Hacia la universidad Álgebra lineal

OPCIÓN A

1. Una matriz cuadrada *A* se llama antisimétrica cuando su traspuesta es igual a su opuesta. Obtén la forma general de una matriz *A* de orden 2 que sea antisimétrica. Calcula A^2, A^4 y A^{33}.

Consideremos la matriz antisimétrica A: $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = b^2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = b^2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -b^2 I_2$

$A^4 = A^2 A^2 = b^4\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = b^4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = b^4 I_2$

Por tanto, $A^{33} = A^{32} A = b^{32} I_2\, b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = b^{33}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Estudia para qué valores de *a*, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ a & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -a \end{pmatrix}$ tiene inversa. Halla la matriz A^{-1} para $a = 4$.

Para que A tenga matriz inversa, tiene que ocurrir que $|A| \neq 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ a & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -a \end{vmatrix} = a^2 + 4a - 21 = (a - 3)(a + 7)$; $|A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -7 \end{cases}$

Si $a \neq 0$ y $a \neq -7$, entonces $|A| \neq 0$ y, por tanto, A tiene inversa.

Cálculo de A^{-1} para $a = 4$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $|A| = (4 - 3)(4 + 7) = 11$, Adj $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{(\text{Adj}\,A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{23}{11} & \frac{6}{11} & \frac{-10}{11} \\ \frac{14}{11} & \frac{7}{11} & \frac{-8}{11} \end{pmatrix}$

3. Un individuo invirtió 60 000 € repartidos en tres empresas y obtuvo 4500 € de beneficios. Calcula la inversión realizada en cada empresa, sabiendo que en la empresa *A* hizo el doble de inversión que en la *B* y *C* juntas y que los beneficios de las empresas fueron el 5% en la empresa *A*, 10% en la *B* y 20% en la *C*.

El sistema resultante es: $\begin{cases} A + B + C = 60\,000 \\ A - 2B - 2C = 0 \\ 0{,}05A + 0{,}1B + 0{,}2C = 4500 \end{cases} \Rightarrow A = 40\,000,\ B = 15\,000,\ C = 5\,000$

En la empresa A invierte 40 000 €, en la B invierte 15 000 € y en la C invierte 5000 €.

4. Discute, según los valores de los parámetros λ y μ, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \lambda x + y + 2\mu z = 1 \\ 2\mu x + y + 2\mu z = 1 + 3\lambda \\ \mu x + \mu z = 2\lambda \end{cases}$$

Formamos las matrices M y M^* de coeficientes y ampliada, respectivamente.

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2\mu \\ 2\mu & 1 & 2\mu \\ \mu & 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2\mu & 1 \\ 2\mu & 1 & 2\mu & 1+3\lambda \\ \mu & 0 & \mu & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos $|M|$ y obtenemos : $|M| = \mu\lambda + 2\mu^2 - 2\mu^2 - 2\mu^2 = \mu(\lambda - 2\mu)$

de donde: $\begin{cases} |M| = 0 \text{ si } \mu = 0 \text{ ó } \mu = \dfrac{\lambda}{2} \\ |M| \neq 0 \text{ si } \mu \neq 0 \text{ y } \mu \neq \dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$

• Si $\mu = 0$ se tiene: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1+3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$

Si $\lambda = 0$; rg(M) = rg(M^*) = 1, el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones (biparamétrico).
Si $\lambda \neq 0$; rg(M) = 2 $\neq$ rg(M^*) = 3, el sistema es incompatible, no tiene solución.

• Si $\mu = \dfrac{\lambda}{2}$, se tiene: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda & 1+3\lambda \\ \dfrac{\lambda}{2} & 0 & \dfrac{\lambda}{2} & 2\lambda \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = 0$; rg(M) = rg(M^*) = 1, el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones (biparamétrico).
Si $\lambda \neq 0$; rg(M) = 2 $\neq$ rg(M^*) = 3, el sistema es incompatible, no tiene solución.

