

# Proyecto MaTeX

## Representación de Funciones

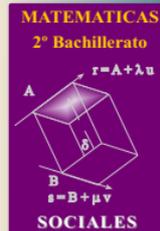
Fco Javier González Ortiz

### Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)

© 2004 [javier.gonzalez@unican.es](mailto:javier.gonzalez@unican.es)  
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTeX

GRÁFICAS



# Tabla de Contenido

1. Introducción
  2. Dominio
    - De funciones racionales
  3. Asíntotas
    - 3.1. Asíntota Vertical
    - 3.2. Asíntota Horizontal
    - 3.3. Asíntota Oblicua
      - Caso general
  4. Crecimiento y Decrecimiento
  5. Concavidad
    - 5.1. Punto de Inflexión
- Soluciones a los Ejercicios



MaTeX

GRÁFICAS



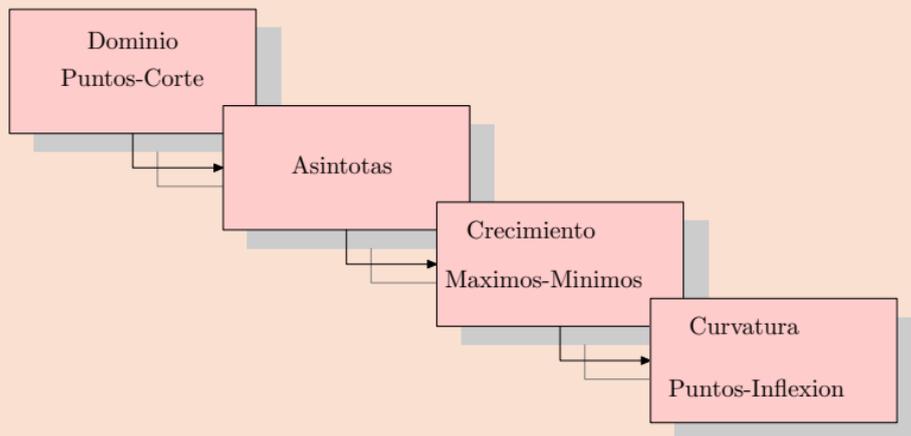


## 1. Introducción

En este capítulo vamos a aplicar las características ya estudiadas en capítulos anteriores para representar gráficamente una función real  $f(x)$ .

Es habitual seguir los siguientes pasos para realizar un gráfico:

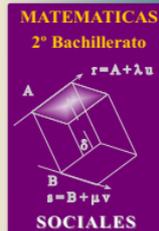
- el dominio
- puntos de corte con los ejes
- las ramas del infinito para las asíntotas
- el crecimiento, decrecimiento y extremos locales con la primera derivada
- la concavidad y puntos de inflexión con la segunda derivada



MaTeX

GRÁFICAS





## 2. Dominio

El dominio de una función  $y = f(x)$  es el conjunto de números reales en los que la función está definida.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \exists f(x)\}$$

### • De funciones racionales

Dada una función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios, el dominio de  $f(x)$  viene dado por todos los números reales salvo las raíces del denominador. Es decir

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$$

**Ejercicio 1.** Determinar el dominio de las funciones.

$$a) f(x) = \frac{2}{3x}$$

$$b) g(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$c) h(x) = \frac{x}{1 + x}$$

**Ejercicio 2.** Determinar el dominio de las funciones.

$$a) f(x) = \frac{3x}{5}$$

$$b) g(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$c) h(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x}$$

# MaTEX

# GRÁFICAS





### 3. Asíntotas

En este apartado usaremos el concepto de límite para mostrar el aspecto gráfico de las funciones.

Cuando una función en la proximidad de un punto  $x = \mathbf{a}$  o en el **infinito** se aproxima a una recta tanto como queramos decimos que tiene una **asíntota** o que la función tiene una rama asintótica. En caso contrario decimos que tiene una rama **parabólica**.

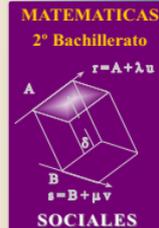
- Las funciones polinómicas  $y = P(x)$  no tienen asíntotas, solo ramas parabólicas.
- Las funciones racionales  $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios puede tener asíntotas de tres tipos:
  - a) asíntota horizontal
  - b) asíntota vertical
  - c) o asíntota oblicua

Vamos a analizar con detalle estos tres tipos para las funciones racionales.

MaTeX

GRÁFICAS





### 3.1. Asíntota Vertical

#### Asíntota Vertical

Cuando en un punto  $x = a$  se tiene

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

decimos que la función presenta una rama infinita o asíntota Vertical

**Ejemplo 3.1.** Halla y representa la asíntota vertical de  $y = \frac{1}{x}$

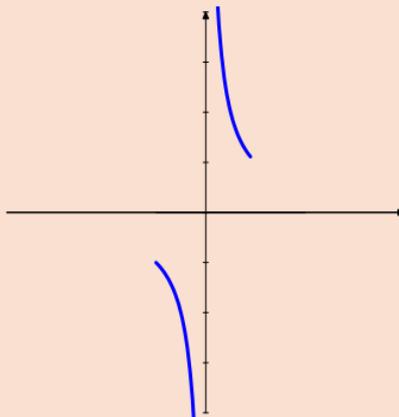
*Solución:*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

tiene como asíntota vertical el eje  $OY$ ,  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

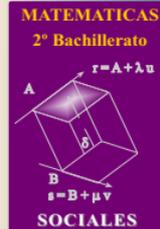


MaTEX

GRÁFICAS



□



**Ejemplo 3.2.** Halla la asíntotas de  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  y  $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

*Solución:*

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \text{ tiene } x = 1.$$

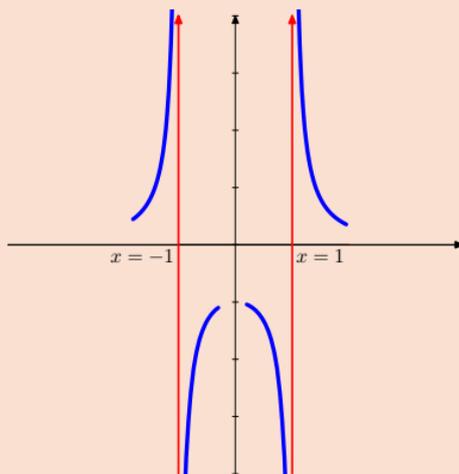
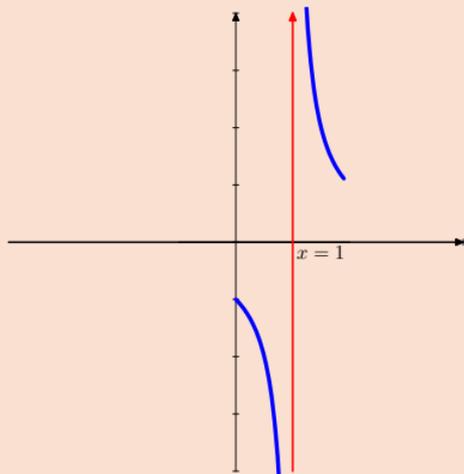
$$g(x) = \frac{1}{x^2-1} \text{ tiene } x = \pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2-1} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$$



MaTEX

GRÁFICAS



**Ejemplo 3.3.** Halla y representa la asíntota vertical de  $y = \frac{1}{x^2 - 2x}$

*Solución:*

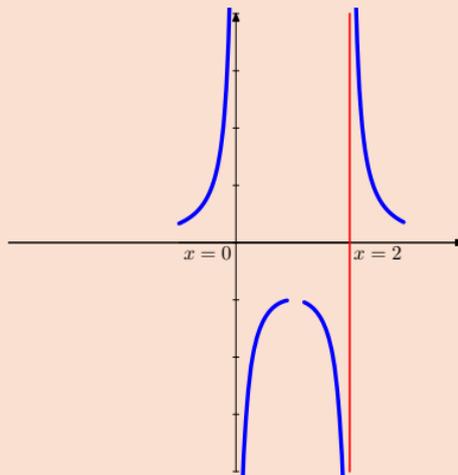
$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$  dos asíntotas  
verticales  $x = 0$  y  $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 - x} = +\infty$$

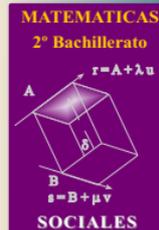


□

**Ejercicio 3.** Hallar y representar, si las hay, las asíntotas verticales de las funciones:

a)  $f(x) = \frac{2+x}{3-x}$

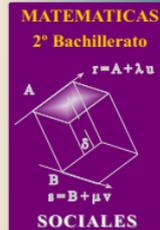
b)  $g(x) = \frac{x^2}{x+1}$



MaTeX

GRÁFICAS





## 3.2. Asíntota Horizontal

### Asíntota Horizontal

Cuando se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

decimos que la función tiene la asíntota horizontal  $y = L$

**Ejemplo 3.4.** Halla y representa la asíntota horizontal de  $y = \frac{1}{x}$

*Solución:*

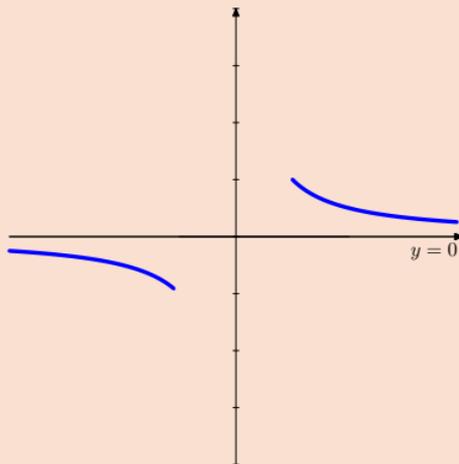
$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ tiene } y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Para dibujarla, lo más cómodo es dar valores grandes a  $x$ .

