

Proyecto MaTeX

Programación Lineal

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)

© 2004 javier.gonzalez@unican.es
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL

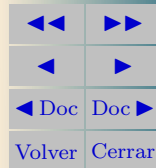


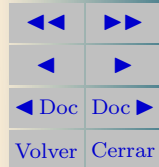
Tabla de Contenido

1. Introducción
 2. Inecuaciones en el plano
 - 2.1. Sistemas de inecuaciones
 3. Dirección de una recta
 - Dirección perpendicular de una recta
 4. Optimizar una función lineal
 - 4.1. Método gráfico
 5. Formulación general del problema
 - 5.1. Teorema de la programación lineal
 - 5.2. Ejemplos
 6. Ejercicios
- Soluciones a los Ejercicios
- Soluciones a los Tests



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



1. Introducción

La programación lineal surgió específicamente para dar respuesta a problemas de carácter logístico y militar y posteriormente se extendió a amplitud de problemas en el campo de la industria y la economía.

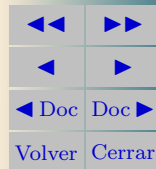
Así por ejemplo, permite resolver problemas de nutrición, distribuciones de factorías, distribuciones de personal en puestos de trabajo, almacenaje, planes de producción, etc.

Para situarnos tomemos un ejemplo.



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Imaginemos que las necesidades semanales mínimas de una persona son de 8 unidades de proteínas, 12 unidades de hidratos de carbono y 9 unidades de grasa. Supongamos que debemos obtener un preparado con esa composición mínima mezclando dos productos A y B, cuyos contenidos por kg son los de la siguiente tabla:

	Proteínas	Hidratos	Grasas	Coste/kg
A	2	6	1	600
B	1	1	3	400

¿Cuántos kg de cada producto deberán comprarse semanalmente para que el costo de preparar la dieta sea mínimo?

Sean x los kg de A e y los kg de B , entonces hay que **minimizar** el coste z

$$z = 600x + 400y$$

Teniendo en cuenta restricciones impuestas en proteínas, hidratos de carbono y grasas, que son:

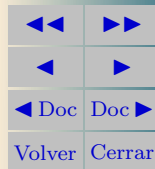
$$\begin{aligned} r_1 &\equiv 2x + y &\geq 8 \\ r_2 &\equiv 6x + y &\geq 12 \\ r_3 &\equiv x + 3y &\geq 9 \\ r_4 &\equiv x &\geq 0 \\ r_i &\equiv y &\geq 0 \end{aligned}$$

De este tipo son los problemas que trata la programación lineal.



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





2. Inecuaciones en el plano

Definición 1 Una inecuación en el plano viene dada por una desigualdad del tipo

$$ax + by \leq c \quad \text{ó} \quad ax + by \geq c$$

y la solución corresponde a un semiplano.

Ejemplo 2.1. Representar la soluciones de la inecuación $x + y \geq 0$

Solución:

- Se representa la recta

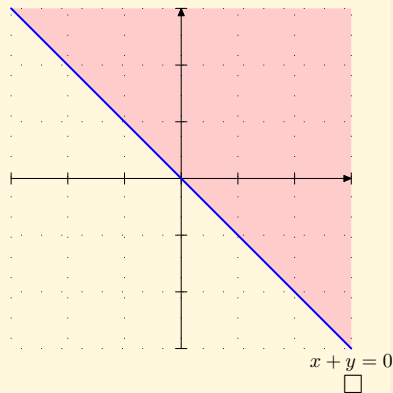
$$x + y = 0 \implies y = -x$$

$$\begin{cases} x = -3 & y = 3 & A(-3, 3) \\ x = 3 & y = -3 & B(3, -3) \end{cases}$$

- Se despeja y

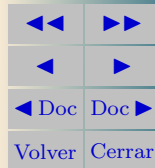
$$x + y \geq 0 \implies y \geq -x$$

- Al quedar y de la forma $y \geq$ marcamos la parte superior.



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Ejemplo 2.2. Representar la soluciones de la inecuación $x - y \leq 0$

Solución:

- Se representa la recta

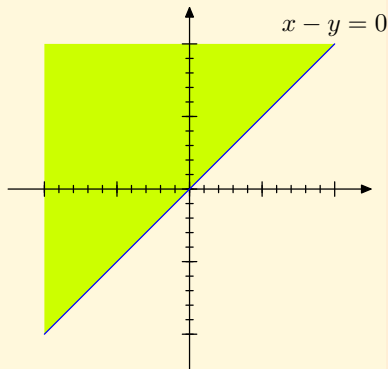
$$x - y = 0 \implies y = x$$

$$\begin{cases} x = -3 & y = -3 & A(-3, -3) \\ x = 3 & y = 3 & B(3, 3) \end{cases}$$

- Se despeja y

$$x - y \leq 0 \implies y \geq x$$

- Al quedar y de la forma $y \geq$ marcamos la parte superior.



□

Test.

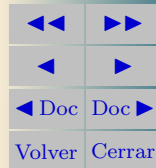
1. ¿Qué punto pertenece a la región sombreada de arriba?

- (a) $(1, 0)$ (b) $(2, 0)$ (c) $(1, -1)$ (d) $(-1, 2)$



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





Ejemplo 2.3. Representar la soluciones de la inecuación $x - y \geq 1$

Solución:

- Se representa la recta

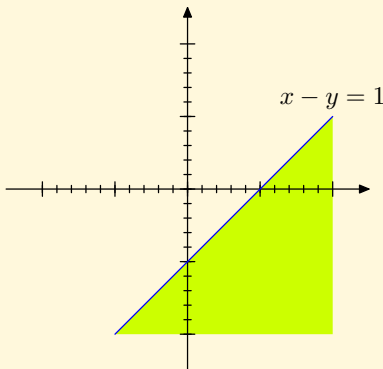
$$x - y = 1 \implies y = x - 1$$

$$\begin{cases} x = -1 & y = -2 & A(-1, -2) \\ x = 2 & y = 1 & B(2, 1) \end{cases}$$

- Se despeja y

$$x - y \geq 1 \implies y \leq x - 1$$

- Al quedar y de la forma $y \leq$ marcamos la parte inferior.



□

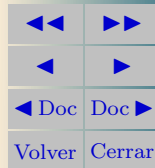
Test.

1. ¿Qué punto pertenece a la región sombreada de arriba?

- (a) (0, 0) (b) (0, 8) (c) (-1, -1) (d) (1, -2)

MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Ejemplo 2.4. Representar la soluciones de la inecuación $x + 2y \leq 2$

Solución:

- Se representa la recta

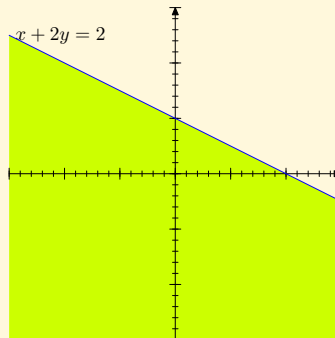
$$x + 2y = 2 \implies y = \frac{2 - x}{2}$$

$$\begin{cases} x = -2 & y = 2 & A(-2, 2) \\ x = 2 & y = 0 & B(2, 0) \end{cases}$$

- Se despeja y

$$x + 2y \leq 2 \implies y \leq \frac{2 - x}{2}$$

- Al quedar y de la forma $\boxed{y \leq}$ marcamos la parte inferior.



□

Test.

1. ¿Qué punto pertenece a la región sombreada de arriba?

(a) (0, 2)

(b) (-1, 0)

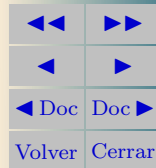
(c) (-1, 2)

(d) (2, 1)



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



2.1. Sistemas de inecuaciones

Definición 2 *Un sistema de inecuaciones lineales en el plano viene dado por varias desigualdades del tipo*

$$\left. \begin{array}{l} r_1 \equiv a_1x + b_1y \leq c_1 \\ r_2 \equiv a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \dots \quad \dots\dots\dots \\ r_n \equiv a_nx + b_ny \leq c_n \end{array} \right\} \quad (1)$$

*y la solución, si existe, corresponde a una región convexa del plano, que llamamos **región factible**.*

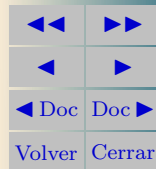
Para su solución gráfica, se representa cada recta y se marca el semiplano que determina. La parte que tienen en común todos los semiplanos proporciona la región factible.

Veamos unos ejemplos detenidamente. A continuación el alumno realizara algunos ejercicios.



