmatrix} m+p & n+q \\ p & q \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 1 ☐ 6 ☐ 0 ☐ 3

Final del Test Puntos: Correctas

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
DETERMINANTES
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Inicio del Test A partir de $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$, hallar :

**1.** El valor de $\begin{vmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 0 ☐ 4 ☐ 2 ☐ 8

**2.** El valor de $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 0 ☐ 4 ☐ $-4$ ☐ $-1$

**3.** El valor de $\begin{vmatrix} a+3b & c+3d \\ b & d \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 0 ☐ 4 ☐ 7 ☐ 12

**4.** El valor de $\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ $-4$ ☐ 4 ☐ 0 ☐ 1

**5.** El valor de $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ -c & -d \end{vmatrix} = \cdots$ es,

☐ 3 ☐ 4 ☐ 0 ☐ $-12$

Final del Test

Puntos: Correctas

DETERMINANTES

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

**Ejemplo 2.1.** Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que

$$|A + B| \neq |A| + |B|$$

*Solución*: En efecto, $|A| = 1$ y $|B| = 2$, sin embargo

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A + B| = 9 \neq |A| + |B| = 3$$

□

**Ejemplo 2.2.** Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que se verifica

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

*Solución*: En efecto, $|A| = 1$ y $|B| = 2$, y se verifica que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 21 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A \cdot B| = 2 = |A| \cdot |B| = 2$$

□

**Teorema 2.1. Regla de Laplace** Si $A$ y $B$ son dos matrices cuadradas se cumple

$$\boxed{\text{Regla de Laplace } |A \cdot B| = |A| \cdot |B|}$$

## 2.2. Cálculo de determinantes con las propiedades

Las propiedades expuestas para determinantes de orden 2 son válidas para determinantes de orden superior. En las siguientes cuestiones y ejercicios se aplican a determinantes de orden 3.

La idea consiste en aplicar las propiedades y transformar el determinante hasta conseguir uno de forma triangular para aplicar la propiedad D7.

**Ejemplo 2.3.** Demostrar que: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$

*Solución*: Usando las propiedades:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & b+c+a & c+a \\ 1 & c+a+b & a+b \end{vmatrix} = \qquad (D5)$$

$$\overset{(2)}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix} = \qquad (D1)$$

$$= 0 \qquad (D4)$$

(1) Sumamos a la $c_2$ la columna $c_3$.
(2) Factor común $a+b+c$ en la $c_2$. □


◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejemplo 2.4.** Calcular con las propiedades: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

*Solución*:
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 9 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(3)}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 7 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -30$$

(1) Cambiamos $c_2$ con $c_1$. (2) Reducimos con $f_2 + f_1$ y $f_3 + 3\,f_1$.
(3) Factor común 2 en la $f_2$. (4) Reducimos con $f_3 - 3\,f_2$

□

**Ejercicio 2.** Indicar qué propiedad hemos aplicado en las igualdades:

$a)$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $b)$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

Ejercicio 3. Calcular los determinantes con las propiedades.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$. (b) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

# 3. Determinantes de orden superior

## 3.1. Adjunto de un elemento

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ se llama **adjunto** del elemento $a_{ij}$, y se denota $A_{ij}$ al determinante de orden $n-1$ que resulta de eliminar su fila y su columna afectado del signo $+$ o $-$ según $i+j$ sea par o impar,

$$\text{Adjunto de } a_{ij} = A_{ij}$$

Por ejemplo en la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 \quad , A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad , A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{22} = 0 \qquad A_{23} = -9 \qquad A_{31} = -4$$

siendo la matriz adjunta $Adj(A)$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -20 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -9 \\ -4 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$


◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

## 3.2. Desarrollo de un determinante por adjuntos

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ el determinante de $A$, es la suma de los productos de los elementos de una linea por sus respectivos adjuntos,

$$\boxed{|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} \qquad \text{(fila } i\text{)}} \tag{2}$$

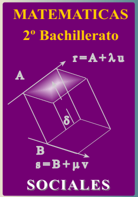
Sea por ejemplo el determinante de una matriz de orden $3 \times 3$
Desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -36$$

Desarrollamos por la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -36$$

Desarrollando en primer lugar por la primera fila y en segundo lugar por la tercera columna. Y así para cualquier otra linea.






◄◄ ►►
◄ ►
◄ Doc Doc ►
Volver Cerrar

En los determinantes de orden mayor de 3 conviene sacar ceros por reducción en alguna de las líneas.