$$\text{Si } x > 0 \implies \frac{1}{x} > 0$$

$$\text{Si } x < 0 \implies \frac{1}{x} < 0$$



□

MaTeX

GRÁFICAS



**Ejemplo 3.5.** Halla y representa la asíntota horizontal de  $y = \frac{x+1}{x}$

*Solución:*

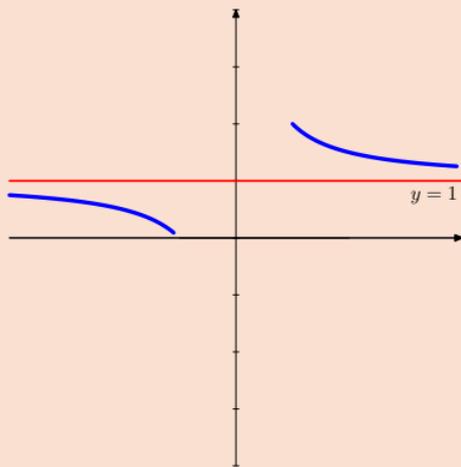
Asíntotas horizontal  $y = 1$   
pues

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

Para dibujarla, lo más cómodo es dar valores «grandes» a  $x$ .

$$\text{Si } x = 10 \implies \frac{10+1}{10} > 1$$

$$\text{Si } x = -10 \implies \frac{(-10)+1}{-10} < 1$$

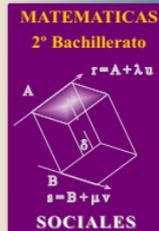


□

**Ejercicio 4.** Hallar y representar, si las hay, las asíntotas horizontales de las funciones:

$$a) f(x) = \frac{2+x}{3-x}$$

$$b) g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$



MaTeX

GRÁFICAS



### 3.3. Asíntota Oblicua

Una función  $f(x)$  en la proximidad del infinito  $x \rightarrow \infty$  decimos que tiene como **asíntota oblicua**, cuando se aproxima a una recta

$$y = mx + n$$

Primero explicamos como calcularlas para las funciones racionales y después damos una expresión más general. Sea la función

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Si dividimos, la podemos expresar como

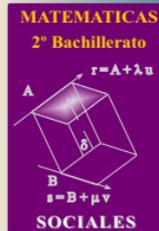
$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

y para valores de  $x$  tan grandes como queramos, cuando  $x \rightarrow \infty$ , como  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  tenemos que

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \approx \boxed{x}$$

es decir para valores de  $x$  “grandes” la función toma valores cercanos a  $x$ , y por tanto su gráfica se aproxima a la recta  $y = x$ . Decimos que la asíntota oblicua es

$$y_o = x$$



MaTEX

GRÁFICAS

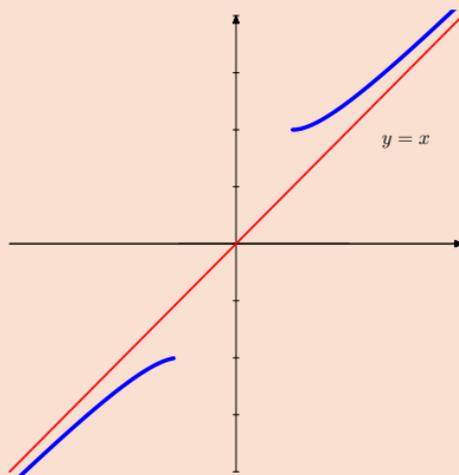


$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

Aíntota oblicua  $y = x$

$$x \rightarrow +\infty \quad f(x) > x$$

$$x \rightarrow -\infty \quad f(x) < x$$



En general, la asíntota oblicua para las racionales

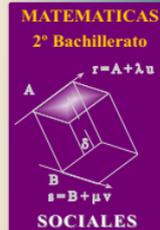
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

es el cociente de la división, siempre y cuando el grado del numerador sea una **unidad mayor** que el grado del denominador.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Asíntota oblicua  $y_o = C(x)$

Así pues para determinar la asíntota oblicua se dividen los polinomios y



MaTeX

GRÁFICAS



se toma el cociente cuando es de grado uno, es decir una recta. En el siguiente ejemplo se muestra como se calcula.

**Ejemplo 3.6.** Veamos algunos ejemplos:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1} = \boxed{x - 1} + \frac{3}{x - 1} \quad y_o = x - 1$$

$$g(x) = \frac{3x^2 - 1}{x + 1} = \boxed{3x - 3} + \frac{2}{x + 1} \quad y_o = 3x - 3$$

$$h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{1 - x} = \boxed{-x - 2} + \frac{3}{1 - x} \quad y_o = -x - 2$$

$$j(x) = \frac{x^3 + 1}{x} = \boxed{x^2} + \frac{1}{x} \quad \text{No hay oblicua}$$

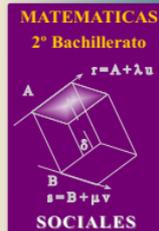
$$k(x) = \frac{x + 1}{x} = \boxed{1} + \frac{1}{x} \quad y = 1 \text{ horizontal}$$

$$h(x) = \frac{2 - x^2}{x} = \boxed{-x} + \frac{2}{x} \quad y_o = -x$$

**Ejercicio 5.** Hallar y representar, si las hay, las asíntotas oblicuas de las funciones:

$$a) f(x) = \frac{2 + x^2}{2 + x}$$

$$b) g(x) = \frac{x^2 - 2}{1 - x}$$



MaTEX

GRÁFICAS



**Ejemplo 3.7.** Hallar y representar la oblicua de  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

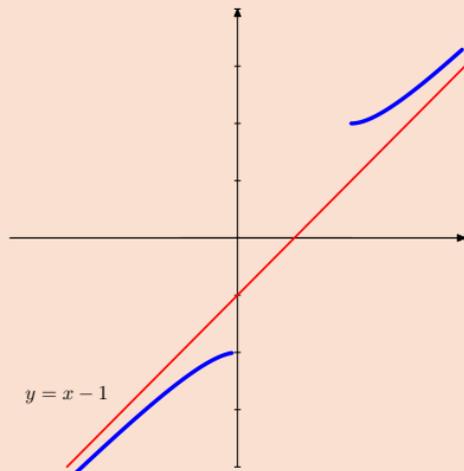
*Solución:*

Dividimos y

$$\frac{x^2}{x+1} = \boxed{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$y_o = x - 1$$

$$\bullet \underbrace{f(x) > x - 1}_{x \rightarrow +\infty} \quad \underbrace{f(x) < x - 1}_{x \rightarrow -\infty}$$



Para explicar la posición  $\bullet$  de la curva respecto a la asíntota, lo más fácil, es dar un valor a  $x$  lo suficientemente grande, y comparar el valor de la función y de la asíntota. Por ejemplo en  $x = 10$  y  $x = -10$ .

$$f(10) = 9,09 \quad y_o(10) = 9 \implies f(x) > y_o$$

$$f(-10) = -11,11 \quad y_o(-10) = -11 \implies f(x) < y_o$$

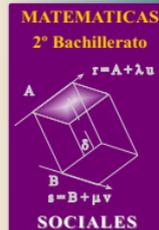
□



MaTeX

GRÁFICAS



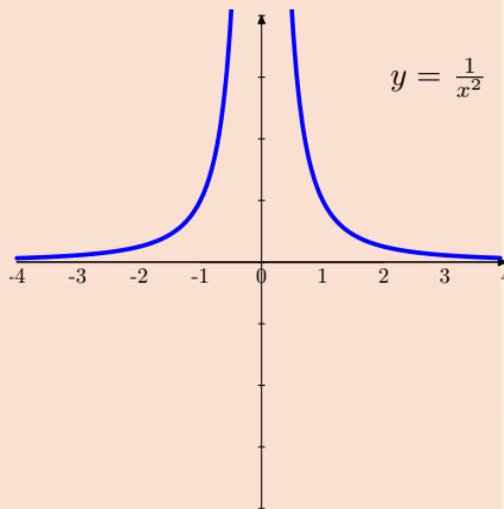


**Ejemplo 3.8.** Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{1}{x^2}$$

*Solución:*

Ramas del Infinito de $\frac{1}{x^2}$	
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$	$0$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$	$0$



MaTeX

GRÁFICAS

La función presenta:

- una asíntota vertical en  $x = 0$
- una asíntota horizontal  $y = 0$

□



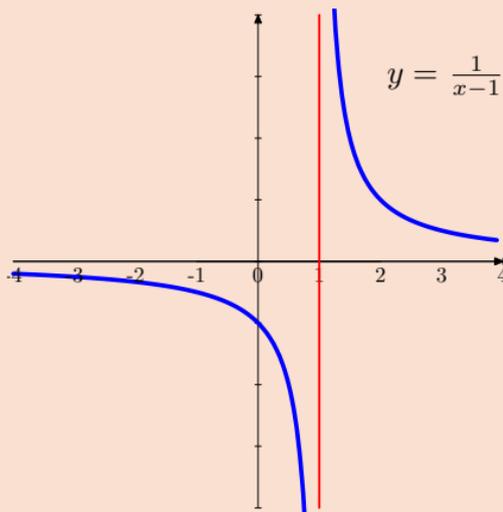


**Ejemplo 3.9.** Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{1}{x-1}$$

*Solución:*

Ramas del Infinito de $\frac{1}{x-1}$	
$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1}$	$0$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1}$	$0$



La función presenta:

- una asíntota vertical en  $x = 1$
- una asíntota horizontal  $y = 0$

□

MaTeX

GRÁFICAS



**Ejercicio 6.** Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{x}{x-1}$$

**Ejercicio 7.** Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

**Ejercicio 8.** Estudia y representa con las asíntotas la función:

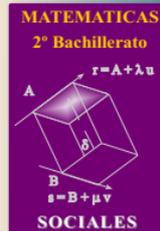
$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

**Ejercicio 9.** Estudia y representa con las asíntotas la función:

$$y = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

**Ejercicio 10.** Estudia y representa con las asíntotas la función:

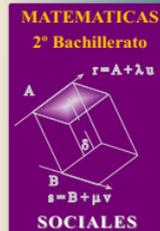
$$y = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$$



MaTEX

GRÁFICAS





### • Caso general

Para el caso general, queremos ver cuando la función se aproxima a la recta  $y = mx + n$  en el infinito, es decir,

$$f(x) \simeq mx + n \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

Dividiendo por  $x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{mx + n}{x} = \mathbf{m}$$

y

$$\mathbf{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \mathbf{m}x)$$

Así la asíntota oblicua para el caso general se determina con la expresión:

$$y_o = mx + n \quad \begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \end{cases} \quad (1)$$

**Ejemplo 3.10.** Hallar la asíntota oblicua de  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x}{x + 1} = -1$$

La asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , es  $\boxed{y_o = x - 1}$ .

