Bloque I Actividades de síntesis: Álgebra y aritmética

OPCIÓN A

A1. Elimina los logaritmos de la siguiente igualdad: $\log A = 2\log x + 3\log y - \frac{1}{2}\log x - 3$

$$A = \frac{x^2y^3}{1000\sqrt{x}}$$

A2. Racionaliza el denominador de $\dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

$$\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{2}+\sqrt{3})(2+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{9+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}+3} =$$

$$= \frac{(9+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2\sqrt{6})(4\sqrt{2}-3)}{(4\sqrt{2}+3)(4\sqrt{2}-3)} = \frac{36\sqrt{2}+32-16\sqrt{6}-8\sqrt{12}-27-12\sqrt{2}+12\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{32-9} =$$

$$= \frac{5+24\sqrt{2}-4\sqrt{3}-10\sqrt{6}}{23}$$

A3. Resuelve la ecuación $|2x+1| - (2|x|+1) = -1$.

$|2x+1| = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ $\qquad |x| = 0 \Rightarrow x = 0$

Por tanto, la ecuación se puede escribir como:

$$\begin{cases} -2x-1-(-2x+1) = -1 & si\ x < -\frac{1}{2} \\ 2x+1-(-2x+1) = -1 & si\ -\frac{1}{2} \le x \le 0 \\ 2x+1-(2x+1) = -1 & si\ x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -2 = -1 & si\ x < -\frac{1}{2} \\ 4x = -1 & si\ -\frac{1}{2} \le x \le 0 \\ 0 = -1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

La ecuación solo tiene solución en $-\frac{1}{2} \le x \le 0 \Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow$ Solución: $x = -\frac{1}{4}$

A4. Estudia si el desarrollo $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^7$ tiene término independiente y calcula el término de grado 2 en el desarrollo: $\left(3x^2 + \frac{2}{x}\right)^{10}$

$$T_k = \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} \cdot b^{k-1} = \binom{7}{k-1} (x^2)^{7-k+1} \left(\frac{1}{x^3}\right)^{k-1} = \binom{7}{k-1} x^{16-2k-3k+3}$$

$19 - 5k = 0 \Rightarrow k = \frac{19}{5}$ no es número entero y, por tanto, no existe término independiente.

$$T_k = \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} \cdot b^{k-1} = \binom{10}{k-1} (3x^2)^{11-k} \left(\frac{2}{x}\right)^{k-1} = \binom{10}{k-1} 3^{11-k} \cdot 2^{k-1} \cdot x^{22-2k-k+1}$$

$23 - 3k = 2 \Rightarrow k = 7 \Rightarrow T_7 = \binom{10}{6} 3^4 \cdot 2^6 x^2 = 1088640\,x^2$

A5. Halla las soluciones del siguiente sistema: $\begin{cases} 4^x + 3 \cdot 2^y - 40 = 0 \\ 2^{x+y} = 32 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4^x + 3 \cdot 2^y - 40 = 0 \\ 2^{x+y} = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2^x = A \\ 2^y = B \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A^2 + 3B - 40 = 0 \\ A \cdot B = 32 \end{cases} \Rightarrow A^2 + 3 \cdot \frac{32}{A} = 40 \Rightarrow A^3 - 40A + 96 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A - 4)(A^2 + 4A - 24) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 4\ B = 8 \Rightarrow x = 2\ y = 3 \\ A = -2\ -2\sqrt{7} < 0 \Rightarrow \text{No tiene solución real.} \\ A = -2 + 2\sqrt{7}\ B = \dfrac{8\sqrt{7} + 8}{3} \Rightarrow x = \log_2 (-2 + 2\sqrt{7}),\ y = \log_2 \dfrac{8\sqrt{7} + 8}{3} \end{cases}$$

A6. Resuelve la ecuación $\dfrac{4}{\sqrt{x - 5}} = \sqrt{2x + 13} - \sqrt{x - 5}$.

$$\left(\frac{4}{\sqrt{x - 5}} + \sqrt{x - 5}\right)^2 = \left(\sqrt{2x + 13}\right)^2 \Rightarrow \frac{16}{x - 5} + x - 5 + 8 = 2x + 13 \Rightarrow \frac{16}{x - 5} = x + 10 \Rightarrow 16 = x^2 + 5x - 50 \Rightarrow$$

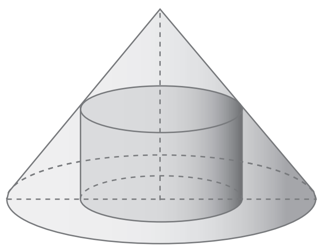
$$\Rightarrow x^2 + 5x - 66 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm 17}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -11 \text{ solución falsa} \end{cases}$$

A7. Encuentra todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{x - 1}{1 - y} \\ xy = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{x - 1}{1 - y} \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - xy = xy - y \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1,\ y = 1$$

Solución falsa.