**Ejemplo 3.1.** Hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

*Solución*:
Lo habitual es hacer ceros en alguna línea y después desarrollar por adjuntos. En este caso hemos elegido hacer ceros en la fila 3ª.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 1 \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -8 & -4 & -1 \\ -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -6 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -1 \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

(1) Reducimos con $c_2 - 3\,c_1$, $c_3 - c_1$ y $c_4 - 2\,c_1$.
(2) Desarrollamos con adjuntos por la $f_3$ .
(3) Reducimos con $c_1 - 2c_3$.
(4) Desarrollamos por la $f_1$

□

**Ejemplo 3.2.** Hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

*Solución*:
Vamos a hacer ceros en la primera columna usando como pivote el elemento $a_{11} = 1$, obteniendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 1 \begin{vmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -7 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(3)}{=} \begin{vmatrix} 11 & 4 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ -19 & 6 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} -1 \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ -19 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{-142}$$

(1) Efectuamos $f_2 - 2\,f_1,\ f_3 - 3\,f_1$ y $f_4 +\ f_1$.
(2) Desarrollamos por la $c_1$.
(3) Efectuamos $f_1 - 2\,f_2$ y $f_3 + 3\,f_2$,.
(4) Desarrollamos por la columna tercera.

□



◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

**Ejercicio 4.** Calcular los siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

**Ejercicio 5.** Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

**Ejercicio 6.** Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

**Ejercicio 7.** Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 21 & 23 & 25 & 27 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix}$$

# 4. Aplicaciones de los determinantes

El uso de determinantes nos permitirá

- Calcular la inversa de una matriz
- Determinar el rango de una matriz.
- Expresar la solución de un sistema de ecuaciones

## 4.1. Inversa de una matriz

La construcción de la inversa de una matriz $A$ se efectúa por los adjuntos.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}}^{Adj(A)^T} = \overbrace{\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}}^{|A|\,\mathbf{I_d}}$$

Siendo $Adj(A)$ la matriz adjunta de $A$. Como $A \cdot Adj(A)^T = |A| \cdot I_d$, dividiendo por $|A|$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t} \tag{3}$$

De la EXPRESIÓN 3 se sigue que hay inversa cuando $|A|$ no es cero.

$$\boxed{\exists A^{-1} \Longleftrightarrow |A| \neq 0} \tag{4}$$

- **Inversa de una matriz** $2 \times 2$

**Ejemplo 4.1.** Hallar la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

*Solución*:

*a*) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-4)(-2) = -5 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$

*b*) Se calculan los adjuntos de los elementos de $A$

$$A_{11} = 1 \quad A_{12} = -(-4) = 4 \quad A_{21} = -(-2) = 2 \quad A_{22} = 3$$

Matriz adjunta es:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

La inversa de $A$ es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

□

- **Inversa de una matriz $3 \times 3$**

**Ejemplo 4.2.** Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

*Solución*:

*a*) Se calcula $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

*b*) Calculamos los adjuntos:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow Adj(A)^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$\square$



◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 8.** Calcula las matrices inversas de:

*a*) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

*b*) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

*c*) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

*d*) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

**Ejercicio 9.** Con las matrices $A$ y $B$ del ejercicio anterior resuelve las ecuaciones matriciales:

*a*) $A\,X = B$

*b*) $X\,A = B$

*c*) $A\,X\,B = I$

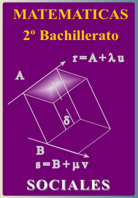
*d*) $B\,X\,A = I$

**Ejercicio 10.** Responder a las siguientes cuestiones

*a*) ¿Es cierto que toda matriz cuadrada admite inversa?

*b*) Si $|A| = 3$, ¿es cierto que $|A^{-1}| = \dfrac{1}{3}$?

*c*) Sabiendo que $|A| = -\dfrac{1}{2}$ y $|B| = -\dfrac{2}{3}$, siendo $A$ y $B$ del mismo orden, hallar $|A^{-1}\,B^{-1}|$.



## 4.2. Cálculo del rango de una matriz

En el capítulo de matrices ya hemos estudiado el concepto de **rango**. Los determinantes se pueden utilizar para determinar el rango de una matriz, basándonos en que el determinante de una matriz con una linea combinación lineal de otras paralelas es cero.

### • Menores de una matriz

De una matriz $A$ se pueden extraer submatrices cuadradas. A los determinantes de dichas submatrices los llamamos menores.
Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

menores de orden 2 son por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = 1$$

También podemos extraer menores de orden 3, que en este caso son todos nulos. En este caso, el rango como hicimos en el capítulo de matrices por reducción es,

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 13 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

pues es el número de filas no nulas de la matriz reducida. Este coincide con el mayor menor que se puede extraer de $A$, que es de orden 2. Si hay un menor no nulo, su orden indica el rango de la matriz. En este caso $r(A) = 2$. En general se tiene:

> El mayor menor no nulo da el rango de la matriz

- **Método práctico**

  Resaltamos a continuación dos indicaciones para el estudio del rango:

  *a*) Cuando la matriz consta solo de números se aconseja utilizar el método de reducción.