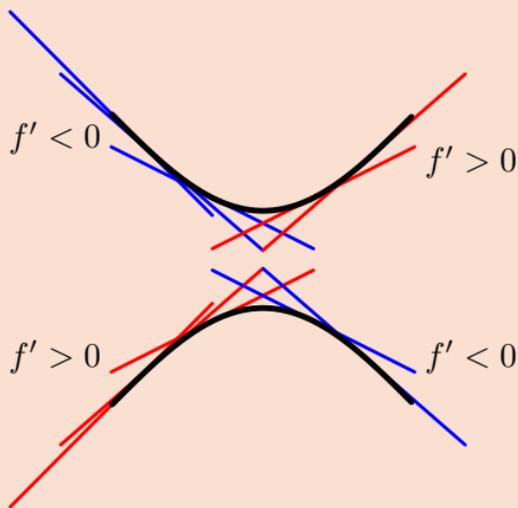
MaTEX

GRÁFICAS

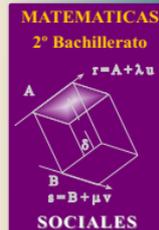


## 4. Crecimiento y Decrecimiento

En las funciones del gráfico se observa que donde la curva es creciente las tangentes en rojo tienen pendiente positiva, es decir, la derivada es  $f' > 0$ , y donde la curva es decreciente las tangentes en azul tienen pendiente negativa, es decir, la derivada es  $f' < 0$ . La tangente amarilla tiene pendiente nula,  $f' = 0$ .



	Mínimo relativo			Máximo relativo		
	$x = a$			$x = a$		
$f'$	-	0	+	+	0	-
$f$	↘	$\exists f(a)$	↗	↗	$\exists f(a)$	↘



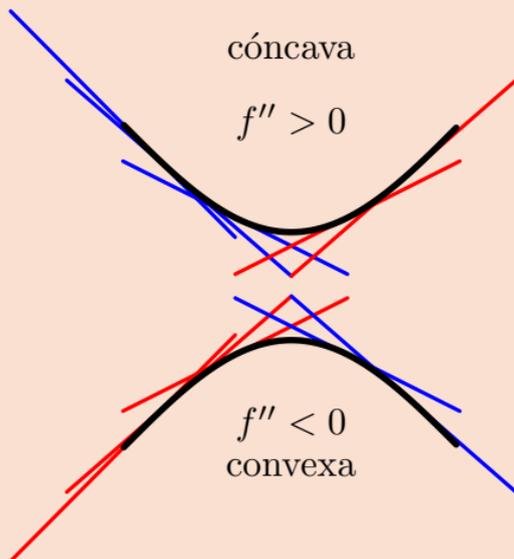
MaTEX

GRÁFICAS



## 5. Concavidad

A partir del gráfico se observa que donde la curva es **cóncava**  $\cup$ , las tangentes están por debajo de la función, y, donde la curva es **convexa**  $\cap$ , las tangentes están por encima de la función. Por otra parte en la gráfica superior las pendientes van aumentando, es decir  $f'(x)$  es creciente y por tanto su derivada es positiva  $f''(x) > 0$



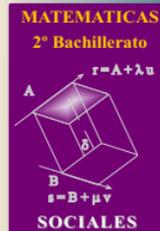
	Mínimo relativo			Máximo relativo		
	$x = a$			$x = a$		
$f'$	-	0	+	+	0	-
$f$	$\searrow$	$\exists f(a)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\exists f(a)$	$\searrow$



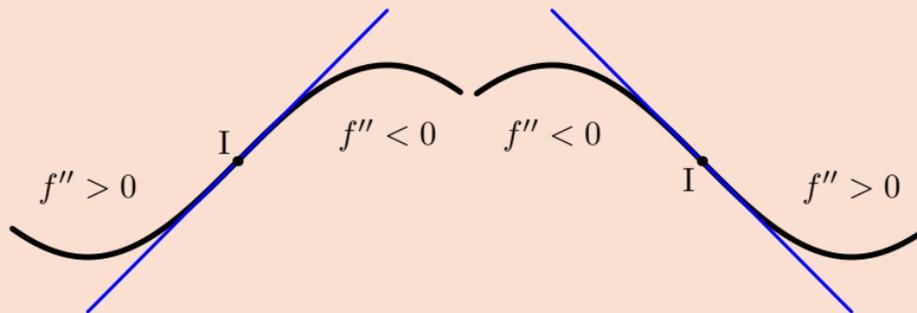
MaTeX

GRÁFICAS





## 5.1. Punto de Inflexión



	Punto Inflexión		
	$x = a$		
$f''$	+	0	-
$f$	∪	∃ $f(a)$	∩

	Punto Inflexión		
	$x = a$		
$f''$	-	0	+
$f$	∩	∃ $f(a)$	∪

Cuando en un punto  $(a, f(a))$  la función cambia de Concavidad se tiene un punto de inflexión, y la tangente en el punto, si existe, atraviesa la función.

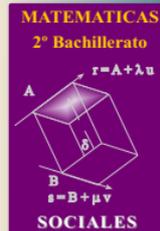
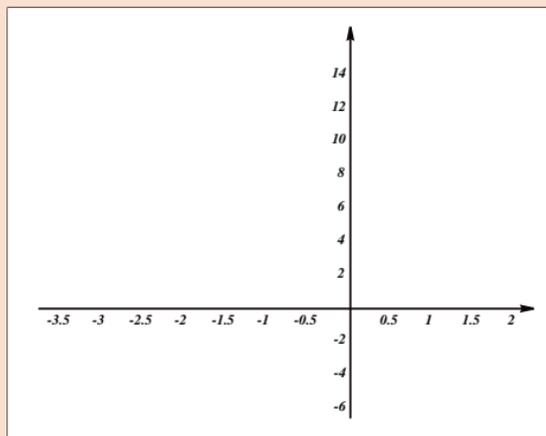
MaTEX

GRÁFICAS



**Ejemplo 5.1.**  $f(x) = x^3 + 3x^2$

Puntos de corte



MaTEX

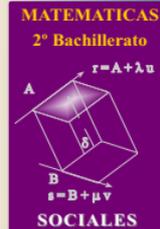
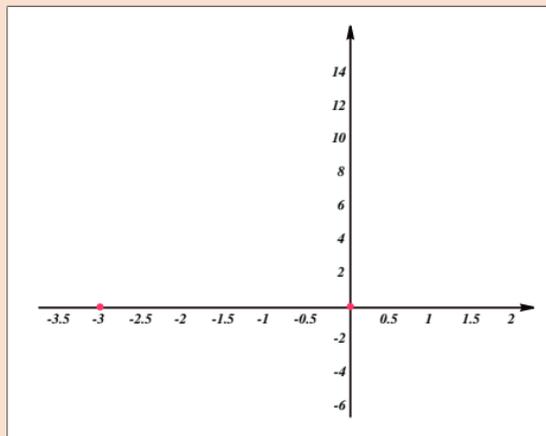
GRÁFICAS



**Ejemplo 5.1.**  $f(x) = x^3 + 3x^2$

Puntos de corte

$$y = 0 = x^3 + 3x^2 \implies x = 0; -3$$



MaTEX

GRÁFICAS



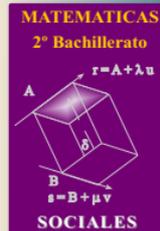
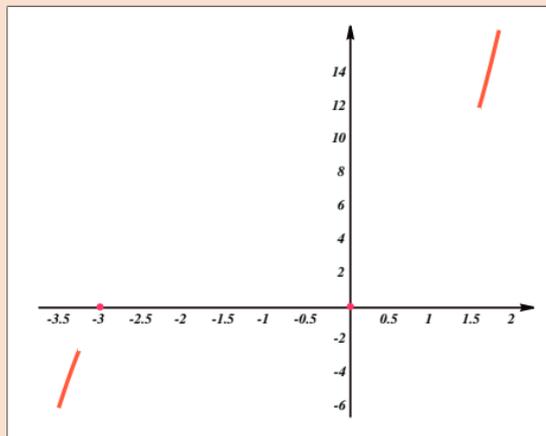
**Ejemplo 5.1.**  $f(x) = x^3 + 3x^2$

Puntos de corte

$$y = 0 = x^3 + 3x^2 \implies x = 0; -3$$

Ramas del infinito.

$$f(-\infty) = -\infty \quad f(\infty) = \infty$$



MaTeX

GRÁFICAS



**Ejemplo 5.1.**  $f(x) = x^3 + 3x^2$

Puntos de corte

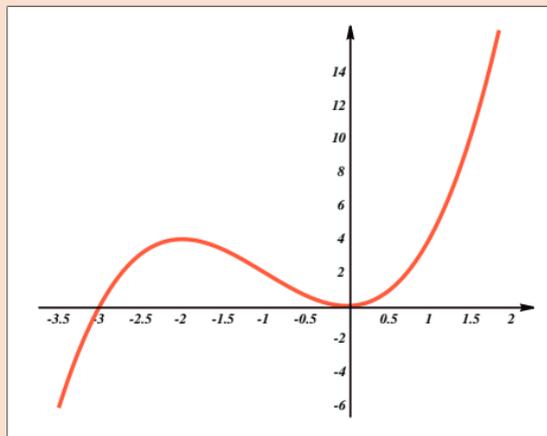
$$y = 0 = x^3 + 3x^2 \implies x = 0; -3$$