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL

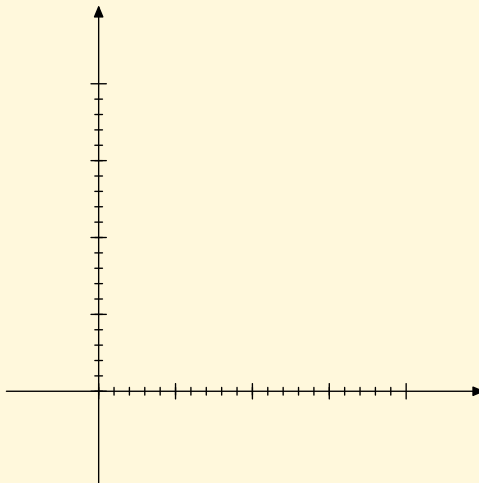


Ejemplo 2.5. Representar la solución del sistema de inecuaciones

$$r_1 : 3x + 4y \leq 12 \quad r_2 : 2x + y \geq 2 \quad r_3 : x \geq 0 \quad r_4 : y \geq 0$$

Solución:

Representamos

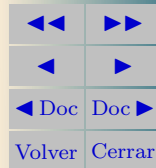


□



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



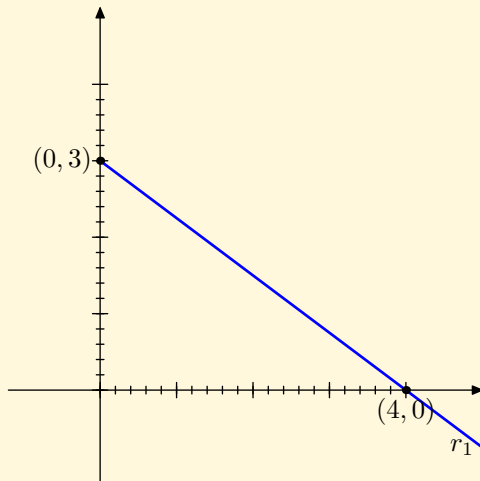
Ejemplo 2.4. Representar la solución del sistema de inecuaciones

$$r_1 : 3x + 4y \leq 12 \quad r_2 : 2x + y \geq 2 \quad r_3 : x \geq 0 \quad r_4 : y \geq 0$$

Solución:

Representamos

$$r_1 \equiv 3x + 4y \leq 12$$

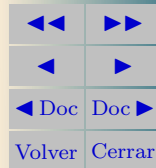


□



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





Ejemplo 2.4. Representar la solución del sistema de inecuaciones

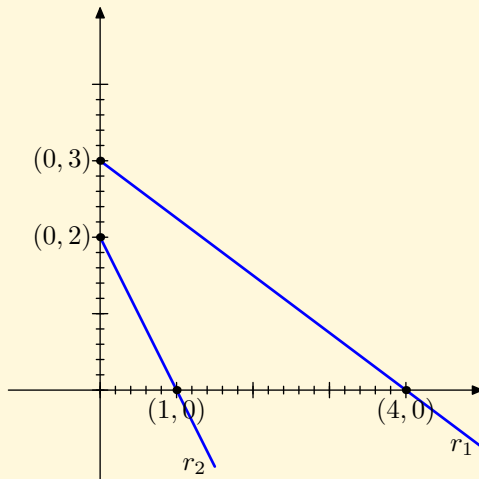
$$r_1 : 3x + 4y \leq 12 \quad r_2 : 2x + y \geq 2 \quad r_3 : x \geq 0 \quad r_4 : y \geq 0$$

Solución:

Representamos

$$r_1 \equiv 3x + 4y \leq 12$$

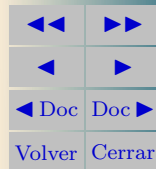
$$r_2 \equiv 2x + y \geq 2$$



□

MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





Ejemplo 2.4. Representar la solución del sistema de inecuaciones

$$r_1 : 3x + 4y \leq 12 \quad r_2 : 2x + y \geq 2 \quad r_3 : x \geq 0 \quad r_4 : y \geq 0$$

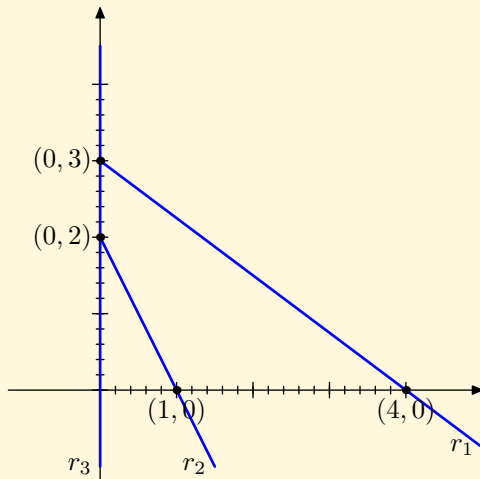
Solución:

Representamos

$$r_1 \equiv 3x + 4y \leq 12$$

$$r_2 \equiv 2x + y \geq 2$$

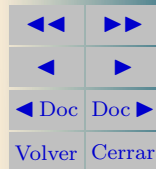
$$r_3 \equiv x \geq 0$$



□

MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





Ejemplo 2.4. Representar la solución del sistema de inecuaciones

$$r_1 : 3x + 4y \leq 12 \quad r_2 : 2x + y \geq 2 \quad r_3 : x \geq 0 \quad r_4 : y \geq 0$$

Solución:

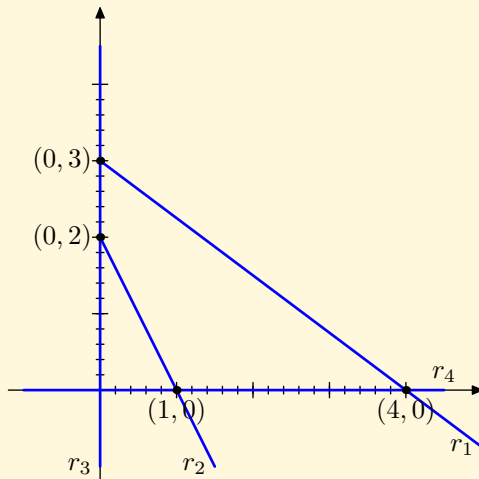
Representamos

$$r_1 \equiv 3x + 4y \leq 12$$

$$r_2 \equiv 2x + y \geq 2$$

$$r_3 \equiv x \geq 0$$

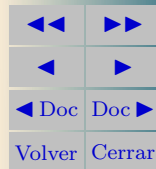
$$r_4 \equiv y \geq 0$$



□

MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





Ejemplo 2.4. Representar la solución del sistema de inecuaciones

$$r_1 : 3x + 4y \leq 12 \quad r_2 : 2x + y \geq 2 \quad r_3 : x \geq 0 \quad r_4 : y \geq 0$$

Solución:

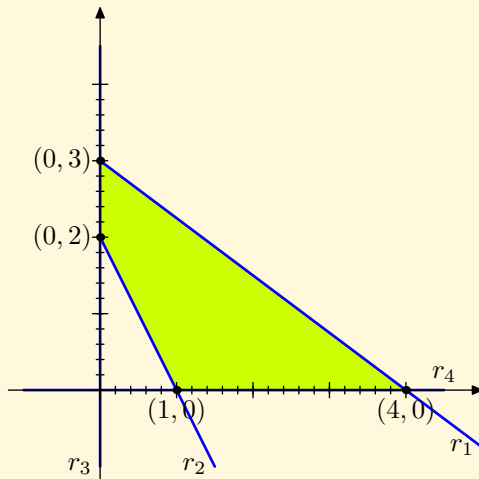
Representamos

$$r_1 \equiv 3x + 4y \leq 12$$

$$r_2 \equiv 2x + y \geq 2$$

$$r_3 \equiv x \geq 0$$

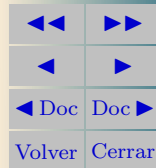
$$r_4 \equiv y \geq 0$$



Y sombreamos la región que tienen en común, que se denomina **región factible**. □

MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





Ejemplo 2.5. Hallar la región factible de:

$$r_1 : x - 3y \geq -6 \quad r_2 : x + 2y \geq 4 \quad r_3 : 3x + y \leq 12$$

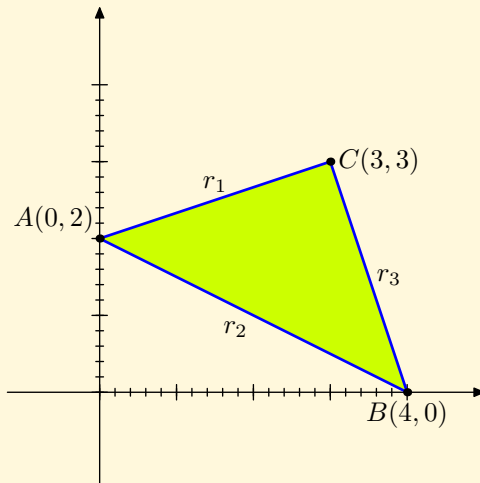
Solución:

Representamos cada recta

$$r_1 \equiv x - 3y = -6$$

$$r_2 \equiv x + 2y = 4$$

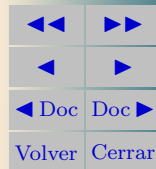
$$r_3 \equiv 3x + y = 12$$



La **región factible** corresponde al triángulo del dibujo y como está limitada se dice **acotada**. □

MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





Ejemplo 2.6. Hallar la región factible de:

$$r_1 : x + 3y \geq 3 \quad r_2 : -x + y \leq 1$$

Solución:

- Representamos la recta

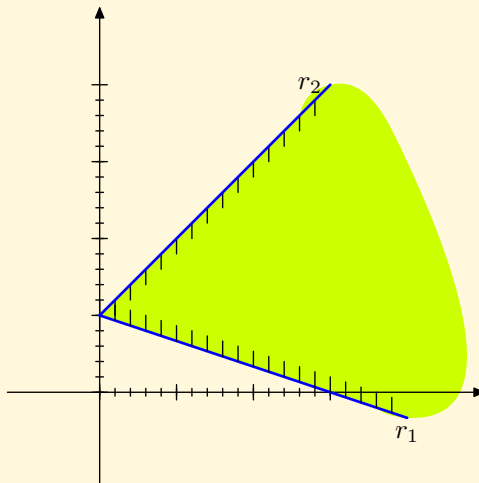
$$x + 3y = 3$$

tomando el semiplano $y \geq$

- Representamos la recta

$$-x + y = 1$$

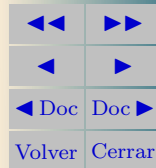
tomando el semiplano $y \leq$



La **región factible** corresponde a la zona coloreada del dibujo y como no está limitada se dice **no acotada**. \square

MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



EJERCICIO 1. Hallar la región factible de los sistemas de inecuaciones siguientes:

(a)

$$r_1 \equiv x + y \leq 5$$

$$r_2 \equiv x + y \geq 2$$

(b)

$$r_1 \equiv 4x - 3y \geq -3$$

$$r_2 \equiv x + 4y \geq 5$$

(c)

$$r_1 \equiv x \leq 2y$$

$$r_2 \equiv y - x \leq 2$$

$$r_3 \equiv x + y \leq 5$$

$$r_4 \equiv x \geq 0$$

(d)

$$r_1 \equiv 2x + 4y \geq 4$$

$$r_2 \equiv 6x + 3y \geq 6$$

$$r_3 \equiv x \geq 0$$

$$r_4 \equiv y \geq 0$$

(e)

$$r_1 \equiv x \geq y$$

$$r_2 \equiv x \leq 2y$$

$$r_3 \equiv x \leq 20$$

(f)

$$r_1 \equiv 3x + 2y \leq 24$$

$$r_2 \equiv y \leq x$$

$$r_3 \equiv y \leq 1$$



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





3. Dirección de una recta

Representamos la recta $2x - y = 3$ en el plano hallando tres puntos

Despejamos $y = 2x - 3$, y damos valores a x

$$x = 1 \rightarrow y = -1 \quad A(1, -1)$$

$$x = 2 \rightarrow y = 1 \quad B(2, 1)$$

$$x = 3 \rightarrow y = 3 \quad C(3, 3)$$

La **dirección** de la recta se obtiene restando dos puntos cualesquiera. Así

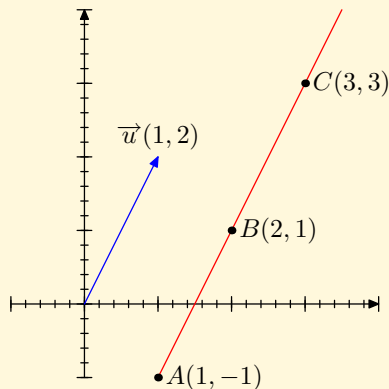
$$\vec{u}_1 = B(2, 1) - A(1, -1) \quad \vec{u}_1(1, 2)$$

$$\vec{u}_2 = C(3, 3) - A(1, -1) \quad \vec{u}_2(2, 4)$$

El vector $\vec{u}(1, 2)$ o cualquiera de sus múltiplos es la **dirección** de la recta

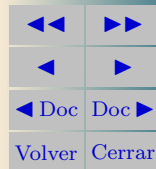
Se puede obtener la dirección de $2x - y = 3$ directamente tomando *el coeficiente de y con signo contrario, y el coeficiente de x .*

Es decir la dirección es el vector es $\vec{u}(1, 2)$.



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





Ejemplo 3.1. Hallar la dirección de las rectas

$$r_1 \equiv x - 2y = 1; \quad r_2 \equiv 2x - 3y = 5; \quad r_3 \equiv x + 3y = 1;$$

Solución:

Como hemos explicado antes no es necesario representarlas, basta tomar *el coeficiente de y con signo contrario, y el coeficiente de x*. Así:

La dirección de $r_1 \equiv x - 2y = 1$ es $\vec{u}(2, 1)$

La dirección de $r_2 \equiv 2x - 3y = 5$ es $\vec{u}(3, 2)$

La dirección de $r_3 \equiv x + 3y = 1$ es $\vec{u}(-3, 1)$ □

Definición 3 Decimos que dos rectas son paralelas cuando tienen la misma dirección.

Ejemplo 3.2. Comprueba que las rectas siguientes son paralelas

$$r_1 \equiv 3x - 2y = 0 \quad r_2 \equiv 3x - 2y = 3 \quad r_3 \equiv 3x - 2y = 5$$

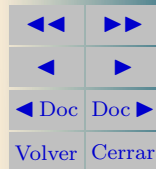
Solución:

En efecto son paralelas pues tienen la misma dirección

La dirección de todas ellas es $\vec{u}(2, 3)$. Tienen la misma dirección pero distinto término independiente, por ello son paralelas. □

MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





Test. Responde a las siguientes cuestiones:

1. ¿La dirección de la recta $5x + 2y + 3 = 0$ es ?

- (a) $\vec{u}(5, 2)$ (b) $\vec{u}(-2, 5)$ (c) $\vec{u}(2, 3)$

2. ¿La dirección de la recta $-3x + y = 6$ es ?

- (a) $\vec{u}(1, -3)$ (b) $\vec{u}(-1, -3)$ (c) $\vec{u}(3, 1)$

3. ¿La dirección de la recta $3x - 5y = 1$ es ?

- (a) $\vec{u}(5, -3)$ (b) $\vec{u}(5, 3)$ (c) $\vec{u}(3, 5)$

4. ¿La dirección de la recta $-2x - 3y = 2$ es ?

- (a) $\vec{u}(2, -3)$ (b) $\vec{u}(3, 2)$ (c) $\vec{u}(3, -2)$

5. ¿La dirección de la recta $x = 6$ es ?

- (a) $\vec{u}(1, 0)$ (b) $\vec{u}(1, 1)$ (c) $\vec{u}(0, -1)$

6. ¿La dirección de la recta $2y = 5$ es ?

- (a) $\vec{u}(2, 5)$ (b) $\vec{u}(0, 2)$ (c) $\vec{u}(-2, 0)$

7. Las rectas $x - 3y = 6$ y $x - 3y = 0$ son paralelas ?

- (a) Si (b) No

8. Las rectas $x - 3y = 6$ y $x + 3y = 0$ son paralelas ?

- (a) Si (b) No

MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





• Dirección perpendicular de una recta

En el gráfico de abajo representamos las rectas

$$r_1 \equiv x + y = 2 \quad r_2 \equiv x - y = 1$$

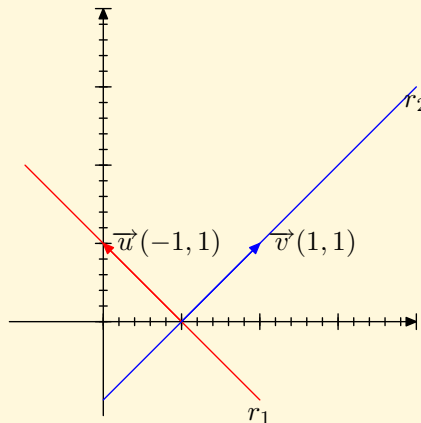
En el gráfico se ven que son perpendiculares

$$\text{dirección de } r_1 \quad \vec{u}(-1, 1)$$

$$\text{dirección de } r_2 \quad \vec{v}(1, 1)$$

Son perpendiculares cuando el producto de sus vectores es cero

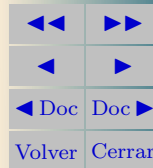
$$\vec{u}(-1, 1) \cdot \vec{v}(1, 1) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$



Definición 4 *Dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus vectores es cero.*

MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





Definición 5 Dada cualquier recta

$$r \equiv ax + by = c$$

se tiene que su dirección es $\vec{u}(-b, a)$ y su **dirección perpendicular** es $\vec{u}(a, b)$, pues se cumple que el producto de los vectores es cero.