  *b*) Cuando la matriz consta de algún parámetro se aconseja analizar en primer lugar el mayor determinante que se pueda extraer de la matriz.

En el siguiente ejemplo ilustramos el cálculo del rango por menores, pero como hemos dicho antes se recomienda utilizar el método de reducción si la matriz no tiene parámetros.

**Ejemplo 4.3.** Utilizando el método de los menores, hallar el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

*Solución*: Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, el $rg(A) \geq 2$. Se añade una fila y columna $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$, Se prueba con la misma fila y otra columna $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$, luego la tercera fila es combinación lineal de las filas primera y segunda. Ahora probamos con la cuarta fila, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, luego $rg(A) = 3$. $\square$

**Ejemplo 4.4.** Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro $k$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

*Solución*: Analizamos en primer lugar el mayor determinante que se pueda extraer de la matriz y que contenga a $k$, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & k & -1 \end{vmatrix} = -7 - 7\,k = 0 \Longrightarrow k = -1$$

Si $\mathbf{k} = -\mathbf{1}$, sustituyendo en $A$ y reduciendo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim^{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim^{2}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(A) = 2$$

Si $\mathbf{k} \neq -\mathbf{1}$, entonces $r(A) = 3$. □

---

[1] $(f_2 - 2f_1), (f_3 - 4f_1)$
[2] $(f_3 - f_2)$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 11.** Utilizando el método de los menores, hallar el rango de las matrices

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 12.** Hallar el valor de $k$ para que el rango de la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$$

sea 2.

Ejercicio 13. Discutir en función del parámetro el rango de:

$$\text{(a)}\ M \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\ N \begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 2 & 2 & c+1 \\ 4 & 2c+2 & c^2+3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14. Discutir en función del parámetro el rango de:

$$\text{(a)}\ P \begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 2 \\ 2 & b & b^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\ Q = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{pmatrix}$$

## 4.3. Resolución de un sistema

- **Método de la inversa.**

La matriz inversa es útil como notación para expresar la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Sea por ejemplo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}\,x + a_{11}\,y + a_{13}\,z & = b_1 \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z & = b_2 \\ a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z & = b_3 \end{array}\right\}$$

Expresado en forma matricial queda:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \equiv A \cdot \widetilde{x} = \widetilde{b}$$

Si $A$ es regular y tiene inversa $A^{-1}$, multiplicando la ecuación anterior por la izquierda, se tiene que,

$$A^{-1} \cdot A \cdot \widetilde{x} = A^{-1} \cdot \widetilde{b}$$

y como $A^{-1} \cdot A = I$

$$\boxed{\widetilde{x} = A^{-1} \cdot \widetilde{b}} \tag{5}$$

**Ejemplo 4.5.** Resolver el sistema calculando la inversa

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & - & z & = & -4 \\ -4x & + & y & - & z & = & -5 \\ 2x & & & + & z & = & 5 \end{array}\right\}$$

*Solución*:
Expresamos el sistema en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \equiv A \cdot \widetilde{x} = \widetilde{b}$$

Como $Det(A) = 1 \neq 0$, existe la inversa de $A$ :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x = 1} \qquad \boxed{y = 2} \qquad \boxed{z = 3}$$

□



◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

- **Regla de Cramer**

Si sustituimos en la ecuación (5), $A^{-1}$ por su expresión mediante la matriz adjunta se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ A_{1m} & A_{2m} & A_{3m} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

y para todo $i$,

$$x_i = \frac{b_1\, A_{1i} + b_1\, A_{2i} + \cdots + b_n\, A_{ni}}{|A|}$$

que se puede expresar como el determinante de la matriz $A$ cambiando la columna $i-$ésima por los términos independientes, es decir

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & b_i & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & b_n & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad 1 \leq i \leq n \tag{6}$$

Observa que para aplicar la regla de Cramer es necesario que $|A| \neq 0$

**Ejemplo 4.6.** Resolver por la regla de Cramer el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

*Solución*: La regla de Cramer nos da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1$$

□

**Ejemplo 4.7.** Resolver por la regla de Cramer el sistema $\left.\begin{aligned} 3x - y + z &= 7 \\ x + 3y - 2z &= 0 \\ 2x + 2y - z &= 2 \end{aligned}\right\}$

*Solución*: En primer lugar comprobamos $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{5}{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{7}{2} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{2} = -4$$

□

MATEMATICAS
2º Bachillerato
SOCIALES

MaTEX

DETERMINANTES

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

## • Teorema de Rouche-Frobenius

**Teorema 4.1.** Sea el sistema de $m$ ecuaciones con $n$ incógnitas

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}\,x_1 & +a_{12}\,x_2 & +a_{13}\,x_3 & \cdots & +a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\
a_{21}\,x_1 & +a_{22}\,x_2 & +a_{23}\,x_3 & \cdots & +a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\
\dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & = & \dots \\
a_{m1}\,x_1 & +a_{m2}\,x_2 & +a_{m3}\,x_3 & \cdots & +a_{mn}\,x_n & = & b_m
\end{array} \tag{7}$$

se demuestra que el sistema tiene solución cuando el rango de la matriz $A$ de los coeficientes es el mismo que el rango de la matriz ampliada $AM$ con los términos independientes.