Ramas del infinito.

$$f(-\infty) = -\infty \quad f(\infty) = \infty$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$



	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$\nearrow$	$4$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$



MaTeX

GRÁFICAS



**Ejemplo 5.1.**  $f(x) = x^3 + 3x^2$

Puntos de corte

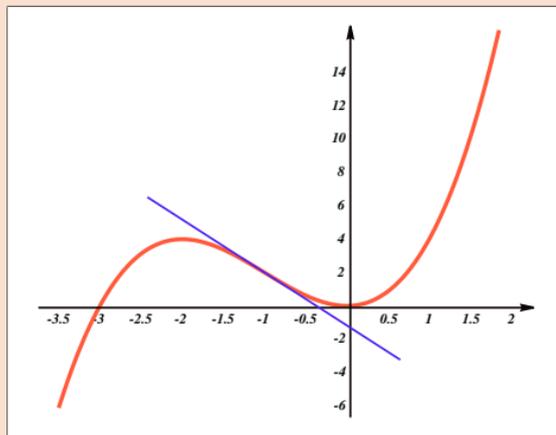
$$y = 0 = x^3 + 3x^2 \implies x = 0; -3$$

Ramas del infinito.

$$f(-\infty) = -\infty \quad f(\infty) = \infty$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$



	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$\nearrow$	$4$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$

Concavidad.

$$f''(x) = 6x + 6$$

	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$y''$	$-$	$0$	$+$
$y$	$\cap$	$2$	$\cup$



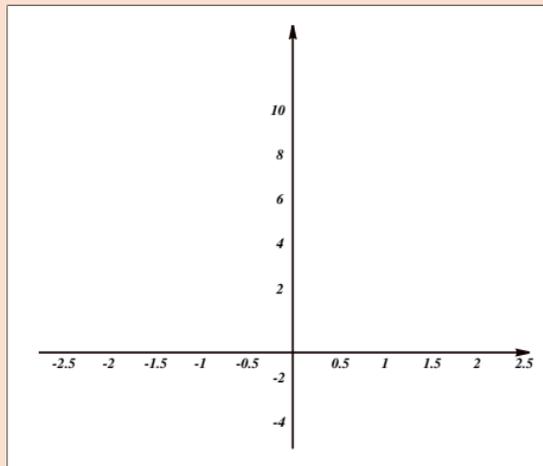
MaTeX

GRÁFICAS



**Ejemplo 5.2.**  $f(x) = y = x^4 - 4x^2$

**Puntos de corte**



MaT<sub>E</sub>X

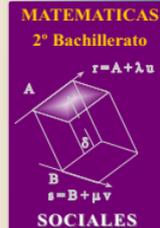
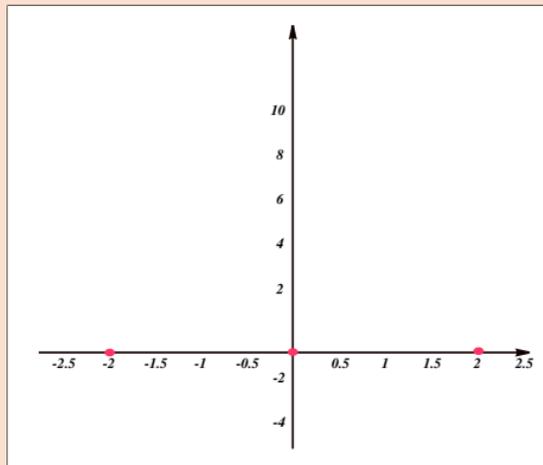
GRÁFICAS



**Ejemplo 5.2.**  $f(x) = y = x^4 - 4x^2$

**Puntos de corte**

$$y = 0 = x^2(x^2 - 4) \implies x = -2; 0; 2$$



MaT<sub>E</sub>X

GRÁFICAS



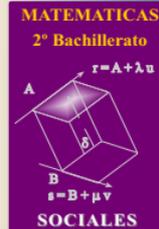
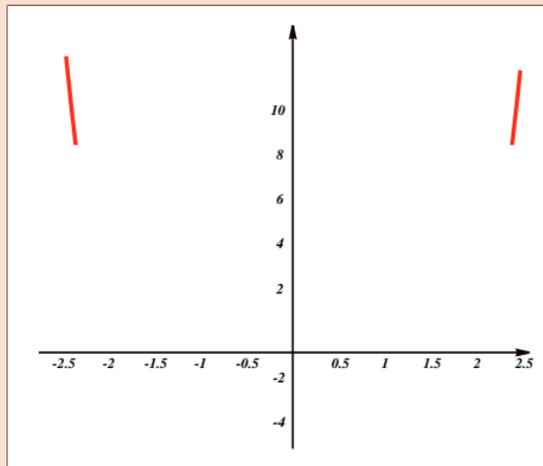
**Ejemplo 5.2.**  $f(x) = y = x^4 - 4x^2$

**Puntos de corte**

$$y = 0 = x^2(x^2 - 4) \implies x = -2; 0; 2$$

**Ramas del infinito**

$$f(-\infty) = \infty \quad f(\infty) = \infty$$



MaTEX

GRÁFICAS



**Ejemplo 5.2.**  $f(x) = y = x^4 - 4x^2$

**Puntos de corte**

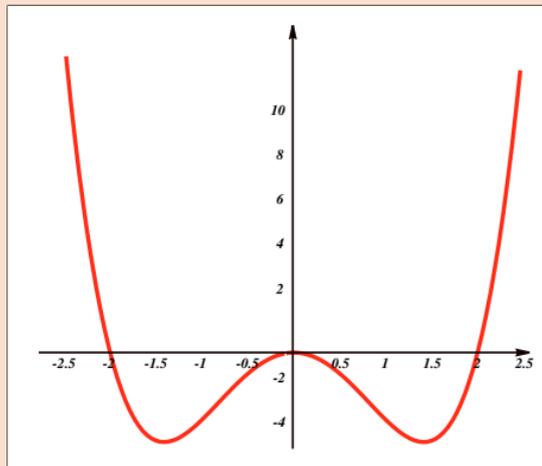
$$y = 0 = x^2(x^2 - 4) \implies x = -2; 0; 2$$

**Ramas del infinito**

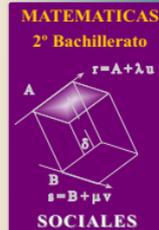
$$f(-\infty) = \infty \quad f(\infty) = \infty$$

**Crecimiento y  
decrecimiento.**

$$f'(x) = 4x^3 - 8x \implies x = 0; \pm\sqrt{2}$$



	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$y'$	-	0	+	0	+
$y$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$
				-4	$\nearrow$



MaTEX

GRÁFICAS



**Ejemplo 5.2.**  $f(x) = y = x^4 - 4x^2$

**Puntos de corte**

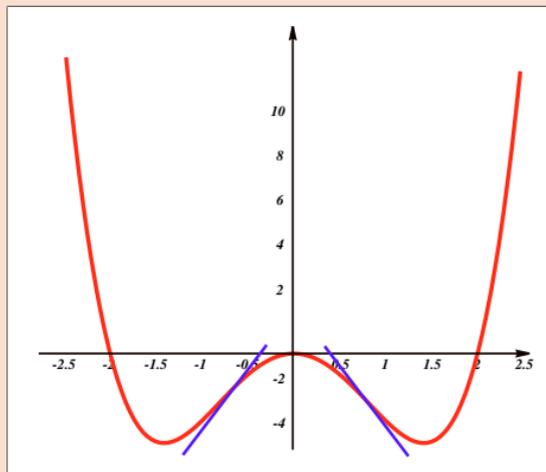
$$y = 0 = x^2(x^2 - 4) \implies x = -2; 0; 2$$

**Ramas del infinito**

$$f(-\infty) = \infty \quad f(\infty) = \infty$$

**Crecimiento y  
decrecimiento.**

$$f'(x) = 4x^3 - 8x \implies x = 0; \pm\sqrt{2}$$

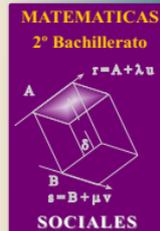


	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$y'$	-	0	+	0	+
$y$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$

**Concavidad.**

$$f''(x) = 12x^2 - 8$$

	$-\infty$	$-\sqrt{2/3}$	$\sqrt{2/3}$	$+\infty$
$y''$	+	0	-	+
$y$	U	-20/9	$\cap$	-20/9



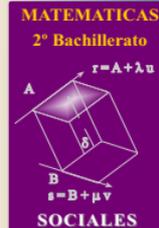
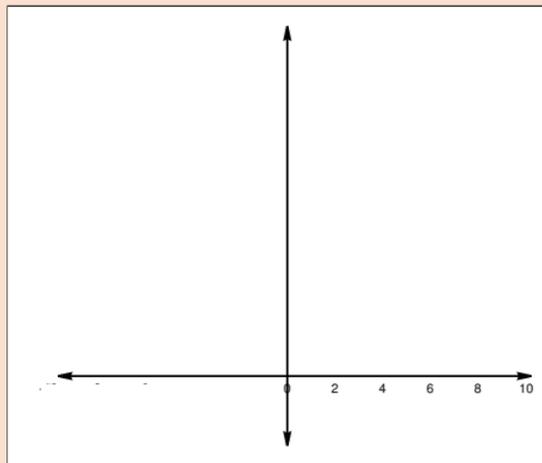
MaTeX