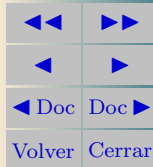
$$\vec{u}(-b, a) \cdot \vec{u}(a, b) = -b \cdot a + a \cdot b = 0$$

Test. Responde a las siguientes cuestiones:

- Las rectas $5x + 2y = 3$ y $2x - 5y = 1$ son perpendiculares ?
 (a) verdadero (b) falso
- Las rectas $3x + 2y = 3$ y $-3x + 2y = 5$ son perpendiculares ?
 (a) verdadero (b) falso
- ¿La dirección perpendicular de la recta $3x + 2y = 3$ es ?
 (a) $\vec{u}(-2, 3)$ (b) $\vec{u}(3, 2)$ (c) $\vec{u}(2, 1)$
- ¿La dirección perpendicular de la recta $2x - y = 1$ es ?
 (a) $\vec{u}(1, 2)$ (b) $\vec{u}(2, -1)$ (c) $\vec{u}(2, 3)$
- ¿La dirección perpendicular de la recta $2x + y = 2$ es ?
 (a) $\vec{u}(-1, 2)$ (b) $\vec{u}(2, -1)$ (c) $\vec{u}(2, 1)$

MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





4. Optimizar una función lineal

Empezaremos con un ejemplo. Consideremos la función lineal en dos variables

$$z = x + y$$

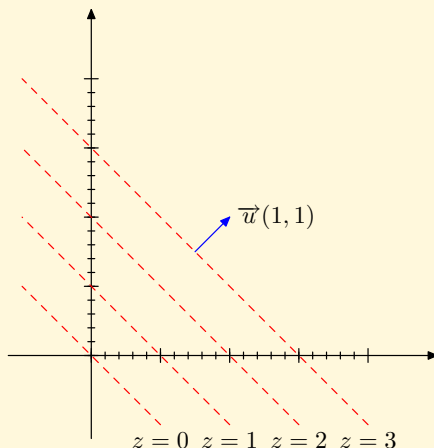
Si damos valores a z obtenemos rectas paralelas llamadas **líneas de nivel**

$$z = 0 \implies x + y = 0$$

$$z = 1 \implies x + y = 1$$

$$z = 2 \implies x + y = 2$$

$$z = 3 \implies x + y = 3$$



Luego si que queremos que z **aumente** basta desplazar cualquiera de las rectas en la dirección del vector perpendicular $\vec{u}(1, 1)$ y si queremos que z **disminuya** lo haremos en sentido contrario, en la dirección del vector $\vec{u}(-1, -1)$

MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





Veamos otro ejemplo. Consideremos la función lineal en dos variables

$$z = x - y$$

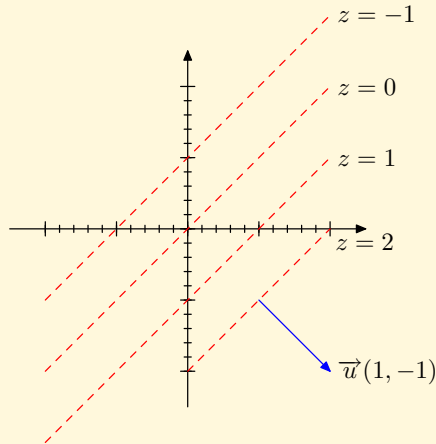
Si damos valores a z obtenemos las rectas paralelas **líneas de nivel**

$$z = -1 \implies x - y = -1$$

$$z = 0 \implies x + y = 0$$

$$z = 1 \implies x + y = 1$$

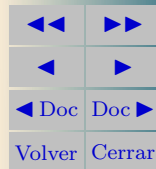
$$z = 2 \implies x + y = 2$$



Luego si que queremos que z **aumente** basta desplazar cualquiera de las rectas en la dirección del vector perpendicular $\vec{u}(1, -1)$ y si queremos que z **disminuya** lo haremos en sentido contrario, en la dirección del vector $\vec{u}(-1, 1)$

MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





4.1. Método gráfico

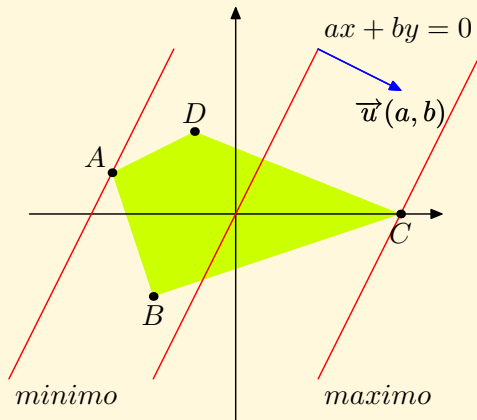
Dada una región factible, para optimizar la función lineal

$$z = ax + by$$

- Se dibuja cualquier línea de nivel, por ejemplo

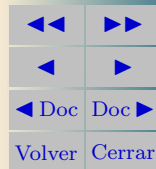
$$ax + by = 0$$

- desplazamos la línea en la dirección perpendicular $\vec{u}(a, b)$ para obtener el máximo, en este caso en C .
- desplazamos la línea en sentido contrario $\vec{u}(-a, -b)$ para obtener el mínimo, en este caso en A .



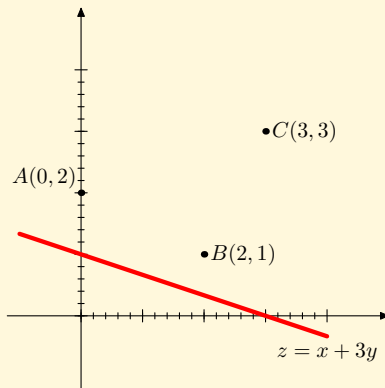
MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Test. Considera la función $z = x + 3y$ y los tres puntos A, B, C del gráfico y responde a las preguntas:

- ¿Qué valor toma z en $A(0, 2)$?
 (a) 5 (b) 6 (c) 7
- ¿Qué valor toma z en $C(3, 3)$?
 (a) 5 (b) 10 (c) 12
- ¿En qué punto es z máxima?
 (a) $A(0, 2)$ (b) $B(2, 1)$ (c) $C(3, 3)$
- ¿En qué punto es z mínima?
 (a) $A(0, 2)$ (b) $B(2, 1)$ (c) $C(3, 3)$

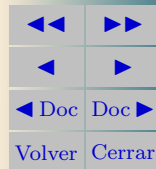


- ¿Cuál es el vector de ascenso de z ?
 (a) $\vec{u}(1, -3)$ (b) $\vec{u}(-1, 3)$ (c) $\vec{u}(1, 3)$ (d) $\vec{u}(3, 1)$
- ¿Cuál es el vector de descenso de z ?
 (a) $\vec{u}(1, -3)$ (b) $\vec{u}(-1, -3)$ (c) $\vec{u}(1, 3)$ (d) $\vec{u}(3, 1)$



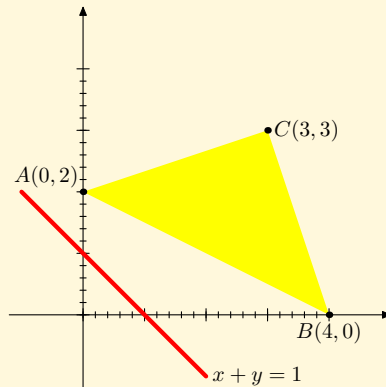
MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Test. Considera la función $z = x + y$ y la región factible del gráfico y responde a las preguntas:

- ¿Qué valor toma z en $A(0, 2)$?
 (a) 0 (b) 1 (c) 2
- ¿Qué valor toma z en $C(3, 3)$?
 (a) 5 (b) 6 (c) 7
- ¿En qué punto es z máxima?
 (a) $A(0, 2)$ (b) $B(4, 0)$ (c) $C(3, 3)$
- ¿En qué punto es z mínima?
 (a) $A(0, 2)$ (b) $B(4, 0)$ (c) $C(3, 3)$

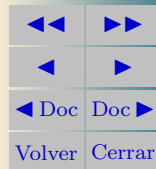


- ¿Cuál es el vector de ascenso de z ?
 (a) $\vec{u}(1, -1)$ (b) $\vec{u}(-1, 1)$ (c) $\vec{u}(1, 1)$ (d) $\vec{u}(-1, -1)$
- ¿Cuál es el vector de descenso de z ?
 (a) $\vec{u}(1, -1)$ (b) $\vec{u}(-1, -1)$ (c) $\vec{u}(1, 1)$ (d) $\vec{u}(-1, 1)$



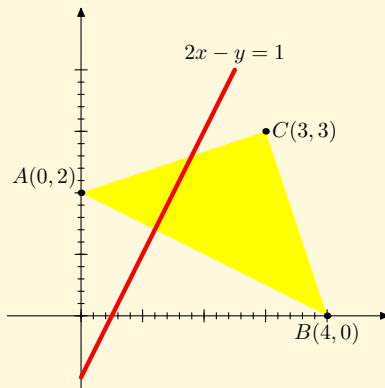
MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



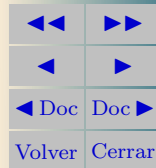
Test. Considera la función $z = 2x - y$ y la región factible del gráfico y responde a las preguntas:

- ¿Qué valor toma z en $A(0, 2)$?
 (a) 0 (b) -1 (c) -2
- ¿Qué valor toma z en $C(3, 3)$?
 (a) 3 (b) 4 (c) 5
- ¿En qué punto es z máxima?
 (a) $A(0, 2)$ (b) $B(4, 0)$ (c) $C(3, 3)$
- ¿En qué punto es z mínima?
 (a) $A(0, 2)$ (b) $B(4, 0)$ (c) $C(3, 3)$
- ¿Cuál es el vector de ascenso de z ?
 (a) $\vec{u}(2, -1)$ (b) $\vec{u}(-2, 1)$ (c) $\vec{u}(1, 2)$ (d) $\vec{u}(-1, -2)$
- ¿Cuál es el vector de descenso de z ?
 (a) $\vec{u}(1, -2)$ (b) $\vec{u}(-2, 1)$ (c) $\vec{u}(1, 2)$ (d) $\vec{u}(-1, 2)$



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Test. Considera la función $z = 2x - y$ y la región factible del gráfico y responde a las preguntas:

1. ¿Cuál es el vector de ascenso de z ?