$$\begin{array}{ll}
\begin{array}{c}\text{COMPATIBLE}\\ r(A)=r(AM)\end{array} & \left\{\begin{array}{c}\text{DETERMINADO}\\ r(A)=r(AM)=n\\ \\ \text{INDETERMINADO}\\ r(A)=r(AM)=r<n\end{array}\right. \\
\begin{array}{c}\text{INCOMPATIBLE}\\ r(A)<r(AM)\end{array} &
\end{array}$$

**Ejemplo 4.8.** Sea el sistema :

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y &=& 1 \\ m\,y+z &=& 0 \\ x+(1+m)y+mz &=& m+1 \end{array}\right\}$$

*a*) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro $m$.

*b*) Resuelve el sistema para $m=0$.

*Solución*:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{vmatrix} = m^2 - m = 0 \Longrightarrow \boxed{m=0 \vee m=1}$$

Caso $\mathbf{m=1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} r(A)=2 \\ r(AM)=3 \\ \textbf{S.I.} \end{array}$$

Caso $\mathbf{m=0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} r(A)=2 \\ r(AM)=2 \\ \textbf{S.C.I.} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y &=& 1 \\ z &=& 0 \end{array}\right\} \left.\boxed{\begin{array}{rcl} x &=& 1-y \\ z &=& 0 \end{array}}\right\}$$

□

MATEMATICAS
2º Bachillerato
SOCIALES

MaTEX

DETERMINANTES

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 15.** Sean las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

*a*) Comprobar que ambas tienen rango 2.

*b*) Determinar los valores de $c$ tales que la matriz $A + cB$ no tenga rango 2.

**Ejercicio 16.** Hallar, si existe, una matriz cuadrada $2 \times 2$ $A$ que cumple las siguientes condiciones:

*a*) Coincide con su traspuesta

*b*) Verifica la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

*c*) Su determinante vale 9.

**Ejercicio 17.** Sean $A, B$ y $X$ tres matrices cuadradas del mismo orden que verifican la relación $A\,X\,B = I$, siendo $I$ la matriz unidad.

*a*) Si el determinante de $A$ vale $-1$ y el de $B$ vale 1, calcular razonadamente el determinante de $X$.

*b*) Calcular de forma razonada la matriz $X$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

**Ejercicio 18.** Sean las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*a*) Calcular la inversa de $A$.

*b*) Calcular la inversa de $A^{127}$ y $A^{128}$

*c*) Calcular $x$ e $y$ de forma que se cumpla $AB = BA$.

**Ejercicio 19.** Analiza las siguientes cuestiones:

*a*) Poner un ejemplo de sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea incompatible.

*b*) Poner un ejemplo de sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que tenga infinitas soluciones.

*c*) El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es 1. ¿Qué rango puede tener como máximo la matriz ampliada?.

*d*) Si el rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es 2, ¿puede ser compatible el sistema? ¿Puede ser compatible y determinado? ¿Puede ser incompatible? Razonar con ejemplos concretos.

**Ejercicio 20.** Un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿puede ser compatible y determinado ? En caso afirmativo, dar un ejemplo.

**Ejercicio 21.** Discutir el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} x+2y+z & =2 \\ 2x-y+3z & =2 \\ 5x-y+az & =6 \end{array}\right\}$$

**Ejercicio 22.** Discutir en función de $a$ el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} a^2x+3y+2z & =0 \\ ax-y+z & =0 \\ 8x+y+4z & =0 \end{array}\right\}$$

**Ejercicio 23.** Discutir y resolver en función de $a$ el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} 2\,x-y & =a \\ a\,x+3\,y & =4 \\ 3\,x-y & =2 \end{array}\right\}$$

**Ejercicio 24.** Discutir y resolver en función de $a$ el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} 2\,x+y-z & =a-4 \\ (a-6)\,y+3\,z & =0 \\ (a+1)\,x+2y & =3 \end{array}\right\}$$

**Ejercicio 25.** Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 12 \qquad \text{hallar} \begin{vmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix}$$

**Ejercicio 26.** Resolver la ecuación $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

**Ejercicio 27.** Discutir el sistema :

$$\left.\begin{array}{rcl} ax - y - z & = & 1 \\ x + 2\,y - a\,z & = & 2 \\ -x + y - z & = & a - 1 \end{array}\right\}$$

Entre los valores de $a$ que hacen el sistema compatible elegir uno en particular y resolver el sistema que resulte al reemplazar $a$ por el valor elegido.

