Bloque III Análisis de Funciones

OPCIÓN A

A1. Sea $f(x) = \dfrac{x^2-9}{|x-3|}$.

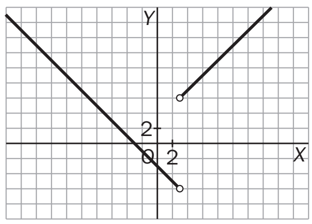
a) ¿Existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$?

b) Haz un esbozo de la gráfica de $f(x)$.

a) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{|x-3|} = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} = x+3 & \text{si } x > 3 \\ \dfrac{x^2-9}{3-x} = -x-3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

No existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, pues $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 6$ y $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -6$.

b)



A2. La función f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-(a+3)x+3a}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ es derivable en toda la recta real.

¿Cuánto vale el número a?

Como el polinomio $p(x) = x^2 - (a+3)x + 3a$ es divisible por $x-3$, pues $p(3) = 0$, resulta que podemos escribir $f(x) = \begin{cases} x-a & \text{si } x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$. Y como nos dicen que f es derivable en R, debe ser continua, en particular, continua en $x = 3$, por lo que $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$, o sea: $3 - a = 1$, $a = 2$.

A3. Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$ para $x > 1$. En el punto $P\left(2, -\dfrac{4}{3}\right)$ abandona la gráfica y sigue desplazándose a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

a) Halla la ecuación de dicha recta tangente.

b) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, ¿en qué punto la partícula encuentra el eje OX?

c) Si el desplazamiento es de derecha a izquierda, ¿en qué punto la partícula encuentra la asíntota vertical más próxima al punto P?

a) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$, $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)} = \dfrac{2x^22+2}{(1-x^2)^2}$, $f'(2) = \dfrac{10}{9}$, por lo que la ecuación de la tangente en $P\left(2, -\dfrac{4}{3}\right)$ es $y + \dfrac{4}{3} = \dfrac{10}{9}(x-2)$

b) Esta tangente corta al eje x en $Q\left(\dfrac{16}{5}, 0\right)$, que es el punto pedido.

c) Esta tangente corta a la asíntota $x = 1$ en el punto $\left(1, -\dfrac{22}{9}\right)$, que es el punto buscado.

A4. Sea f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcula a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en $Q(1, -3)$ y que la tangente a dicha gráfica en el punto $M(0, 1)$ es horizontal.

Nos dicen que $f(1) = -3$, $f''(1) = 0$, $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$.

Calculemos $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y $f''(x) = 6ax + 2b$.

$f(1) = -3$ nos lleva a $a + b + c + d = -3$.

$f''(1) = 0$ implica que $6a + 2b = 0$, $3a + b = 0$.

$f(0) = 1$ nos dice que $d = 1$.

$f'(0) = 0$ quiere decir que $c = 0$.

Así pues, $\left.\begin{array}{l} a + b = -4 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\}$, de donde $a = 2$, $b = -6$ y $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$.

A5. El número de bacterias de cierto cultivo en un instante t viene dado por la fórmula $N = 1000\left(25 + t \cdot e^{-\frac{t}{20}}\right)$ para $0 \leqslant t \leqslant 100$.

a) ¿En qué instante de ese intervalo, $0 \leqslant t \leqslant 100$, hay un número máximo y un número mínimo de bacterias?

b) ¿En qué instante es más lento el crecimiento o decrecimiento del número de bacterias?

a) $N'(t) = 1000\left(e^{-\frac{t}{20}} - \frac{t}{20}e^{-\frac{t}{20}}\right) = 0$ solo si $t = 20$

Así pues, calculemos $N(0)$, $N(100)$, $N(20)$, y elijamos el mayor y el menor.

$N(0) = 1000 \cdot 25$

$N(100) = 1000\left(25 + \frac{100}{e^5}\right)$

$N(20) = 1000\left(25 + \frac{20}{e}\right)$

Así pues, hay un número máximo de bacterias en el instante $t = 20$, y un número mínimo en $t = 0$.

b) $N'(t) = 1000e^{-\frac{t}{20}}\left(1 - \frac{t}{20}\right)$. El crecimiento o decrecimiento lo da esta función; así pues, para ver cuándo es más lento, estudiemos su derivada.

$N''(t) = 1000\left[-\frac{1}{20}e^{-\frac{t}{20}}\left(1 - \frac{t}{20}\right) - e^{-\frac{t}{20}}\frac{1}{20}\right] = 1000 \cdot \frac{1}{20}e^{-\frac{t}{20}}\left(\frac{t}{20} - 1 - 1\right)$, que será cero solo cuando $t = 40$.