(a) $\vec{u}(1, 2)$ (b) $\vec{u}(2, 1)$ (c) otro

2. ¿Tiene mínimo z ?

(a) si (b) no

3. ¿Tiene máximo z ?

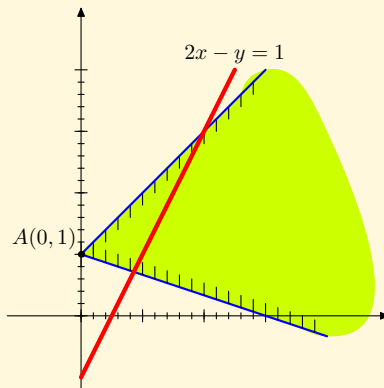
(a) si (b) no

4. En el punto A , z alcanza un....

(a) mínimo (b) máximo

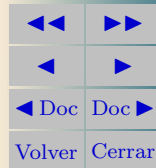
5. ¿Cuál es el vector de descenso de z ?

(a) $\vec{u}(2, -1)$ (b) $\vec{u}(-2, 1)$ (c) $\vec{u}(1, 2)$ (d) $\vec{u}(-1, -2)$



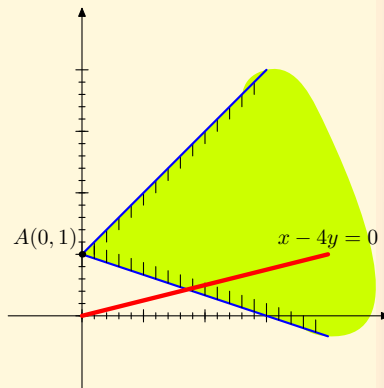
MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



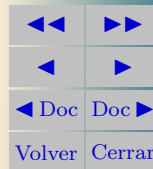
Test. Considera la función $z = x - 4y$ y la región factible del gráfico y responde a las preguntas:

- ¿Tiene mínimo z ?
 (a) si (b) no
- ¿Tiene máximo z ?
 (a) si (b) no
- En el punto A , z alcanza un....
 (a) mínimo (b) máximo (c) nada
- ¿Cuál es el vector de ascenso de z ?
 (a) $\vec{u}(4, -1)$ (b) $\vec{u}(1, -4)$ (c) otro
- ¿Cuál es el vector de descenso de z ?
 (a) $\vec{u}(4, -1)$ (b) $\vec{u}(-4, 1)$ (c) $\vec{u}(1, 4)$ (d) $\vec{u}(-1, 4)$



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



5. Formulación general del problema

En un problema de programación lineal intervienen: La función

$$z(x, y) = ax + by + c \quad (2)$$

llamada **función objetivo** y que es necesario optimizar.

En esa expresión x e y son las variables de decisión, mientras que a , b y c son constantes.

Las **restricciones** que deben ser inecuaciones lineales.

$$\left. \begin{array}{l} r_1 \equiv a_1x + b_1y \leq c_1 \\ r_2 \equiv a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \dots \dots \dots \\ r_n \equiv a_nx + b_ny \leq c_n \end{array} \right\} \quad (3)$$

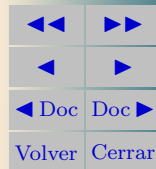
Al conjunto de valores de x e y que verifican todas y cada una de las restricciones se lo denomina **región factible**.

La **solución óptima** del problema será un par de valores (x_0, y_0) del conjunto factible que haga que $z(x, y)$ tome el valor **máximo** o **mínimo**.



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





5.1. Teorema de la programación lineal

Este resultado general nos dice donde debe estar la solución de un problema de programación lineal.

Dado el problema de optimización con restricciones lineales

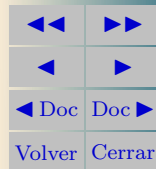
$$z = ax + by + c$$

$$\left. \begin{array}{l} r_1 \equiv a_1x + b_1y \leq c_1 \\ r_2 \equiv a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \dots \dots \dots \\ r_n \equiv a_nx + b_ny \leq c_n \end{array} \right\} \quad (4)$$

el máximo o mínimo de z , si existe se alcanza en un vértice de la región factible

MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





5.2. Ejemplos

Ejemplo 5.1. Hallar el máximo y el mínimo de la función $z = x + y$ con las restricciones

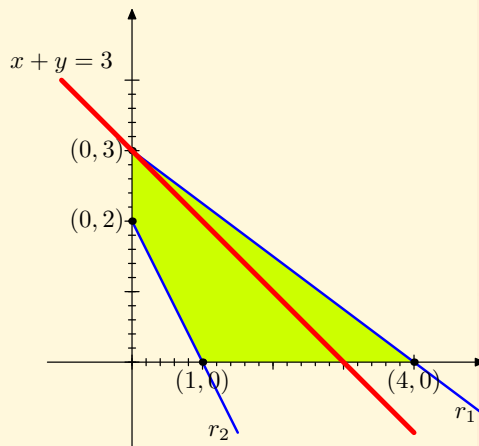
$$r_1 : 3x + 4y \leq 12 \quad r_2 : 2x + y \geq 2 \quad r_3 : x \geq 0 \quad r_4 : y \geq 0$$

Solución:

- Representamos las rectas y hallamos la región factible
- Representamos un caso concreto de la función objetivo

$$z = x + y = 3$$

- En el gráfico observamos que el máximo se alcanza en $(4, 0)$ y el mínimo se alcanza en $(1, 0)$.



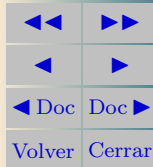
$$\max z = z(4, 0) = 4$$

$$\min z = z(1, 0) = 1$$

□

MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Ejemplo 5.2. Hallar el máximo y el mínimo de la función $z = x + y$ con las restricciones

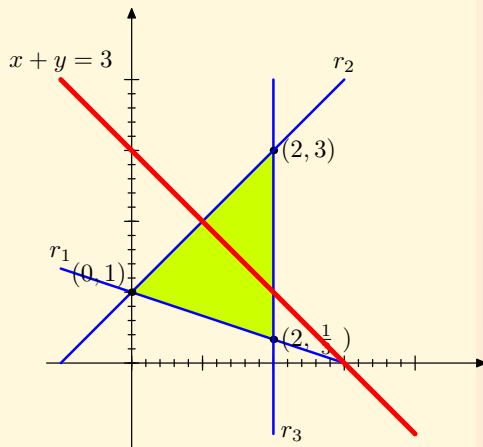
$$r_1 : x + 3y \geq 3 \quad r_2 : -x + y \leq 1 \quad r_3 : x \leq 2$$

Solución:

- Representamos las rectas y hallamos la región factible
- Representamos un caso concreto de la función objetivo

$$z = x + y = 3$$

- En el gráfico observamos que el máximo se alcanza en $(2, 3)$ y el mínimo se alcanza en $(0, 1)$.



$$\max z = z(2, 3) = 5$$

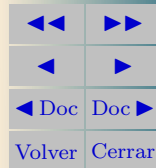
$$\min z = z(0, 1) = 1$$

□



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Ejemplo 5.3. Hallar el máximo y el mínimo de la función $z = x + y$ con las restricciones

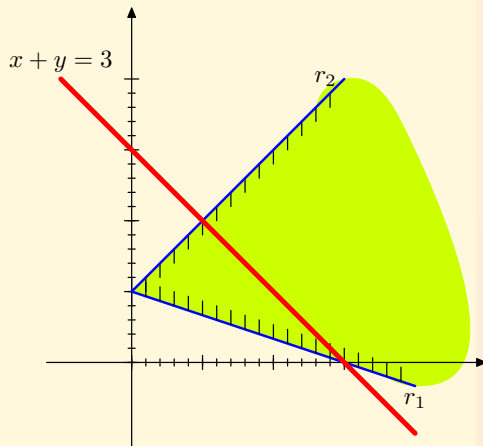
$$r_1 : x + 3y \geq 3 \quad r_2 : -x + y \leq 1$$

Solución:

- Representamos las rectas y hallamos la región factible
- Representamos un caso concreto de la función objetivo

$$z = x + y = 3$$

- En el gráfico observamos que el máximo no existe y el mínimo se alcanza en $(0, 1)$.