**Ejercicio 28.** Discutir el sistema en función de $a$:

$$\left.\begin{array}{rcl} ax - ay + az & = & a \\ (3 - 2\,a)\,z & = & 1 \\ x + (a-1)\,y & = & 0 \end{array}\right\}$$

## Soluciones a los Ejercicios

**Ejercicio 1.**

*a*) Aplicando la propiedad D1a a la primera columna,

$$\begin{vmatrix} a+1 & 4 \\ a+2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 4 \\ a & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

*b*) Aplicando la propiedad D1a dos veces

$$\begin{vmatrix} a-1 & 2a+4 \\ 1+a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2a \\ 1+a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1+a & a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & 2a \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 2a \\ a & 0 \end{vmatrix} + + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ a & 0 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1

**Ejercicio 2.**

*a*) Si en un determinante una línea es múltiplo de otra paralela, el determinante es nulo. D9

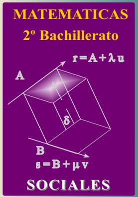
*b*) Si en un determinante se intercambian dos líneas paralelas consecutivas, el determinante cambia de signo.

Se produce un cambio de signo por cada permutación: Propiedad D2

Contamos los cambios por columnas:

$$\begin{array}{cc} (c_1, c_2, c_3) & \text{inicio} \\ (c_1, c_3, c_2) & - \\ (c_3, c_1, c_2) & + \\ (c_3, c_2, c_1) & - \end{array}$$

Ejercicio 2






◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 3(a)**
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(b-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

1. Reducimos con $f_3 - a\, f_2$ y con $f_2 - a\, f_1$.
2. Reducimos con $f_3 - b\, f_2$.

□

**Ejercicio 3(b)** Utilizamos propiedades para que el alumno las aprenda

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{D3}{=} 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{D2}{=}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{7\,f_3 - f_2}{=} -\frac{2}{7} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 31 \end{vmatrix} = 62$$

1. Reducimos con $f_2 - 2\,f_1$ y $f_3 + f_1$

□



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 4.**

*a*) Elegimos la 1ª fila

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -15$$

*b*) Elegimos la 1ª columna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

*c*) Elegimos la 3ª columna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 32$$

El alumno puede hacerlos también por reducción o desarrollando por otras líneas para practicar. Ejercicio 4



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 5(a)** Obtenemos ceros en la tercera fila usando como pivote el elemento $a_{31} = -1$.

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 10 & 5 \\ 2 & 4 & 11 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(2)}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 4 & 11 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 4 \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} = -45$$

(1) Reducimos con $c_2 + c_1$ y $c_3 + 2\,c_1$.
(2) Desarrollamos por adjuntos en la tercera fila.
(3) Desarrollamos por adjuntos en la primera columna.

**Ejercicio 5(b)** Obtenemos ceros en la segunda columna usando como pivote el elemento $a_{12} = 1$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{(2)}{=} - \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ -5 & -1 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} - \begin{vmatrix} 13 & 3 & 17 \\ 24 & 5 & 28 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} -44$$

(1) Reducimos con $f_2 - f_1$ , $f_3 - 2\,f_1$ y $f_4 - 3\,f_1$.
(2) Desarrollamos por adjuntos en la segunda columna.
(3) Reducimos con $c_1 + 5\,c_2$ y $c_3 + 5\,c_2$.
(4) Desarrollamos por adjuntos en la tercera fila.

$\square$



Doc Doc
Volver Cerrar

## Ejercicio 6(a)

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a+4 & 1 & 1 & 1 \\ a+4 & a+1 & 1 & 1 \\ a+4 & 1 & a+1 & 1 \\ a+4 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{D1}{=} (a+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (a+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$= a^3(a+4)$$

(1) Reducimos sumando a la $c_1$ las restantes $c_2 + c_3 + c_4$.
(2) Reducimos restando a todas las filas la primera $f_1$

□

**Ejercicio 6(b)**

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \overset{(1/a)\,c_1}{=} a \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & b & c & c \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(1)}{=} a \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

1. Reducimos con $f_4 - f_3$ y con $f_3 - f_2$.

## Ejercicio 7(a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 21 & 23 & 25 & 27 \end{vmatrix} \begin{array}{c} c_2 - c_1 \\ = \\ c_4 - c_3 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 10 & 2 & 14 & 2 \\ 21 & 2 & 25 & 2 \end{vmatrix} \overset{D4}{=} 0$$

$\square$

## Ejercicio 7(b)

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} -1+3x & x & x & x \\ -1+3x & -1 & x & x \\ -1+3x & x & -1 & x \\ -1+3x & x & x & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{D1}{=} (-1+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & -1 & x & x \\ 1 & x & -1 & x \\ 1 & x & x & -1 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} (-1+3x)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & -1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = (-1+3x)\,(-1-x)^3$$

1. Reducimos sumando a la $c_1$ las restantes $c_2 + c_3 + c_4$.
2. Reducimos restando a todas las filas la primera $f_1$.