GRÁFICAS



**Ejemplo 5.3.**  $y = \frac{x + 1}{x^2}$

**Puntos de corte**



*MaT<sub>E</sub>X*

GRÁFICAS

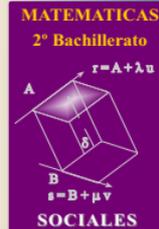
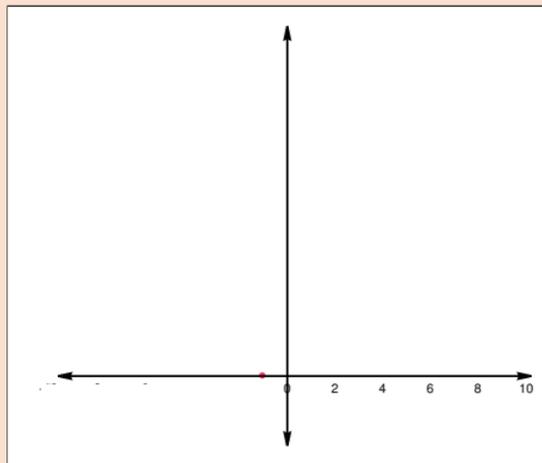


**Ejemplo 5.3.**  $y = \frac{x+1}{x^2}$

**Puntos de corte**

$$y = 0 = \frac{x+1}{x^2} \implies x = -1$$

**Ramas del infinito**



*MaT<sub>E</sub>X*

GRÁFICAS



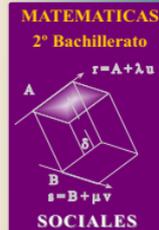
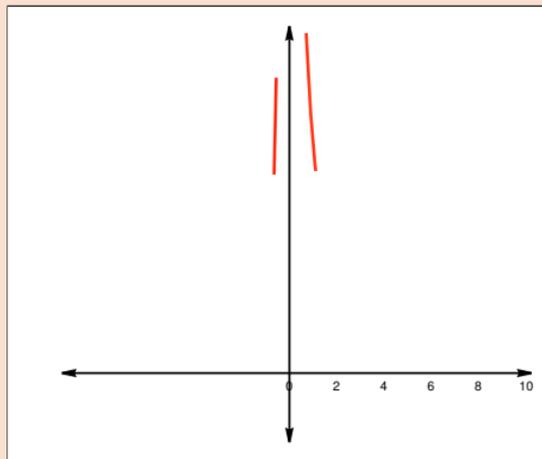
**Ejemplo 5.3.**  $y = \frac{x+1}{x^2}$

**Puntos de corte**

$$y = 0 = \frac{x+1}{x^2} \implies x = -1$$

**Ramas del infinito**

$$f(0^-) = +\infty \quad f(0^+) = +\infty$$



MaT<sub>E</sub>X

GRÁFICAS



**Ejemplo 5.3.**  $y = \frac{x+1}{x^2}$

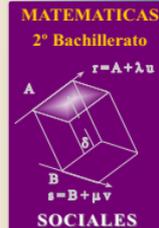
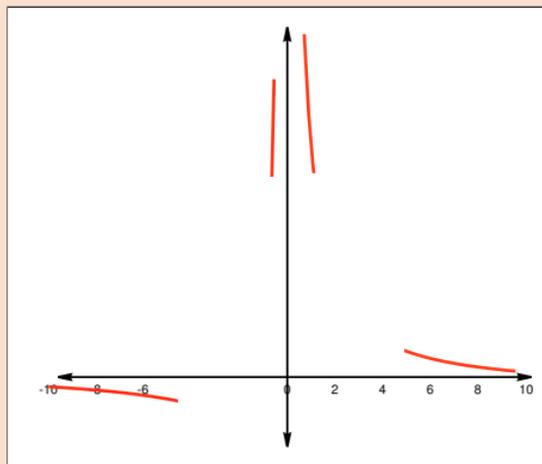
**Puntos de corte**

$$y = 0 = \frac{x+1}{x^2} \implies x = -1$$

**Ramas del infinito**

$$f(0^-) = +\infty \quad f(0^+) = +\infty$$

$$f(-\infty) = 0 \quad f(+\infty) = 0$$



MaTEX

GRÁFICAS



**Ejemplo 5.3.**  $y = \frac{x+1}{x^2}$

**Puntos de corte**

$$y = 0 = \frac{x+1}{x^2} \implies x = -1$$

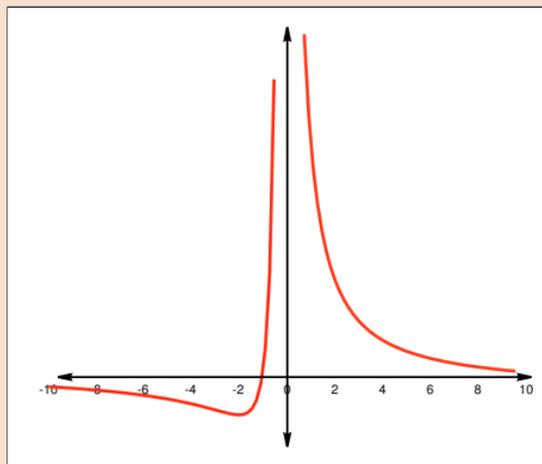
**Ramas del infinito**

$$f(0^-) = +\infty \quad f(0^+) = +\infty$$

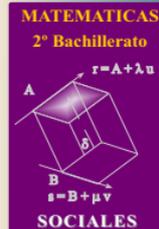
$$f(+\infty) = 0 \quad f(-\infty) = 0$$

**Crecimiento y decrecimiento.**

$$f'(x) = \frac{-(x+2)}{x^3} \implies x = -2$$



	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
$y'$	$-$	$0$	$+$	$-$
$y$	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	$\searrow$



MaTeX

GRÁFICAS



**Ejemplo 5.3.**  $y = \frac{x+1}{x^2}$

**Puntos de corte**

$$y = 0 = \frac{x+1}{x^2} \implies x = -1$$

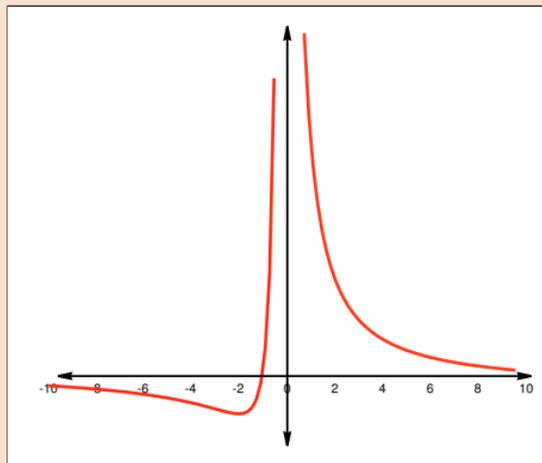
**Ramas del infinito**

$$f(0^-) = +\infty \quad f(0^+) = +\infty$$

$$f(+\infty) = 0 \quad f(-\infty) = 0$$

**Crecimiento y decrecimiento.**

$$f'(x) = \frac{-(x+2)}{x^3} \implies x = -2$$

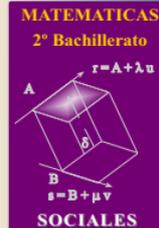


	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
$y'$	$-$	$0$	$+$	$-$
$y$	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	$\searrow$

**Concavidad**

$$f''(x) = \frac{2(x+3)}{x^4} \implies x = -3$$

	$-\infty$	$-3$	$0$	$+\infty$
$y''$	$-$	$0$	$+$	$-$
$y$	$\cap$	$-2/9$	$\cup$	$\cup$



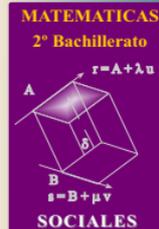
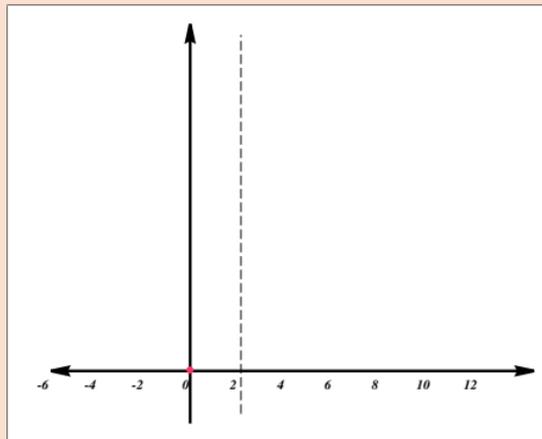
MaTeX

GRÁFICAS



**Ejemplo 5.4.**  $y = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$

**Puntos de corte**



*MaTeX*

GRÁFICAS

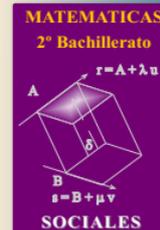
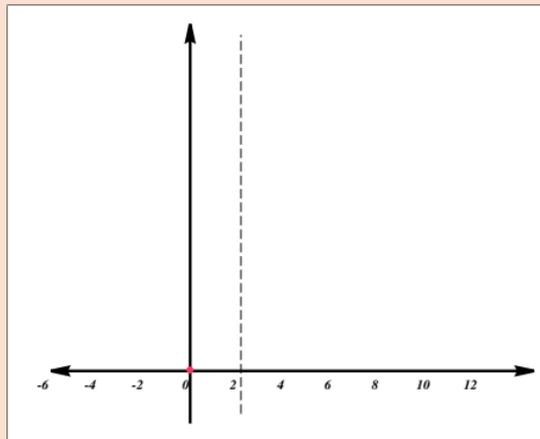