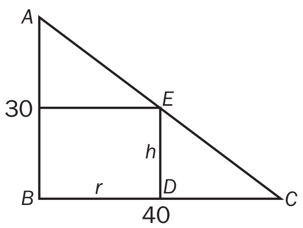
A8. La pantalla de una lámpara tiene forma de cono de diámetro de la base 80 cm y altura 30 cm. Debe contener inscrito un habitáculo para el foco luminoso con forma de cilindro tal y como aparece en la figura. El volumen de este cilindro ha de ser de 6000π cm^3. Calcula las dimensiones del cilindro.



Sea r el radio de la base del cilindro y h la altura.

Al observar la figura y aplicar el teorema de Tales a los triángulos semejantes ABC y EDC se obtiene:

$$\frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{\text{ED}}{\text{DC}} \Rightarrow \frac{30}{40} = \frac{h}{40 - r} \Rightarrow 40h = 1200 - 30r \Rightarrow h = \frac{1200 - 30r}{40} = 30 - \frac{3}{4}r$$



Volumen del cilindro:

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \left(30 - \frac{3r}{4}\right) = 6000\pi \Rightarrow 120r^2 - 3r^3 = 24\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^3 - 40r^2 + 8000 = 0 \Rightarrow (r - 20)\ (r^2 - 20r - 400) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 20\ cm \Rightarrow h = 15\ cm \\ r = 10\left(1 + \sqrt{5}\right)\ cm \Rightarrow h = \dfrac{45 - 15\sqrt{5}}{2}\ \text{cm} \end{cases}$$

A9. La suma de las tres cifras de un número es 7. La cifra de las centenas es igual a la suma de la cifra de las decenas más el doble de la cifra de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras, el número disminuye en 297 unidades. Calcula dicho número.

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x = y + 2z \\ (100x + 10y + z) - (100x + 10y + x) = 297 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 7 \\ x - y - 2z = 0 \\ x - z = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 4,\ y = 2,\ z = 1$$

El número buscado es 421.

OPCIÓN B

B1. Indica los números naturales x para los cuales se puede calcular la siguiente expresión: $\dfrac{\sqrt{-x^2+5x-6}}{5-x}$

Para poder calcular $\sqrt{\dfrac{-x^2+5x-6}{5-x}}$ se debe verificar que

$$\frac{-x^2+5x-6}{5-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-5x+6}{x-5} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-3)(x-2)}{(x-5)} \geq 0$$

En la tabla derecha se han estudiado los signos de los factores que aparecen en la fracción:

	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, 5)$	$(5, +\infty)$
$x-2$	−	+	+	+
$x-3$	−	−	+	+
$x-5$	−	−	−	+
Fracción	−	+	−	+

Los extremos $x = 2$ y $x = 3$ son solución de la inecuación ya que hacen cero la fracción algebraica. Sin embargo, $x = 5$ no es solución, porque no está definida la división por cero

Por tanto, la solución es $[2, 3] \cup (5, +\infty)$. Se pueden sustituir todos los números naturales excepto el 0, el 1, el 4 y el 5.

B2. Sabiendo únicamente que $\log 2 = 0{,}301$ y que $\log 3 = 0{,}477$, calcula con aproximación de dos cifras decimales:

a) $\log 0{,}36$

b) $\log_5 0{,}012$

c) $\log 0{,}\widehat{3}$

d) $\log 720$

a) $\log 0{,}36 = \log \dfrac{36}{100} = \log 36 - \log 100 = \log(2^2 \cdot 3^2) - 2 = 2\log 2 + 2\log 3 - 2 = 2 \cdot 0{,}301 + 2 \cdot 0{,}477 - 2 = 0{,}444$

b) $\log_5 0{,}012 = \dfrac{\log 0{,}012}{\log 5} = \dfrac{\log \dfrac{12}{1000}}{\log \dfrac{10}{2}} = \dfrac{\log 12 - \log 1000}{\log 10 - \log 2} = \dfrac{\log(2^2 \cdot 3) - 3}{1 - \log 2} = \dfrac{2\log 2 + \log 3 - 3}{1 - \log 2} =$