$\square$

**Ejercicio 8.**

*a)* $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

*b)* $B^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

*c)* $C^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -38 & 6 & 22 \\ 6 & -1 & -3 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

*d)* $D^{-1} = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 20 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 8



◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

**Ejercicio 9.**

a) $A\,X = B \Longrightarrow A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,B \Longrightarrow \boxed{X = A^{-1}\,B}$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $X\,A = B \Longrightarrow X\,A\,A^{-1} = B\,A^{-1} \Longrightarrow \boxed{X = B\,A^{-1}}$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $A\,X\,B = I \Longrightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}B^{-1} \Longrightarrow \boxed{X = A^{-1}B^{-1}}$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -11 \end{pmatrix}$$

d) $B\,X\,A = I \Longrightarrow B^{-1}BXAA^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Longrightarrow \boxed{X = B^{-1}A^{-1}}$

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9



◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

**Ejercicio 10.**

*a*) Falso. Ya hemos visto que es necesario y suficiente que su determinante sea distinto de cero. CONDICIÓN 4

*b*) Verdadero pues

$$|A \cdot A^{-1}| = |I_d| = 1 = |A|\,|A^{-1}| \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{3}$$

Propiedad D9

*c*) Como

$$\left\{ \begin{array}{lcl} |A| = -\dfrac{1}{2} & \Longrightarrow & |A^{-1}| = -2 \\ |B| = -\dfrac{2}{3} & \Longrightarrow & |B^{-1}| = -\dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

luego por la regla de Laplace

$$|A^{-1}\,B^{-1}| = |A^{-1}| \cdot |B^{-1}| = (-2)(-\frac{3}{2}) = \mathbf{3}$$

Ejercicio 10



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 11.**

*a*) Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, el $rg(A) = 2$ pues no hay menores de orden 3.

*b*) Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, el $rg(B) \geq 2$.

Por otra parte como el único menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

se tiene $rg(B) = 2$.

Ejercicio 11



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 12.** Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, el $rg(B) \geq 2$. Para que no pueda ser 3 es necesario que su determinante sea nulo, $|C| = 0$,

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{vmatrix} = 11\,k^2 - k - 12$$

Para que $11\,k^2 - k - 12 = 0$ es necesario que $k = 12/11$ ó $k = -1$.

Ejercicio 12

**Ejercicio 13(a)** Elegimos de $M\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ un menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -a+3=0 \Longrightarrow a=-3$$

Si $a \neq -3 \Longrightarrow r(M)=3$, y para $a=-3$ sustituimos en $M$ y reducimos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim^{1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(M)=3$$

para todo valor de $a$ se tiene $r(M)=3$

□

[1] $(f_2-2f_1),(f_3-f_1)$

**Ejercicio 13(b)** Calculamos

$$|N| = -2c(c-1)^2 = 0 \Longrightarrow c = 0 \vee 1$$

- $c = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(N) = 1$$

- $c = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim^{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(N) = 2$$

□

[1] $(f_2 - 2f_1), (f_3 - 4f_1)$

**Ejercicio 14(a)** Elegimos de $P$ un menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} b & 1 & 2 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (b-1)(2b-1) = 0 \Longrightarrow b = 1 \vee b = 1/2$$

$$\bullet\, b \neq 1 \wedge b \neq 1/2 \Longrightarrow r(P) = 3$$

Si $\bullet\, b = 1$ sustituimos en $P$ y reducimos la matriz, $r(P) = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\bullet\, b = 1/2$ sustituimos en $P$ y reducimos la matriz, $r(P) = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1/4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -14 & -15 & -28 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) $f_2 - 2f_1$, $f_3 - f_1$.
(2) $2f_1$ y $4f_2$.
(3) $f_2 - 8f_1$ y $f_3 - f_1$.

□

**Ejercicio 14(b)** Elegimos de $Q$ un menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k-1)^2(k+2) = 0 \Longrightarrow k = 1 \vee k = -2$$

$$\bullet\, k \neq 1 \wedge k \neq -2 \Longrightarrow r(Q) = 3$$

Si $\bullet\, k = 1$ sustituimos en $Q$ y reducimos la matriz, $r(Q) = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\bullet\, k = -2$ sustituimos en $Q$ y reducimos la matriz, $r(Q) = 3$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(1) $f_2 - f_1$, $f_3 - f_1$.
(2) $2f_2 + f_1$ y $2f_3 + f_1$.
(3) $f_3 + f_2$.

□

**Ejercicio 15.**

*a*) Como $|A| = 6$ y $|B| = -1$ ambas tienen rango 2.