$\max z =$ no hay

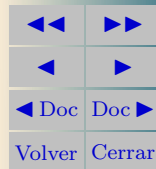
$\min z = z(0, 1) = 1$

□



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Ejemplo 5.4. Hallar el máximo y el mínimo de la función $z = -x + y$ con las restricciones

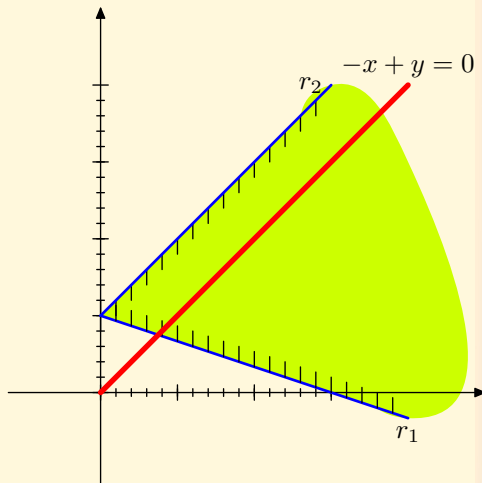
$$r_1 : x + 3y \geq 3 \quad r_2 : -x + y \leq 1$$

Solución:

- Representamos las rectas y hallamos la región factible
- Representamos un caso concreto de la función objetivo

$$z = -x + y = 0$$

- En el gráfico observamos que el máximo no existe y el mínimo se alcanza en todos los puntos de la restricción r_2 , pues es paralela a la función objetivo.



$\max z =$ no hay

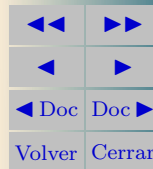
$\min z = z(0, 1) = 1$

□



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL





6. Ejercicios

Ejercicio 2. Un frutero necesita 16 cajas de naranjas, 5 de plátanos y 20 de manzanas. Dos mayoristas le suministran fruta en contenedores completos. El mayorista A envía en cada contenedor 8 cajas de naranjas, 1 de plátanos y 2 de manzanas. El mayorista B envía en cada contenedor 2 cajas de naranjas, una de plátanos y 7 de manzanas. Sabiendo que el mayorista A se encuentra a 150 km de distancia y el mayorista B a 300 km, calcular cuántos contenedores habrá de comprar a cada mayorista, con objeto de ahorrar tiempo y dinero, reduciendo al mínimo la distancia de lo solicitado.

Ejercicio 3. Una compañía tiene dos minas: la mina A produce diariamente 1 tonelada de carbón de antracita de alta calidad, 2 toneladas de calidad media y 4 toneladas de baja calidad; la mina B produce 2 toneladas de cada una de las tres clases. La compañía necesita 70 toneladas de carbón de alta calidad, 130 de calidad media y 150 de baja calidad. Los gastos diarios de la mina A ascienden a 150 dólares y los de la mina B a 200 dólares. ¿Cuántos días deberán trabajar en cada mina para que la función de coste sea mínima?

Ejercicio 4. Imaginemos que las necesidades semanales mínimas de una persona en proteínas, hidratos de carbono y grasas son, respectivamente, 8, 12 y 9 unidades. Supongamos que debemos obtener un preparado con esa composición mínima mezclando dos productos A y B, cuyos contenidos por kg son los de la siguiente tabla:

MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL

◀◀	▶▶
◀	▶
◀ Doc	Doc ▶
Volver	Cerrar

	Proteínas	Hidratos	Grasas	Coste/kg
A	2	6	1	600
B	1	1	3	400

¿Cuántos Kg de cada producto deberán comprarse semanalmente para que el costo de preparar la dieta sea mínimo?

Ejercicio 5. En la elaboración de un producto A se necesita una sustancia B. La cantidad de A obtenida es menor o igual que el doble de B utilizada, y la diferencia entre las cantidades del producto B y A no supera los 2 g mientras que la suma no debe sobrepasar los 5 g. Además se utiliza por lo menos 1 g de B y se requiere 1 g de A. La sustancia A se vende a 5 millones y la B cuesta 4 millones el gramo. Calcular la cantidad de sustancia B necesaria para que el beneficio sea máximo.

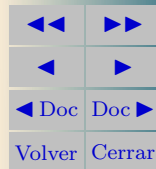
Ejercicio 6. En una encuesta realizada por una televisión ha detectado que un programa con 20 minutos de variedades y un minuto de publicidad capta 30.000 espectadores, mientras que otro programa con 10 minutos de variedades y 1 minuto de publicidad capta 10.000 espectadores. Para un determinado período, se decide dedicar no más de 80 minutos de variedades y no menos de 6 minutos de publicidad. ¿Cuántas veces deberá aparecer cada programa con objeto de captar el máximo número de espectadores?

Ejercicio 7. Una empresa fabrica dos tipos de tarjetas gráficas, de 16Mb y 32Mb de memoria, respectivamente. Se utilizan dos máquinas que emplean 2 min. en fabricar las de 16Mb y 3 min. en fabricar las de 32Mb. La cadena de



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



montaje puede funcionar un máximo de 300 minutos diarios. Además cada máquina tiene una capacidad máxima de fabricación diaria de 125 unidades, entre las cuales no puede haber más de 90 tarjetas de 16Mb ni más de 80 tarjetas de 32Mb, siendo el beneficio neto de las primeras de 45pts y el de las segundas de 60pts. ¿Cuántas tarjetas de 16Mb y 32Mb debe fabricar diariamente cada máquina para que el beneficio sea máximo?

Ejercicio 8. Un quiosco de prensa vende bolígrafos a 20 pts y cuadernos a 30 pts. Llevamos 240 pts y pretendemos comprar los mismos cuadernos que bolígrafos por lo menos.

¿Cuál será el número máximo de piezas que podemos comprar?.

Ejercicio 9. Un ganadero debe suministrar un mínimo diario de 4 mg de vitamina A y 6 mg de vitamina B en el pienso que da a sus reses. Dispone para ello de dos tipos de pienso P_1 y P_2 , cuyos contenidos vitamínicos por kilogramo son los que aparecen en la tabla:

	A	B
P_1	2	6
P_2	4	3

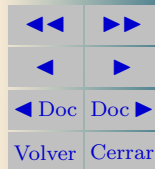
Si el pienso P_1 vale a 0,4 € el kilogramo y el pienso P_2 vale a 0,6 € el kilogramo, ¿qué cantidades respectivas del pienso P_1 y del pienso P_2 se deben mezclar, para suministrar las vitaminas requeridas con un coste mínimo?

Ejercicio 10. Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y del número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es de 150 € por electricista y 120 € por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?

Ejercicio 11. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. La unidad de tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 25 €. La de tipo B se vende a 30 € y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata. Si solo se dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL

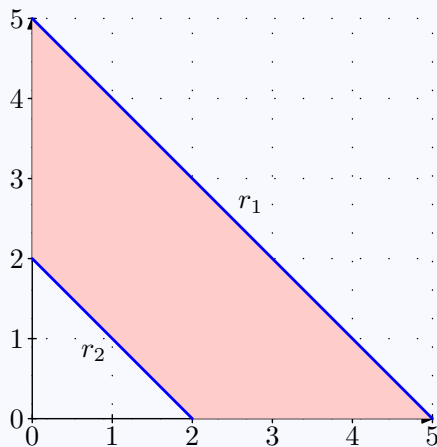
◀◀	▶▶
◀	▶
◀ Doc	Doc ▶
Volver	Cerrar

Soluciones a los Ejercicios

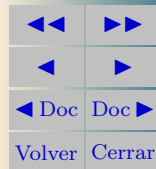
Ejercicio 1(a)

$$r_1 \equiv x + y \leq 5$$

$$r_2 \equiv x + y \geq 2$$

MaTEXPROGRAMACIÓN
LINEAL

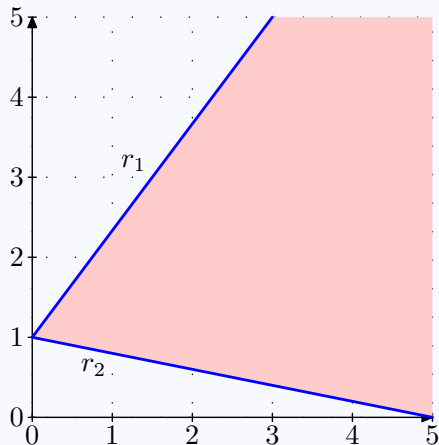
□



Ejercicio 1(b)