Calculemos $N'(0)$, $N'(100)$, $N'(40)$, y decidamos:

$N'(0) = 1000$

$N'(100) = 1000 \cdot e^{-5} \cdot (-4)$

$N'(40) = 1000 \cdot e^{-2} \cdot (-1)$

En $t = 40$ y en $t = 100$ hay un decrecimiento del número de bacterias (la derivada es negativa), mientras que en $t = 0$ está creciendo dicho número. Nos piden cuál es el menor de estos tres números en valor absoluto, que resulta ser $|N'(100)|$. Así pues, en $t = 100$ es cuando es más lento el decrecimiento del número de bacterias.

A6. Un brik de zumo de base cuadrada está hecho con dos tipos de materiales. Si el de la base es doble de caro que el utilizado para el resto del envase y queremos que tenga 1 L de capacidad, ¿cuáles serán las dimensiones del brik más barato?

Sean x la arista de la base e y la altura del brik, medidas en dm.

Llamemos p al precio, fijo, del dm^2 de superficie lateral.

El precio del brik vendrá dado por $2x^2 \cdot 2p + 4xy \cdot p = 4p(x^2 + xy)$.

Dado que el volumen del brik es de 1 L, $x^2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x^2}$.

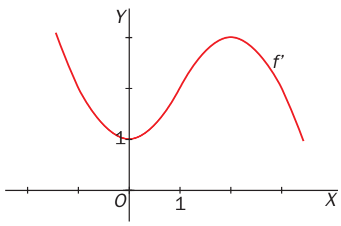
Hay que minimizar la función $f(x) = 4p\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$.

$f'(x) = 4p\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow 2x = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

$f''(x) = 4p\left(2 + \frac{2}{x^3}\right)$, positiva en $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Es un mínimo.

$y = \frac{1}{x^2} = \sqrt[3]{4}$ dm. El brik tendrá, aproximadamente, 0,79 dm de arista de la base y 1,59 dm de altura.

A7. Sea f: $[-1, 3] \rightarrow \mathbf{R}$ derivable, de la que se conoce la gráfica de su función derivada. Justifica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.



a) f es monótona creciente en $[-1, 3]$.

b) f admite un extremo relativo en $x = 0$.

c) En el punto de abscisa $x = 0$, la gráfica de f tiene tangente paralela a la recta de ecuación $y = x$.

d) Para todo x de $[-1, 3]$ es $f(x) \geqslant 0$.

e) f se anula al menos una vez en $[-1, 3]$.

a) En $[-1, 3]$, $f'(x) \geqslant 0$, por lo que f será monótona creciente y a **es verdadera**.

b) $f'(0) > 0$, con lo que en $x = 0$, f no admite ningún extremo relativo y b **es falsa**.

c) Como $f'(0) = 1$, en el punto de abscisa $x = 0$, la tangente a la gráfica de f tendrá pendiente 1 y es, por tanto, paralela a la recta $y = x$. Así que c **es verdadera**.

d) Todo lo que sabemos es que f es creciente en $[-1, 3]$, pero podría ser negativa, por lo que d **es falsa**.

e) f no tiene por qué anularse en $[-1, 3]$. Si se anula, lo hace una sola vez, pues es creciente, pero podría no anularse nunca, con lo que e **es falsa**.

A8. Sea $a > 0$. Considera la parábola $y = \frac{2}{a^2}x - \frac{1}{a^3}x^2$. Calcula el área encerrada por esta parábola y el eje horizontal. ¿Depende de a esa área? ¿Qué curva describen los vértices de todas esas parábolas?

Esta parábola corta al eje horizontal cuando $y = 0$, es decir, $\frac{x}{a^2}\left(2 - \frac{x}{a}\right) = 0$ solo cuando $x = 0$, $x = 2a$.

Así pues, el área encerrada es $\int_0^{2a}\left(\frac{2}{a^2}x - \frac{1}{a^3}x^2\right)dx = \left[\frac{2}{a^2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{a^3}\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$, que, como vemos, es independiente de a.

Si la parábola en cuestión corta al eje horizontal en $x = 0$, $x = 2a$, la abscisa de su vértice es a, y su ordenada $\frac{2}{a^2}a - \frac{1}{a^3}a^2 = \frac{1}{a}$, así que las coordenadas de los vértices responden a la expresión $\left(a, \frac{1}{a}\right)$, o sea, están en la hipérbola $y = \frac{1}{x}$.

OPCIÓN B

B1. Sea $f(x) = [x] + [-x]$, donde $[x]$ es el mayor entero menor o igual que x; ($[1{,}7] = 1$; $[5] = 5$ y $[-2{,}4] = -3$).