$= \dfrac{2 \cdot 0{,}301 + 0{,}477 - 3}{1 - 0{,}301} = -2{,}75$

c) $\log 0{,}\widehat{3} = \log \dfrac{3}{9} = \log \dfrac{1}{3} = \log 1 - \log 3 = 0 - 0{,}477 = -0{,}477$

d) $\log 720 = \log 2^3 \cdot 3^2 \cdot 10 = 3\log 2 + 2\log 3 + 1 = 2{,}857$

B3. En un estudio sobre el crecimiento de la cantidad de madera existente en una zona forestal protegida se ha determinado que dicha cantidad de madera viene determinada por $\sqrt[6]{e^t}$ veces la madera que había en el año 1950, siendo t la variable tiempo, medida en decenios transcurridos desde 1950.

a) Calcula la masa que había en 1900 y la que cabe esperar que haya en 2020 en comparación con la masa de 1950.

b) Calcula en qué año se duplicó la masa de 1950.

a) De 1900 a 1950 han pasado 5 decenios. Por tanto, la masa en 1900 era $\sqrt[6]{e^{-5}} = 0{,}435$ veces la de 1950.

De 1950 a 2020 han pasado 7 decenios. Por tanto, la masa en 2020 será $\sqrt[6]{e^7} = 3{,}21$ veces la de 1950.

b) $\sqrt[6]{e^t} = 2 \Rightarrow e^t = 2^6 = 64 \Rightarrow t = \ln 64 \approx 4{,}2 \Rightarrow 42$ años $\Rightarrow$ En 1992, la madera era el doble que en 1950.

B4. Calcula las siguientes operaciones:

a) $(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3})\,(2 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$

b) $(2 + \sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

a) $(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3})\,(2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = (2 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 + 2 + 4\sqrt{2} - 3 = 4\sqrt{2} + 3$

b) $(2 + \sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 4 + 2 + 3 + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6} = 9 + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$

B5. Encuentra una expresión equivalente a $|2x + 1| - (2|x| + 1)$ en la que no se utilicen valores absolutos.

$|2x + 1| = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ $\qquad |x| = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\begin{cases} -2x - 1 - (-2x + 1) & si\ x < -\frac{1}{2} \\ 2x + 1 - (-2x + 1) & si\ -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0 \\ 2x + 1 - (2x + 1) & si\ x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -2 & si\ x < -\frac{1}{2} \\ 4x & si\ -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & si\ x > 0 \end{cases}$$

B6. Halla el valor de k para que el polinomio $P(x) = x^4 - kx^3 + 2x^2 - 1$ sea divisible por $(x - 1)$.

$P(1) = 1^4 - k \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 = 2 - k = 0 \Rightarrow k = 2$

B7. Resuelve la siguiente ecuación: $\dfrac{x}{x + 2} - \dfrac{1}{x^2 - 4} = \dfrac{3}{x - 2} + \dfrac{8}{x + 2}$

$$\frac{x}{x + 2} - \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{3}{x - 2} + \frac{8}{x + 2} \Rightarrow \frac{x(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} - \frac{1}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{3(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{8(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 3x + 6 + 8x - 16 \Rightarrow x^2 - 13x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{133}}{2}$$

B8. Se quieren elaborar lotes de tres tipos con programas informáticos. Cada lote del tipo *A* debe contener dos CD con programas de aplicaciones y tres CD con juegos. Cada lote de tipo *B* debe contener tres CD de aplicaciones y otros tres con juegos. Finalmente, cada lote de tipo *C* debe contener dos CD con aplicaciones y cuatro con juegos.

Se quiere elaborar un total de 100 paquetes y para ello se dispone de 260 CD de aplicaciones y 325 CD de juegos. ¿Cuántos lotes de cada tipo se deberán hacer si se quieren utilizar todas las existencias disponibles?

x lotes A; y lotes B; z lotes C

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2x + 3y + 2z = 260 \\ 3x + 3y + 4z = 325 \end{cases} \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 100 \\ y = 60 \\ z = 25 \end{cases} \Rightarrow x = 15\ \ y = 60\ \ z = 25$$

Se deberán hacer 15 lotes de tipo *A*, 60 de tipo *B* y 25 de tipo *C*.