$$r_1 \equiv 4x - 3y \geq -3$$

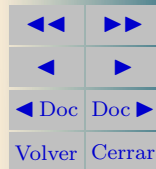
$$r_2 \equiv x + 4y \geq 5$$



□



MaTEx

PROGRAMACIÓN
LINEAL

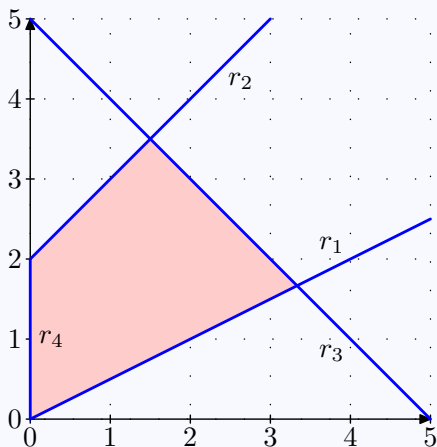
Ejercicio 1(c)

$$r_1 \equiv x \leq 2y$$

$$r_2 \equiv y - x \leq 2$$

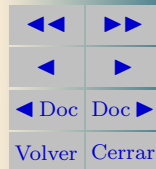
$$r_3 \equiv x + y \leq 5$$

$$r_4 \equiv x \geq 0$$



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



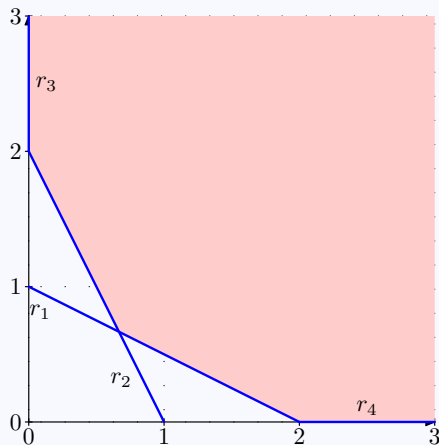
Ejercicio 1(d)

$$r_1 \equiv 2x + 4y \geq 4$$

$$r_2 \equiv 6x + 3y \geq 6$$

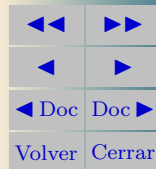
$$r_3 \equiv x \geq 0$$

$$r_4 \equiv y \geq 0$$



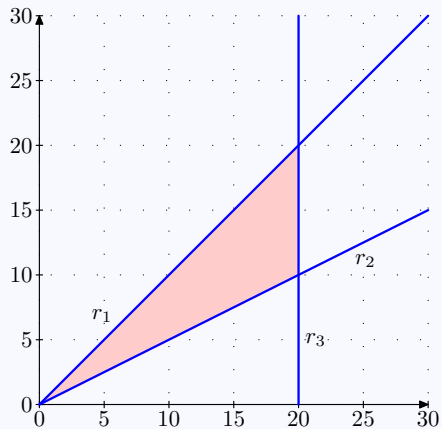
MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL

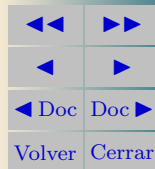


Ejercicio 1(e)

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv x \geq y \\ r_2 &\equiv x \leq 2y \\ r_3 &\equiv x \leq 20 \end{aligned}$$



MaTeX

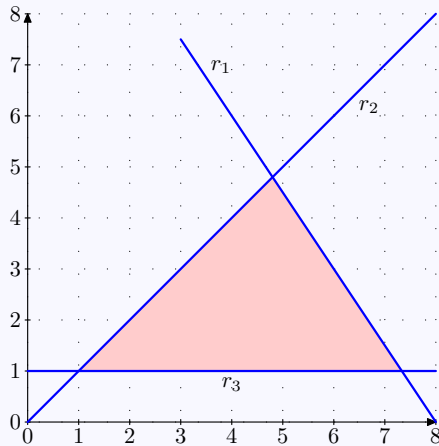
PROGRAMACIÓN
LINEAL

Ejercicio 1(f)

$$r_1 \equiv 3x + 2y \leq 24$$

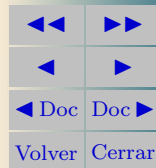
$$r_2 \equiv y \leq x$$

$$r_3 \equiv y \geq 1$$



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Ejercicio 2. Sean x los contenedores que envía A e y los contenedores que envía B , entonces hay que minimizar la distancia z

$$z = 150x + 300y$$

Las restricciones son:

$$r_1 \equiv 8x + 2y \geq 16$$

$$r_2 \equiv x + y \geq 5$$

$$r_3 \equiv 2x + 7y \geq 20$$

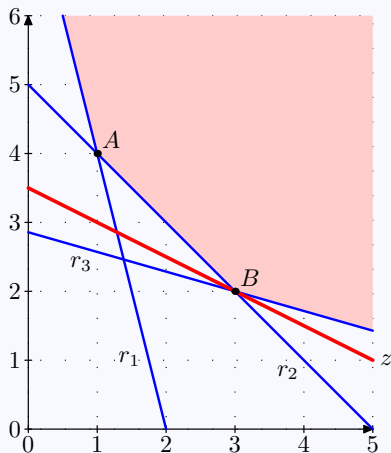
$$r_4 \equiv x \geq 0 \quad r_5 \equiv y \geq 0$$

$$r_1 \cap r_2 = A(1, 4)$$

$$r_2 \cap r_3 = B(3, 2)$$

El mínimo se alcanza en B ,

$$z(3, 2) = 1050 \text{ kms}$$



Ejercicio 2



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Ejercicio 3. Sean x los días que trabaja A e y los días que trabaja B , entonces hay que minimizar el coste z

$$z = 150x + 200y$$

Las restricciones son:

$$r_1 \equiv x + 2y \geq 70$$

$$r_2 \equiv 2x + 2y \geq 130$$

$$r_3 \equiv 4x + 2y \geq 150$$

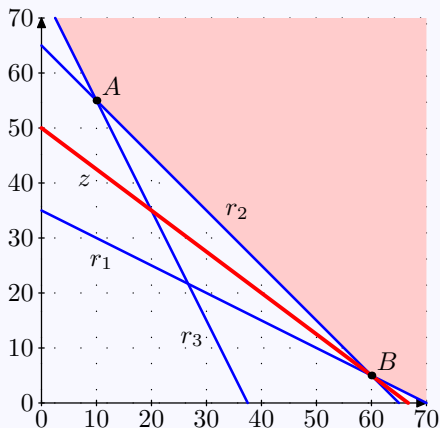
$$r_4 \equiv x \geq 0 \quad r_5 \equiv y \geq 0$$

$$r_2 \cap r_3 = A(10, 55)$$

$$r_1 \cap r_2 = B(60, 5)$$

El mínimo se alcanza en B ,

$$z(60, 5) = 10,000$$



Ejercicio 3



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Ejercicio 4. Sean x los kgs de A e y los kgs de B , entonces hay que minimizar el coste z

$$z = 600x + 400y$$

Las restricciones son:

$$r_1 \equiv 2x + y \geq 8$$

$$r_2 \equiv 6x + y \geq 12$$

$$r_3 \equiv x + 3y \geq 9$$

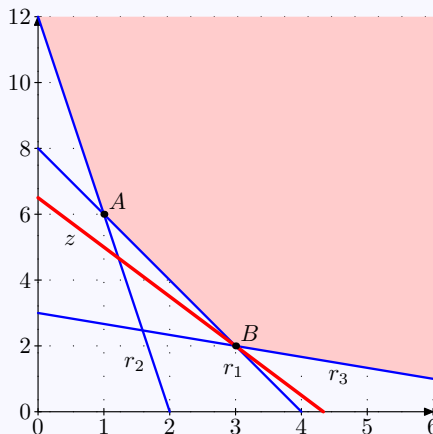
$$r_4 \equiv x \geq 0 \quad r_5 \equiv y \geq 0$$

$$r_1 \cap r_2 = A(1, 6)$$

$$r_1 \cap r_3 = B(3, 2)$$

El mínimo se alcanza en B ,

$$z(3, 2) = 2600$$

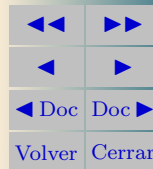


Ejercicio 4



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Ejercicio 5. Sean x los gs de A e y los gs de B , entonces hay que maximizar el beneficio z en millones

$$z = 5x + 4y$$

Las restricciones son:

$$r_1 \equiv x \leq 2y$$

$$r_2 \equiv y - x \leq 2$$

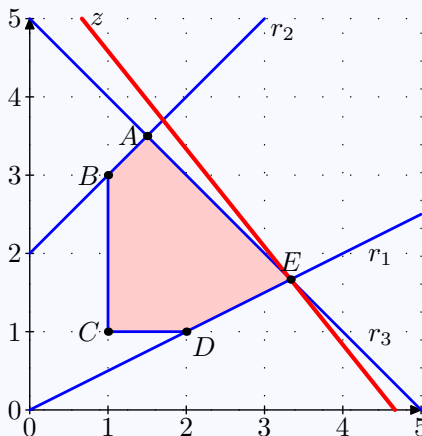
$$r_3 \equiv x + y \leq 5$$

$$r_4 \equiv x \geq 1 \quad r_5 \equiv y \geq 1$$

$$r_1 \cap r_3 = E\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

El máximo se alcanza en E ,

$$z\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right) = 10 \text{ millones}$$