**Ejemplo 5.4.**  $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

**Puntos de corte**

$$f(x) = 0 = \frac{x^3}{(x-2)^2} \implies x = 0$$

**Ramas del infinito:**



*MaTEX*

GRÁFICAS



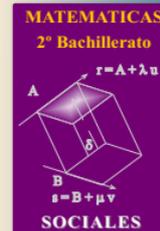
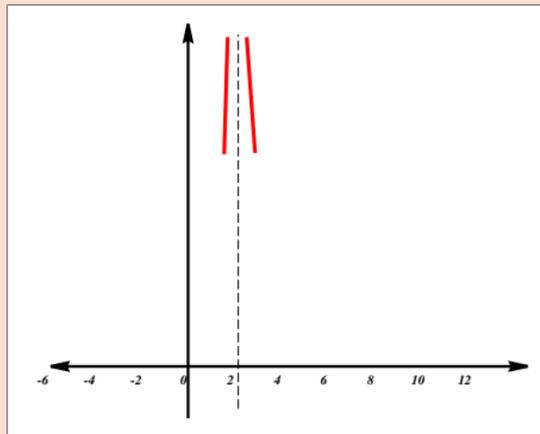
**Ejemplo 5.4.**  $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

**Puntos de corte**

$$f(x) = 0 = \frac{x^3}{(x-2)^2} \implies x = 0$$

**Ramas del infinito:**

$$f(2^-) = +\infty \quad f(2^+) = +\infty$$



*MaTeX*

GRÁFICAS



**Ejemplo 5.4.**  $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

**Puntos de corte**

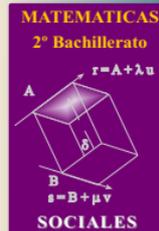
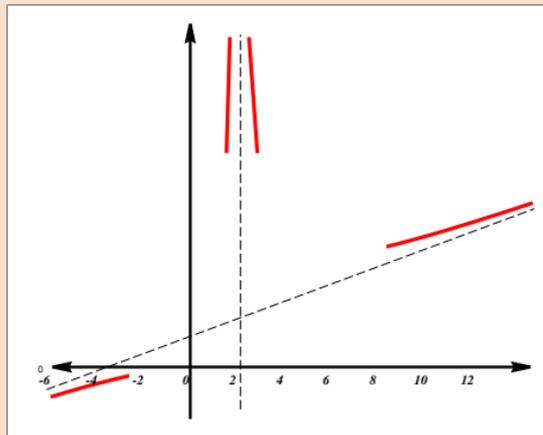
$$f(x) = 0 = \frac{x^3}{(x-2)^2} \implies x = 0$$

**Ramas del infinito:**

$$f(2^-) = +\infty \quad f(2^+) = +\infty$$

A. Oblicua

$$\frac{x^3}{(x-2)^2} = \boxed{x+4} + \frac{12x-16}{(x-2)^2}$$



MaTEX

GRÁFICAS



**Ejemplo 5.4.**  $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

**Puntos de corte**

$$f(x) = 0 = \frac{x^3}{(x-2)^2} \implies x = 0$$

**Ramas del infinito:**

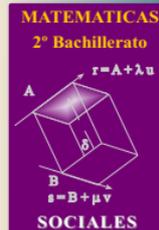
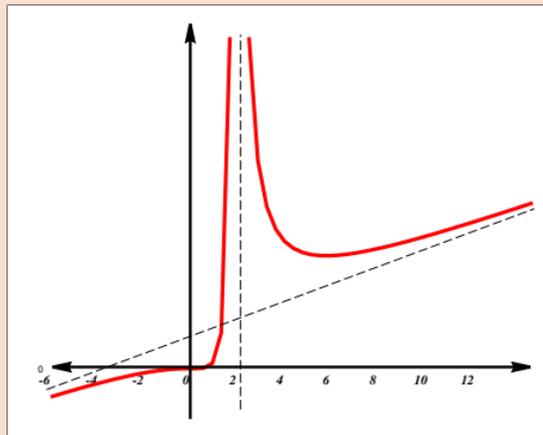
$$f(2^-) = +\infty \quad f(2^+) = +\infty$$

A. Oblicua

$$\frac{x^3}{(x-2)^2} = \boxed{x+4} + \frac{12x-16}{(x-2)^2}$$

**Crecimiento**

$$f'(x) = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3} \implies x = 0; 6$$



MaTEX

GRÁFICAS

	$-\infty$	0	2	6	$+\infty$			
$y'$		+	0	+	$\neq$	-	0	+
$y$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\neq$	$\searrow$	13,5	$\nearrow$



**Ejemplo 5.4.**  $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

**Puntos de corte**

$$f(x) = 0 = \frac{x^3}{(x-2)^2} \implies x = 0$$

**Ramas del infinito:**

$$f(2^-) = +\infty \quad f(2^+) = +\infty$$

A. Oblicua

$$\frac{x^3}{(x-2)^2} = \boxed{x+4} + \frac{12x-16}{(x-2)^2}$$

**Crecimiento**

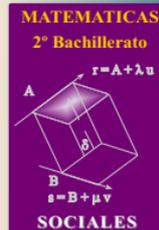
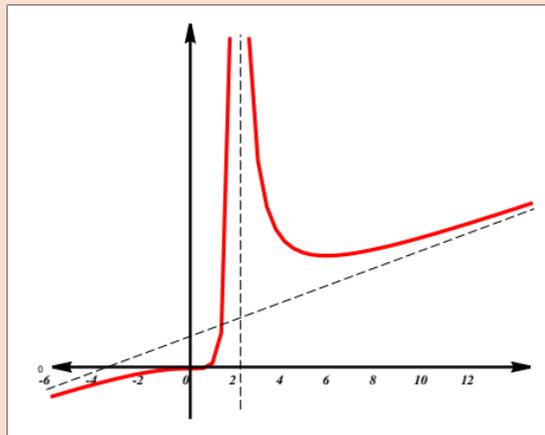
$$f'(x) = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3} \implies x = 0; 6$$

	$-\infty$	0	2	6	$+\infty$			
$y'$		+	0	+	$\neq$	-	0	+
$y$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\neq$	$\searrow$	13,5	$\nearrow$

**Concavidad**

$$f''(x) = \frac{24x}{(x-2)^4} \implies x = 0$$

	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$y''$		-	0	+	$\neq$	+
$y$		$\cap$	0	$\cup$	$\neq$	$\cup$



MaTeX

GRÁFICAS



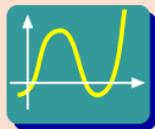
**Ejercicio 11.** Representar la función:  $y = x^3 - 3x^2 + 3$

**Ejercicio 12.** Representar la función:  $y = 3x^4 + 4x^3$

**Ejercicio 13.** Representar la función:  $y = \sqrt{x}$

**Ejercicio 14.** Representar la función:  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

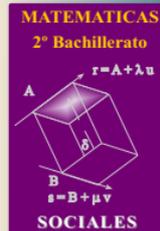
**Ejercicio 15.** Representar la función:  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$



◀ Pulsa y elige el botón **Dibujar  $y = f(x)$**  y realiza la siguiente práctica. Puedes representar las funciones de los ejercicios anteriores.

### Práctica 5.1.

- Introduce en  $f(x)$  la expresión  $x^3 - 3x^2 + 3$ , y pulsa en *Nueva Función*.
- Introduce en  $f(x)$  la expresión  $3x^4 + 4x^3$ , y pulsa en *Nueva Función*.
- Introduce en  $f(x)$  la expresión  $\text{sqrt}(x)$ , y pulsa en *Nueva Función*.
- Introduce en  $f(x)$  la expresión  $1/(x^2 + 1)$ , y pulsa en *Nueva Función*.
- Introduce en  $f(x)$  la expresión  $1/(x^2 - 1)$ , y pulsa en *Nueva Función*.



MaTEX

GRÁFICAS



## Soluciones a los Ejercicios

### Ejercicio 1.

$$a) f(x) = \frac{2}{3x} \implies D_f = \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$b) g(x) = \frac{2}{x^2 - 1} \implies D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}.$$

$$c) h(x) = \frac{x}{1+x} \implies D_h = \mathbb{R} - \{-1\}.$$



# MaTEX

Ejercicio 1

# GRÁFICAS

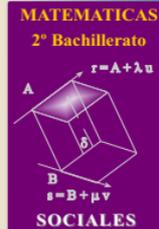


**Ejercicio 2.**

$$a) f(x) = \frac{3x}{5} \implies D_f = R.$$

$$b) g(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \implies D_g = R - \{2; 3\}.$$

$$c) h(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x} \implies D_h = R - \{0; 3\}.$$

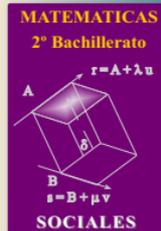


# MaTEX

Ejercicio 2

# GRÁFICAS

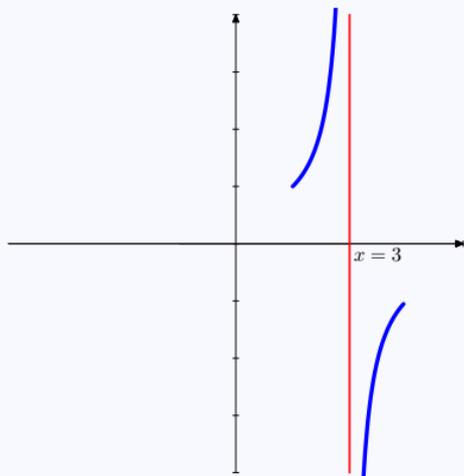


**Ejercicio 3.**

$$f(x) = \frac{2+x}{3-x} \text{ en } x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2+x}{3-x} = -\infty$$

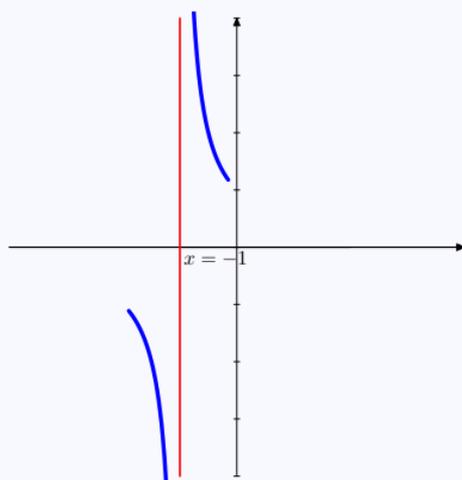
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2+x}{3-x} = +\infty$$



$$g(x) = \frac{x^2}{x+1} \text{ en } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$$