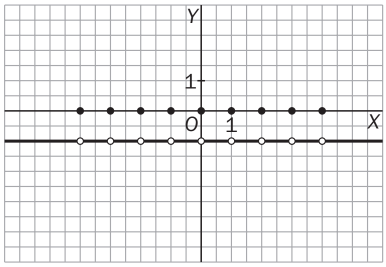
a) ¿Es f continua en $x = 3$?

b) Haz un esbozo de la gráfica de f en $[-4, 4]$.

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2 + (-3) = -1$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 3 + (-4) = -1$, así que existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -1$, pero $f(3) = [3] + [-3] = 3 - 3 = 0$, por lo que f no es continua en $x = 3$.

b) Si a es entero, $f(a) = [a] + [-a] = a - a = 0$.

Si a es entero y positivo o cero, y $x \in (a, a + 1)$, $f(x) = [x] + [-x] = a - (a + 1) = -1$, y si a es entero negativo y $x \in (a, a + 1)$, $f(x) = [x] + [-x] = a - (a + 1) = -1$, así que la gráfica de f es así:



B2. Calcula $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x-6}-1}$.

En $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x-6}-1}$ se presenta un caso del tipo $\dfrac{0}{0}$, así que debemos manipular un poco esa expresión:

$\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x-6}-1} = \dfrac{(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x-6}+1)}{x-6-1} = \dfrac{(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x-6}+1)}{x-7}$. Aquí vuelve a presentarse otra vez el caso $\dfrac{0}{0}$.

Pero escribimos $\dfrac{(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x-6}+1)}{x-7} = \dfrac{(x+2-9)(\sqrt{x-6}+1)}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)} = \dfrac{\sqrt{x-6}+1}{\sqrt{x+2}+3}$.

Así pues, $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x-6}-1} = \lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x-6}+1}{\sqrt{x+2}+3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

B3. Sea f' la función derivada de una función derivable f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Se sabe que f' es continua y que:

a) $f'(0) = 0$, $f'(2) = 1$, $f'(3) = 0$, $f'(4) = -1$, $f'(5) = 0$.

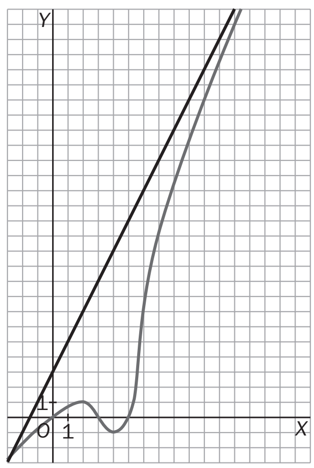
b) f' es estrictamente creciente en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(4, \infty)$.

c) f' es estrictamente decreciente en el intervalo $(2, 4)$.

d) La recta de ecuación $y = 2x + 3$ es una asíntota oblicua de f' cuando $x \to +\infty$.

Esboza la gráfica de f'.

Una posible gráfica para f' sería la de la figura.



B4. **La población de una colonia de aves evoluciona con el tiempo t, medido en años, según la función**

$$P: [2, 12] \to \mathbf{R}, \text{ dada por } P(t) = \begin{cases} 10 + (t - 6)^2 & \text{si } 2 \leqslant t \leqslant 10 \\ 28 - 2^{t-9} & \text{si } 10 < t \leqslant 12 \end{cases}$$

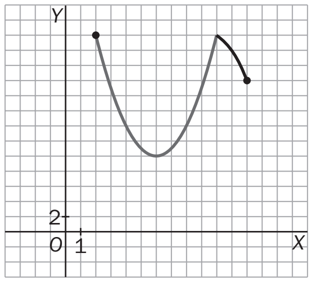
a) Representa gráficamente la función P e indica en qué período de tiempo crece o decrece la población.

b) Indica los instantes en los que la población alcanza los valores máximos y mínimos.

c) Si la población evolucionara a partir de $t = 12$ con la misma función que para $10 < t \leqslant 12$, ¿llegaría a extinguirse? Justifica la respuesta dando, en caso afirmativo, el instante de la extinción.

a) Como se observa, en [2, 10] es una parábola con vértice en $t = 6$, por lo que es decreciente en (2, 6) y creciente en (6, 10).

A partir de $t = 10$ es una exponencial decreciente, por lo que en (10, 12) la función decrece.



b) Obtengamos $f'(t)$ donde sea derivable:

si $t \in (2, 10)$, $f'(t) = 2(t - 6)$

si $t \in (10, 12)$, $f'(t) = -\ln 2 \cdot 2^{t-9}$.

Así pues, f' solo se anula en $t = 6$.

Calculemos entonces $f(6)$ y $f(2)$, $f(12)$ y $f(10)$. (Este último valor debemos calcularlo, pues podría presentar un extremo absoluto aunque f no sea derivable en $t = 10$.)