*b*) Para que el rango de $A + cB$ no sea 2, $|A + cB| = 0$.

$$|A + cB| = \begin{vmatrix} 1 + c & -1 \\ 4 + 4c & 2 - c \end{vmatrix} = 5\,c + 6 = 0 \Longrightarrow \boxed{c = -\frac{6}{5}}$$

Ejercicio 15

**Ejercicio 16.** Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz buscada:

*a*) Coincide con su traspuesta, entonces $c = b$

*b*) Verifica la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+b & d-a \\ -a-b & a-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{rl} a+b & = -3 \\ d-a & = -3 \end{array}$$

luego $A$ se puede expresar como $A = \begin{pmatrix} a & -a-3 \\ -a-3 & a-3 \end{pmatrix}$

*c*) Igualando $|A| = 9 \Longrightarrow a = 2$, y la solución es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 16

**Ejercicio 17.**

*a*) Por la regla de Laplace se tiene.

$$|AXB| = |I| = |A|\,|X|\,|B| = 1 \Longrightarrow (-1)|X|\,1 = 1 \Longrightarrow |X| = -1.$$

*b*)

$$AXB = I \Longrightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}B^{-1} \Longrightarrow X = A^{-1}B^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 17

**Ejercicio 18.**

*a*) Calcular la inversa de $A$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

*b*) Calcular la inversa de $A^{127}$ y $A^{128}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego las potencias pares son $I$, y las impares son $A$. Tenemos así que

$$(A^{127})^{-1} = (A)^{-1} = A \qquad (A^{128})^{-1} = (I)^{-1} = I$$

*c*) Calcular $x$ e $y$ de forma que se cumpla $AB = BA$.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = BA$$

$$\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{x = 0 \quad y = 1}$$

Ejercicio 18

**Ejercicio 19.**

*a*) Lo más sencillo es dejar la parte lineal de los coeficientes igual y cambiar el término independiente. Por ejemplo

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ x+y-z &= 2 \end{aligned}$$

que implica el absurdo $0 = 2$.

*b*) Cualquiera que sea compatible. Por ejemplo

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ y-z &= 1 \end{aligned}$$

*c*) Claramente 1 ó 2.

*d*) Puede haber dos casos:

- Si el $r(AM) = 2 = rg(A) < 3$ el sistema no puede ser compatible determinado, será compatible indeterminado.
- Si el $rg(AM) = 3 > rg(A)$ sistema incompatible.

Ejercicio 19



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 20.** Si, cuando $r(A) = r(AM) = n^o$ incógnitas. Veamos un ejemplo. Tomemos $x = 1$ e $y = 2$ y escribamos

$$x + y = 3 \qquad x - y = -1 \qquad 3x + y = 5$$

Ejercicio 20



◄◄ ►►
◄ ►
◄ Doc Doc ►
Volver Cerrar

**Ejercicio 21.**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & a \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & a \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5a + 36 = 0 \quad \Rightarrow a = \frac{36}{5}$$

- Caso $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{36}}{\mathbf{5}}$.

$$\underbrace{\left( \begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & \frac{36}{5} \end{matrix}}^{A} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix} \right)}_{AM} \xrightarrow[f_3 - 5\,f_1]{f_2 - 2\,f_1} \underbrace{\left( \begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -55 & 11 \end{matrix}}^{A} & \begin{matrix} 2 \\ -2 \\ -20 \end{matrix} \end{matrix} \right)}_{AM}$$

$$\xrightarrow{f_3 - 11\,f_2} \underbrace{\left( \begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}^{A} & \begin{matrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix} \right)}_{AM} \Rightarrow \begin{matrix} r(A) & = & 2 \\ r(AM) & = & 3 \end{matrix} \quad \textbf{S.I.}$$

- Caso $\mathbf{a} \neq \dfrac{\mathbf{36}}{\mathbf{5}}$, $r(A) = 3 = r(AM)$, **S.C.D.**

Ejercicio 21

MATEMATICAS
2º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
DETERMINANTES
Doc Doc
Volver Cerrar

**Ejercicio 22.** Este sistema es homogéneo, siempre tiene solución.

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & 3 & 2 \\ a & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5a^2 - 10a + 40$$

$$|A| = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{a=-4}} \vee \quad \boxed{\text{a=2}}$$

- Caso $\mathbf{a} = -\mathbf{4} \vee \mathbf{2}$ $\quad r(A) = r(AM) = 2$ **S.C.I.**
- Caso $\mathbf{a} \neq -\mathbf{4} \wedge \mathbf{2}$ $\quad r(A) = r(AM) = 3$ **S.C.D.** En este caso como es homogéneo la solución es la nula $(0,0,0)$.