Ejercicio 3

MaTEX

GRÁFICAS





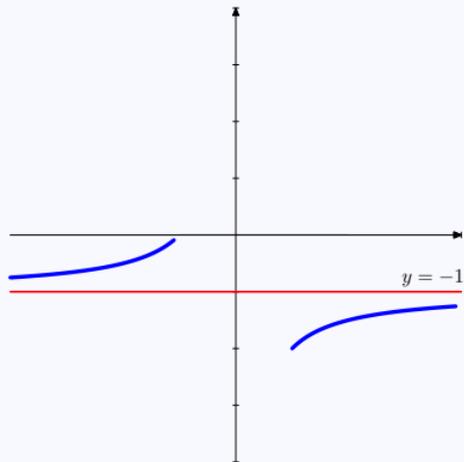
### Ejercicio 4.

$$f(x) = \frac{2+x}{3-x} \text{ tiene } y = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x}{3-x} = -1$$

$$\text{Si } x = 10 \implies \frac{2+10}{3-10} < -1$$

$$\text{Si } x = -10 \implies \frac{2-10}{3+10} > -1$$

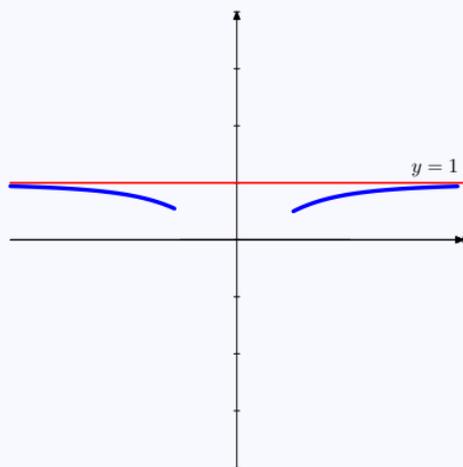


$$g(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \text{ tiene } y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

$$\text{Si } x = 10 \implies \frac{100}{100+1} < 1$$

$$\text{Si } x = -10 \implies \frac{100}{100+1} < 1$$

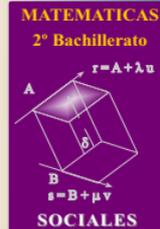


Ejercicio 4

MaTeX

GRÁFICAS





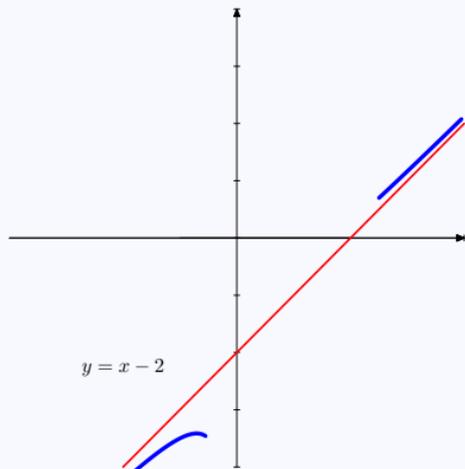
## Ejercicio 5.

$$f(x) = \frac{2 + x^2}{2 + x}$$

Oblicua  $y_o = x - 2$

$$f(10) = 8,5 > y_o(10) = 8$$

$$f(-10) = -12,75 < y_o(-10) = -12$$

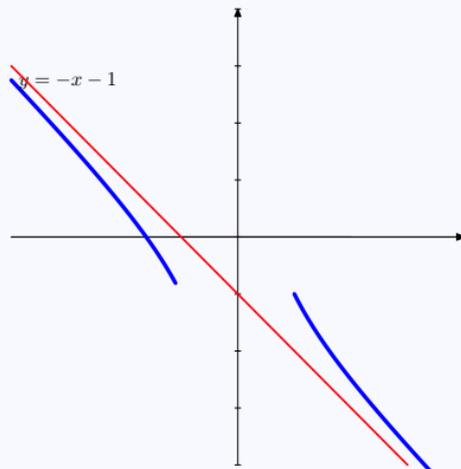


$$g(x) = \frac{x^2 - 2}{1 - x}$$

Oblicua  $y_o = -x - 1$

$$h(10) = -10,8 > y_o(10) = -11$$

$$h(-10) = 8,9 < y_o(-10) = 9$$



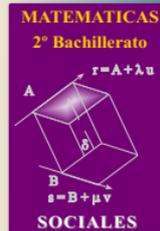
Ejercicio 5

MaTEX

GRÁFICAS



## Ejercicio 6.



MaTEX

GRÁFICAS



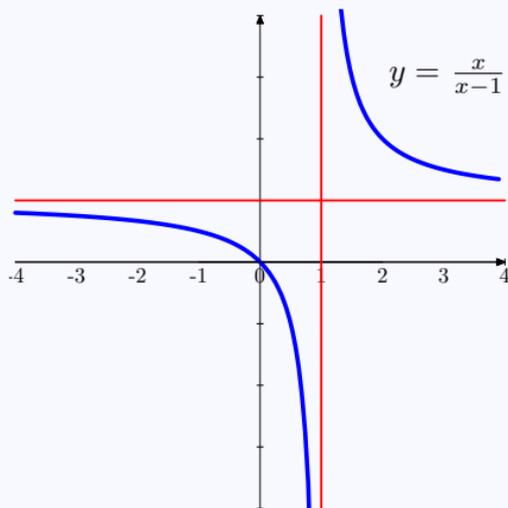
Ramas del Infinito de  $\frac{x}{x-1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$



La función presenta:

- una asíntota vertical en  $x = 1$
- una asíntota horizontal  $y = 1$

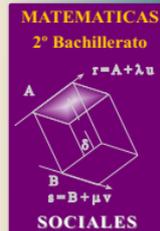
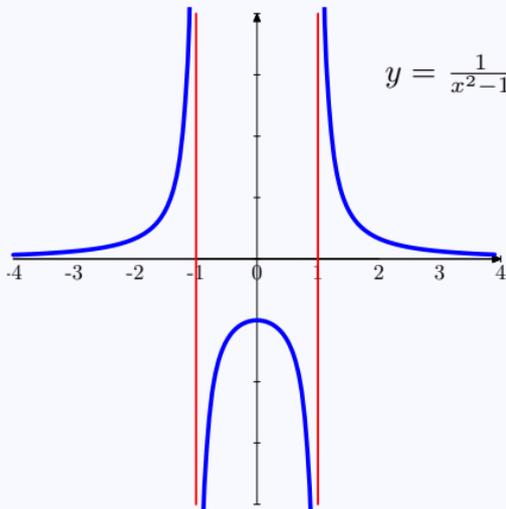
Ejercicio 6

## Ejercicio 7.

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$		
$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$	$+\infty$	
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$	$-\infty$	
$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$	$-\infty$	
$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$	$+\infty$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$0$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	$0$	

La función presenta:

- dos asíntotas verticales en  $x = \pm 1$
- una asíntota horizontal  $y = 0$



MaTEX

GRÁFICAS

Ejercicio 7



## Ejercicio 8.

- Horizontal no tiene
- Vertical  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x} = -\infty$$

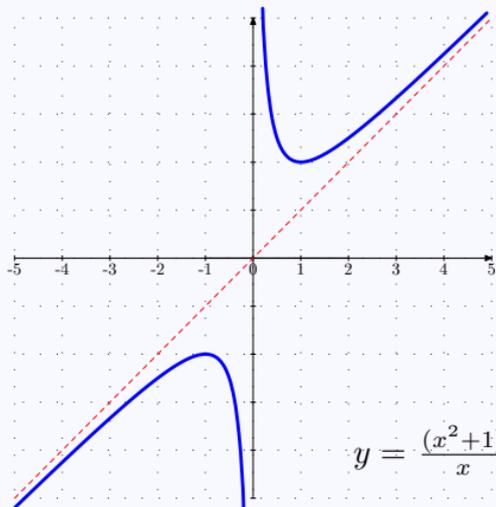
- Oblicua  $y_0 = x$ , pues

$$\frac{x^2 + 1}{x} = \boxed{x} + \frac{1}{x}$$

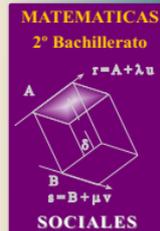
Posición:

$$f(10) = 10,1 > y_0(10) = 10$$

$$f(-10) = -10,1 < y_0(-10) = -10$$



Ejercicio 8

MaTEX

GRÁFICAS



## Ejercicio 9.

- Horizontal no tiene
- Vertical  $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = +\infty$$

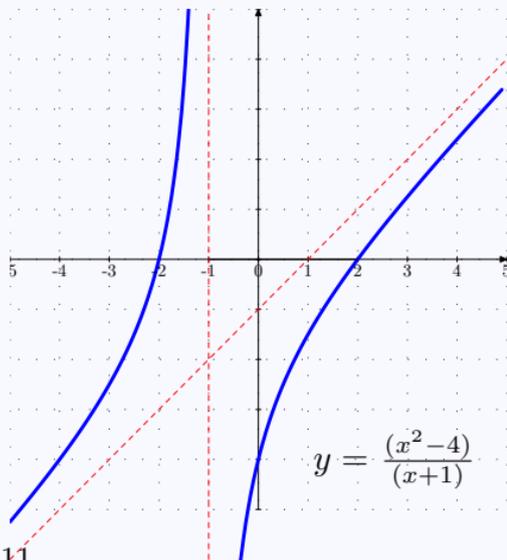
- Oblicua  $y_0 = x - 1$ , pues

$$\frac{x^2 - 4}{x + 1} = \boxed{x - 1} - \frac{3}{x - 1}$$

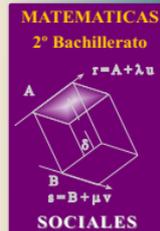
Posición:

$$f(10) = 8,72 < y_0(10) = 9$$

$$f(-10) = -10,66 > y_0(-10) = -11$$



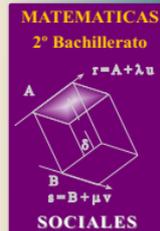
Ejercicio 9



MaTeX

GRÁFICAS





## Ejercicio 10.

- Horizontal no tiene
- Vertical  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = +\infty$$