$f(6) = 10$, $f(2) = 26$, $f(12) = 20$, $f(10) = 26$

Así pues, en [2, 12], el máximo número de aves se encuentra en $t = 2$ y $t = 10$, y el mínimo, en $t = 6$.

c) Si para $t > 12$ la población sigue la fórmula $P(t) = 28 - 2^{t-9}$, habrá algún momento en el que $P(t) = 0$, en concreto cuando $28 = 2^{t-9}$, o sea, $(t - 9) \log 2 = \log 28$, o sea, $t = 9\ 1\ \frac{\log 28}{\log 2} \approx 13{,}8$ años.

B5. **La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de 3 horas de duración viene dada por la función f: [0, 3] $\to$ $\mathbf{R}$ dada por $f(t) = 300t\,(3 - t)$, donde t mide el tiempo en horas.**

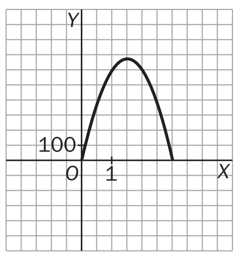
a) Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. ¿Cuándo es nula?

b) ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?

c) Representa gráficamente la función de capacidad de concentración.

a) Obtengamos $f'(t) = 300(3 - t) - 300t = -600t + 900$, que se anula si $t = \frac{3}{2}$. Así pues, en $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $f'(t) > 0$, por lo que la capacidad de concentración, $f(t)$, aumenta, mientras que en $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$, $f'(t) < 0$, es decir, disminuye.

$f(t) = 0$ si $t = 0$ ó si $t = 3$, o sea, al comenzar y al terminar la reunión.



b) Nos piden hallar el instante en el que la capacidad de concentración es máxima, que es en $t = \frac{3}{2}$, abscisa del máximo de f en [0, 3].

c) La función se corresponde con la gráfica de la derecha.

B6. **Para tener en casa una colonia de chinchillas hemos construido una caja de base cuadrada. La base y las cuatro caras laterales las hemos construido con un material que cuesta 10 euros el metro cuadrado, y la parte superior la hemos hecho con un cristal que cuesta 50 euros el metro cuadrado. Por razones de comodidad para los animales, queremos que el lado de la base no mida menos de 50 cm. Si disponemos de 720 euros, ¿cuáles son las dimensiones de la caja de máximo volumen?**

Llamando x e y a las dimensiones de la caja en m, debemos maximizar $V = x^2y$.

El precio de la caja viene dado por la fórmula $10 \cdot x^2 + 10 \cdot 4xy + 50x^2 = 720$, así que $3x^2 + 2xy = 36$,

$y = \dfrac{36 - 3x^2}{2x}$

$V = \dfrac{1}{2}x\,(36 - 3x^2) = f(x)$ con $0{,}5 \leqslant x$, pero $x\ \sqrt{12}$, pues en caso contrario, $y < 0$.

Maximicemos, pues, $f(x) = \dfrac{1}{2}\,(36x - 3x^3)$ en $\left[\dfrac{1}{2},\, 2\sqrt{3}\right]$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\,(36 - 9x^2) = 0$ si $x = \pm 2$. Calculemos $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(2\sqrt{3})$, $f(2)$ y elijamos el mayor.

$f(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}\left(18 - \dfrac{3}{8}\right) = \dfrac{141}{16}$; $\qquad f(2\sqrt{3}) = 0$; $\qquad f(2) = \dfrac{1}{2}\,(72 - 24) = 24$

Así pues, las dimensiones de la caja de máximo volumen son $x = 2$, $y = 6$ m.

B7. **Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x}{x - |x| + 1}$. Estudia su derivabilidad en $x = 0$.**

$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{x}{2x + 1} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. Aunque está función es continua en $x = 0$, no cumple la condición de las derivadas laterales ya que $f'(0^-) = \dfrac{1}{2}$, $f'(0^+) = 1$. Por tanto, f no es derivable en $x = 0$.

B8. **Calcula la integral $I = \displaystyle\int_0^{\pi} |f(x)|$ con $f(x) = \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{2}$.**

Estudiemos el signo de $f(x) = \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{2}$ en $[0, \pi]$. Si $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{6}$, $f(x) < 0$. Si $\dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{6}$, $f(x) \geqslant 0$.

Si $\dfrac{5\pi}{6} < x \leqslant \pi$, $f(x) < 0$.

Así pues, $I = \displaystyle\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\right) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\right) dx$

Por simetría de la curva $y = \dfrac{1}{2} - \operatorname{sen} x$, las integrales primera y tercera valen lo mismo, así que

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\right) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\right) dx = 2\left[\frac{x}{2} + \cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \left[-\cos - \frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}.$$