Ejercicio 22

**Ejercicio 23.** En este caso comenzamos con el determinante de la matriz ampliada $AM$ .

$$|AM| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} a & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -a^2 - 7a + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{a=1}} \vee \quad \boxed{\text{a=-8}}$$

- Caso $\mathbf{a} = \mathbf{1}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \stackrel{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \stackrel{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} r(A) = 2 \\ r(AM) = 2 \\ \textbf{S.C.D.} \end{array}$$

(1) $2f_2 - f_1$ y $2f_3 - 3\,f_1$.
(2) $7f_3 - f_2$

$$\boxed{y = 1} \quad \boxed{x = 1}$$

- Caso $\mathbf{a} = -\mathbf{8}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -8 \\ -8 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \stackrel{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -8 \\ 0 & -1 & -28 \\ 0 & 1 & 28 \end{array}\right) \stackrel{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -8 \\ 0 & -1 & -28 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} r(A) = 2 \\ r(AM) = 2 \\ \textbf{S.C.D.} \end{array}$$

(1) $f_2 + 8f_1$ y $f_3 - 3\,f_1$.
(2) $2f_3 - f_2$

$$\boxed{y = 28} \quad \boxed{x = 10}$$

- Caso $\mathbf{a} \neq -\mathbf{8}$ y $\mathbf{a} \neq \mathbf{1}$, $r(A) < r(AM) = 3 \Longrightarrow$ **S.I.**

Ejercicio 23



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 24.** Comenzamos con el determinante de la matriz $A$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-6 & 3 \\ a+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = a^2 - 2a - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{a=5}} \vee \quad \boxed{\text{a=-3}}$$

- Caso $\mathbf{a = 5}$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \quad \begin{array}{c} r(A) = 2 \\ r(AM) = 2 \\ \textbf{S.C.I.} \end{array}$$

(1) $f_3 - 3\,f_1$.
(2) $f_3 - f_2$

$$\boxed{y = 3z} \boxed{x = \frac{1-2z}{2}}$$

- Caso $\mathbf{a = -3}$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right); \quad \begin{array}{c} r(A) = 2 \\ r(AM) = 3 \\ \textbf{S.I.} \end{array}$$

(1) $f_3+, f_1$.
(2) $3f_3 + f_2$

- Caso $\mathbf{a \neq -8}$ y $\mathbf{a \neq 1}$, $r(A) = r(AM) = 3 \Longrightarrow$ **S.C.D.**. Expresamos la solución con el método de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a-4 & 1 & -1 \\ 0 & a-6 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{a^2 - 2a - 15} \; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a-4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ a+1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{a^2 - 2a - 15} \; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a-4 \\ 0 & a-6 & 0 \\ a+1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{a^2 - 2a - 15}$$

Ejercicio 24



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

**Ejercicio 25.**

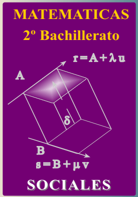
$$\begin{vmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & c & b \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2d & 2f & 2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(2)}{=} -3 \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} d & f & e \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(3)}{=} -3(-12) - 6(0) = \mathbf{36}$$

(1) Propiedad $D1a$
(2) Propiedad $D1b$
(3) Propiedad $D2$ y $D4$

Ejercicio 25



**Ejercicio 26.** Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ejercicio 26

## Ejercicio 27.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a^2 - a - 2 = 0 \Longrightarrow \boxed{a = -1 \vee a = 2}$$

Caso $\mathbf{a \neq -1 \wedge 2}$ **S.C.D.**

Caso $\mathbf{a = -1}$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 - f_1]{f_2 + f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} r(A) = 2 \\ r(AM) = 3 \\ \textbf{S.I.} \end{array}$$

Caso $\mathbf{a = 2}$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2f_3 + f_1]{2f_2 - f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 - f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$r(A) = 2 \; r(AM) = 2 \; \textbf{S.C.I.}$$

Resolvemos con $\mathbf{a = 1}$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 + f_1]{f_2 - f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 - 2f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$x = 1/2 \quad y = 1 \quad z = 1/2$$

Ejercicio 27

**Ejercicio 28.**

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -a & a \\ 0 & 0 & 3-2a \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2(3-2\,a) = 0 \Longrightarrow \boxed{a = 0 \vee a = 3/2}$$

Caso $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{3/2}$ **S.C.D.**

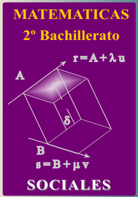
Caso $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} r(A) = 2 \\ r(AM) = 2 \\ \textbf{S.C.I.} \end{array}$$

Caso $\mathbf{a} = \mathbf{3/2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3/2 & -3/2 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} r(A) = 2 \\ r(AM) = 3 \\ \textbf{S.I.} \end{array}$$

Ejercicio 28






◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

## Soluciones a los Tests

**Solución al Test:** Por la propiedad D1b, el número buscado es $\star = 3$, pues

$$\begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Final del Test

# Índice alfabético