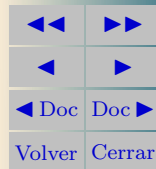


Ejercicio 5



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Ejercicio 6. Sean x los programas del primer tipo e y los programas del segundo tipo, entonces hay que maximizar el número de espectadores z

$$z = 30000x + 10000y$$

Las restricciones son:

$$r_1 \equiv 20x + 10y \leq 80$$

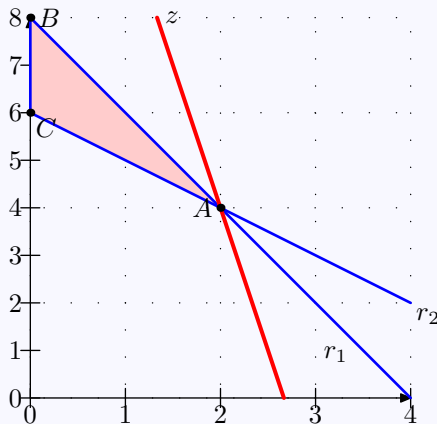
$$r_2 \equiv x + y \geq 6$$

$$r_3 \equiv x \geq 0 \quad r_4 \equiv y \geq 0$$

$$r_1 \cap r_2 = A(2, 4)$$

El máximo se alcanza en A ,

$$z(2, 4) = 100,000 \text{ espectadores}$$



Ejercicio 6



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Ejercicio 7. Sean x las tarjetas de 16Mb e y las tarjetas de 32Mb, entonces hay que maximizar el beneficio z

$$z = 45x + 60y$$

Las restricciones son:

$$r_1 \equiv 2x + 3y \leq 300$$

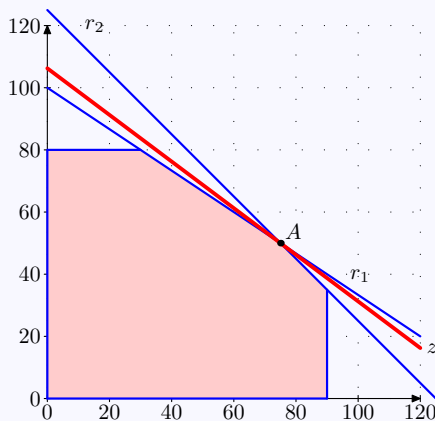
$$r_2 \equiv x + y \leq 125$$

$$r_3 \equiv x \leq 90 \quad r_4 \equiv y \leq 80$$

$$r_1 \cap r_2 = A(75, 50)$$

El máximo se alcanza en A ,

$$z(75, 50) = 6375 \text{ pts}$$



Ejercicio 7



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Ejercicio 8. Sean x los cuadernos e y los bolígrafos, entonces hay que maximizar la cantidad z

$$z = x + y$$

Las restricciones son:

$$r_1 \equiv 30x + 20y \leq 240$$

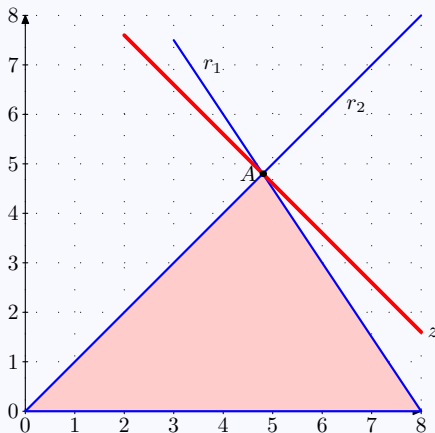
$$r_2 \equiv y \leq x$$

$$r_3 \equiv x \geq 0 \quad r_4 \equiv y \geq 0$$

$$r_1 \cap r_2 = A(4,8; 4,8)$$

Como tienen que ser enteros, tomamos en el recinto, la pareja $(5,4)$ de enteros más próxima a la solución. Luego, el máximo se alcanza en $(5,4)$,

$$z(5,4) = 9 \text{ piezas}$$



Ejercicio 8



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Ejercicio 9. Sean x los kg de pienso $P1$ e y los kg de pienso $P2$, entonces hay que minimizar el coste z

$$z = 0,4x + 0,6y$$

Las restricciones son:

$$r_1 \equiv 2x + 4y \geq 4$$

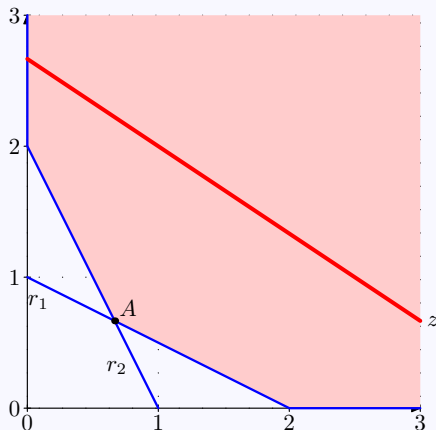
$$r_2 \equiv 6x + 3y \geq 6$$

$$r_3 \equiv x \geq 0 \quad r_4 \equiv y \geq 0$$

$$r_1 \cap r_2 = A(2/3; 2/3)$$

Luego, el mínimo se alcanza en $(2/3, 2/3)$,

$$z\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \in$$

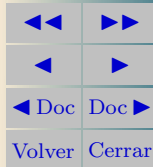


Ejercicio 9



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Ejercicio 10. Sean x los mecánicos e y los electricistas, entonces hay que maximizar el beneficio z

$$z = 120x + 150y$$

Las restricciones son:

$$r_1 \equiv x \geq y$$

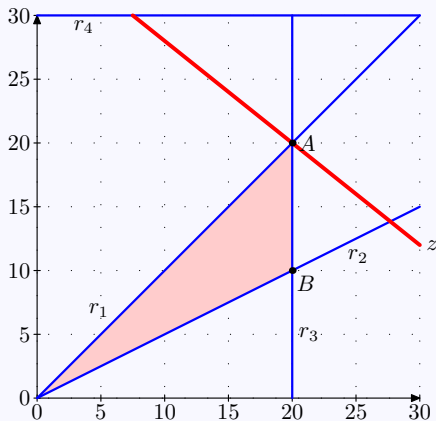
$$r_2 \equiv x \leq 2y$$

$$r_3 \equiv x \leq 20 \quad r_4 \equiv y \leq 30$$

$$r_1 \cap r_4 = A(20; 20)$$

Luego, el máximo se alcanza en $A(20, 20)$,

$$z(20, 20) = 5400 \text{ €}$$

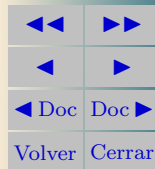


Ejercicio 10



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Ejercicio 11. Sean x las joyas de tipo A e y las joyas de tipo B, entonces hay que maximizar el beneficio z

$$z = 25x + 30y$$

Las restricciones son:

$$r_1 \equiv x + 1,5y \leq 750$$

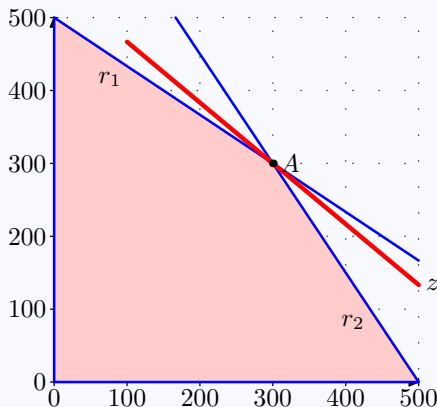
$$r_2 \equiv 1,5x + y \leq 750$$

$$r_3 \equiv x \geq 0 \quad r_4 \equiv y \geq 0$$

$$r_1 \cap r_2 = A(300; 300)$$

Luego, el máximo se alcanza en $A(300, 300)$,

$$z(300, 300) = 15500 \text{ €}$$



Ejercicio 11



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Soluciones a los Tests

Solución al Test: Recuerda que si la función objetivo z es lineal

$$z = ax + by$$

su vector dirección de ascenso es $\vec{u}(a, b)$ y su vector dirección de descenso es $\vec{u}(-a, -b)$. Luego para $z = x + 3y$:

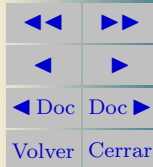
su vector dirección de ascenso es $\vec{u}(1, 3)$ y su vector dirección de descenso es $\vec{u}(-1, -3)$.

Final del Test



MaTEX

PROGRAMACIÓN
LINEAL



Índice alfabético

dirección de ascenso, 26
dirección de descenso, 26

función objetivo, 32

inecuaciones, 5
sistemas de, 9

líneas de nivel, 24

optimizar, 24

recta, 19
dirección de la, 19
paralela, 20
perpendicular, 22

región factible, 9
acotada, 16
no acotada, 17

restricciones, 32



MaTeX

PROGRAMACIÓN
LINEAL