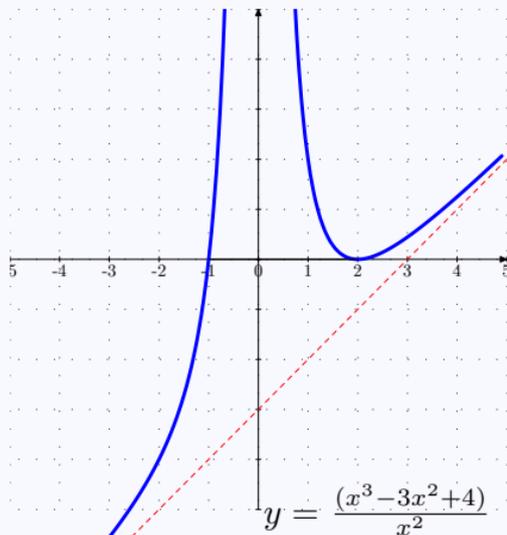
- Oblicua  $y_0 = x - 3$ , pues

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = \boxed{x - 3} + \frac{4}{x^2}$$

Posición:

$$f(10) = 7,04 > y_0(10) = 7$$

$$f(-10) = -12,96 > y_0(-10) = -13$$



Ejercicio 10

MaTeX

GRÁFICAS



**Ejercicio 11.****Ramas del infinito:**

$$f(-\infty) = -\infty \quad f(+\infty) = \infty$$

**Crecimiento y decrecimiento.**

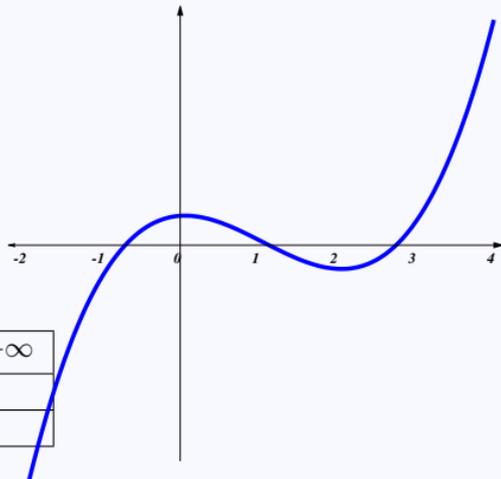
$$f'(x) = 3x(x - 2) \implies x = 0; 2$$

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$y'$	+	0	-	0	+	
$y$		↗	3	↘	-1	↗

**Concavidad**

$$f''(x) = 6x - 6 \implies x = 1$$

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$	
$y''$	-	0	+	
$y$		⌒	1	⌒



$$m(2, -1)$$

$$M(0, 3)$$

$$I(1, 1)$$

MaTEX

GRÁFICAS

Ejercicio 11



**Ejercicio 12.****Puntos de corte**

$$y = 0 = 3x^4 + 4x^3 \implies x = 0; -4/3$$

**Ramas del infinito:**

$$f(-\infty) = \infty \quad f(+\infty) = \infty$$

**Crecimiento y decrecimiento.**

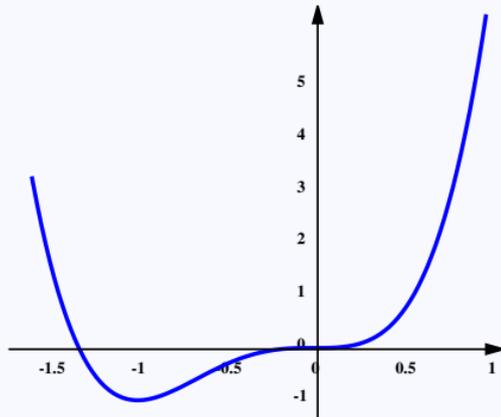
$$f'(x) = 12x^2(x+1) \implies x = 0; -1$$

$x$	$-\infty$	0	-1	$+\infty$		
$y'$		-	0	-	0	+
$y$		$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

**Concavidad**

$$f''(x) = 36x^2 + 24x \implies x = 0; -2/3$$

$x$	$-\infty$	$-2/3$	0	$+\infty$		
$y'$		+	0	-	0	+
$y$		$\smile$	$-\frac{16}{27}$	$\smile$	0	$\smile$



MaTeX

GRÁFICAS

$$m(-1, -1)$$

$$I_1(0, 0)$$

$$I_2\left(-\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$$

Ejercicio 12



**Ejercicio 13.****Puntos de corte**

$$y = 0 = \sqrt{x} \implies x = 0$$

**Ramas del infinito:**

$$f(+\infty) = \infty$$

**Crecimiento y decrecimiento.**

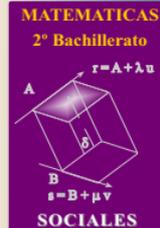
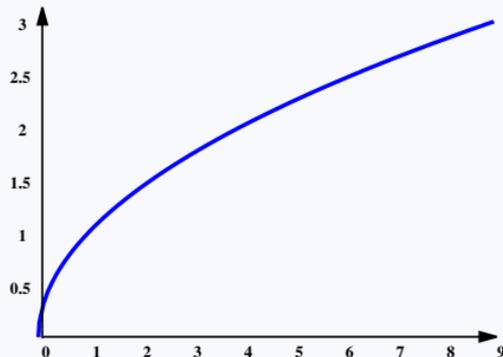
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \implies f' > 0$$

$x$	0	$+\infty$
$y'$	$\infty$	+
$y$	0	$\nearrow$

**Concavidad**

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \implies f'' < 0$$

$x$	0	$+\infty$
$y''$	$\infty$	-
$y$	0	$\frown$



MaTeX

GRÁFICAS

función creciente  
función convexa

Ejercicio 13



**Ejercicio 14.**

$$y = 0 = \frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow y \neq 0$$

**Ramas del infinito**

$$f(1^-) = -\infty \quad f(1^+) = +\infty$$

$$f(-1^-) = +\infty \quad f(-1^+) = -\infty$$

$$f(-\infty) = 0 \quad f(\infty) = 0$$

**Crecimiento y decrecimiento.**

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow x = 0$$

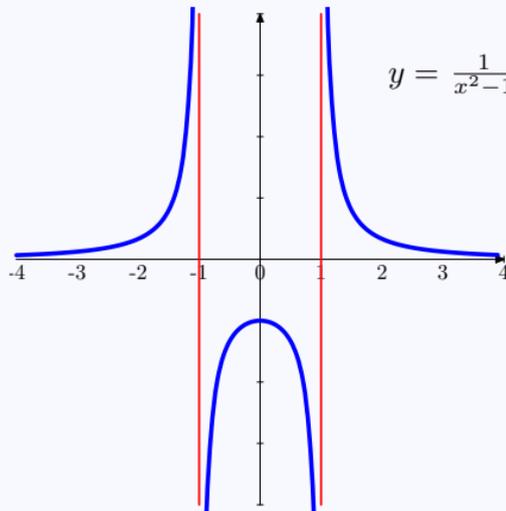
	$-\infty$	0	$+\infty$
$y'$	+	0	-
$y$	$\nearrow$	0	$\searrow$

**Concavidad**

$$f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3} \Rightarrow f'' \neq 0$$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$y''$	+	$\neq$	-	$\neq$	+
$y$	U	$\neq$	$\cap$	$\neq$	U

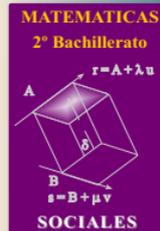
Ejercicio 14



MaTeX

GRÁFICAS



**Ejercicio 15.**

$$y = 0 = \frac{x}{x^2 - 1} \implies x = 0$$

**Ramas del infinito**

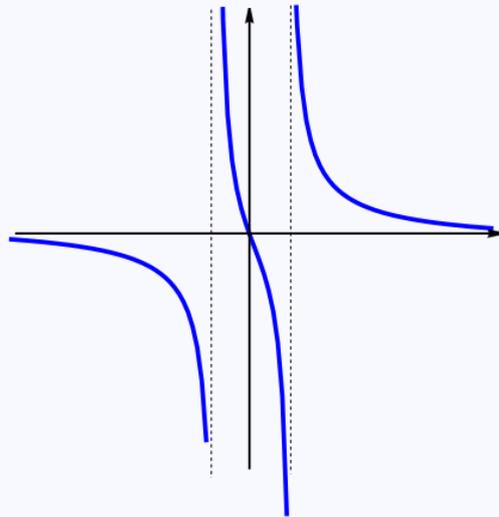
$$f(1^-) = -\infty \quad f(1^+) = +\infty$$

$$f(-1^-) = -\infty \quad f(-1^+) = +\infty$$

$$f(-\infty) = 0 \quad f(\infty) = 0$$

**Crecimiento y decrecimiento.**

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \implies f' < 0$$



$$\text{Concavidad } f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \implies x = 0$$

	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$		
$y''$	$-$	$\nexists$	$+$	$0$	$-$	$\nexists$	$+$
$y$	$\cap$	$\nexists$	$\cup$	$\nexists$	$\cap$	$\nexists$	$\cup$

Asintotas Verticales

$$x = -1, x = 1$$

Asintota Horizontal

$$y = 0$$

$$I(0,0)$$

Ejercicio 15

MaTeX

GRÁFICAS