• Si $\mu \neq 0$ y $\mu \neq \dfrac{\lambda}{2}$; rg($M$) = rg($M^*$) = 3, el sistema es compatible determinado, tiene una única solución.

5. Halla la matriz $X^2 + Y$, donde X e Y son dos matrices del sistema:

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \qquad 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} 5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10X + 6Y = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix} \\ 9X + 6Y = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix} \end{cases}$ restando miembro a miembro, resulta: $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Análogamente:

$\begin{cases} 5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15X + 9Y = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -12 & 45 \end{pmatrix} \\ 15X + 10Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} \end{cases}$ restando miembro a miembro, resulta: $Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

A continuación hallamos:

$X^2 = XX = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

$X^2 + Y = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

6. **a) Despeja la matriz *X* en función de *A* e I_2 en la ecuación $(X+A)^2 = X^2 + XA + I_2$, siendo *X* y *A* matrices cuadradas de orden dos, e I_2 la matriz identidad de orden dos.**

b) Resuelve la ecuación, $BX + B^2 = I_2$, si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e I_2 la matriz identidad de orden dos.

a) Para despejar la *X* desarrollamos el binomio y simplificamos:

$$(X+A)^2 = X^2 + XA + I_2 \Rightarrow X^2 + A^2 + XA + AX = X^2 + XA + I_2 \Rightarrow A^2 + AX = I_2 \Rightarrow AX = I_2 - A^2$$

Se multiplica cada término por A^{-1} por la izquierda:

$$A^{-1}AX = A^{-1}\left(I_2 - A^2\right) \Rightarrow X = A^{-1}I_2 - A^{-1}AA = A^{-1} - A$$

b) De forma análoga, despejamos la *X* y operamos con la matriz *B*:

$$BX + B^2 = I_2 \Rightarrow X = B^{-1} - B$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ |B| = -1,\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ \text{Adj}\, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{(\text{Adj}\, B)^t}{|B|} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7. **a) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde *a*, *b* y *c* son tres números reales arbitrarios. Encuentra A^n para todo número real natural *n*.**

b) Sea *B* una matriz 3 x 3 arbitraria. Indica, justificando la respuesta, si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes:

i) Si el rango de *B* es 2, entonces el rango de B^2 también es 2.

ii) Si el rango de *B* es 3, entonces el rango de B^3 también es 3.

a) Hallamos A^2 y A^3: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Es obvio que $A^n = 0$ para $n \geq 3$.

b) La afirmación i) es falsa, ya que si elegimos la matriz *B* y hallamos B^2 se obtiene:

$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de forma que rg(*B*) = 2; rg(B^2) = 1.

ii) es verdadera ya que si rg(*B*) = 3 $\Rightarrow |B| \neq 0$, entonces rg(B^3) = 3 ya que $|B^3| \neq 0$: $|B^3| = |B||B||B| \neq 0$.

8. **Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, *A* y *B*, en tres terminaciones: *N*, *L* y *S*. Produce del modelo *A*: 400 unidades en la terminación *N*; 200 unidades en la terminación *L;* y 50 unidades en la terminación *S*. Produce del modelo *B*: 300 unidades en la terminación *N*; 100 unidades en la terminación *L;* y 30 unidades en la terminación *S*. La terminación *N* lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación *L* lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. Y la terminación *S* lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.**

a) Representa la información en dos matrices.

b) Halla una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

a) Información en forma matricial:

Matriz de producción:
- Filas: Modelos *A*, *B*.
- Columnas: Terminaciones: *N*, *L*, *S*.

$$M = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}$$

Matriz de coste en horas:
- Filas: Terminaciones: *N*, *L*, *S*
- Columnas: Coste en horas: *T*, *A*

$$N = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1{,}2 \\ 33 & 1{,}3 \end{pmatrix}$$

b) Matriz que expresa las horas de taller y de administración para cada uno de los modelos:

$$MN = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1{,}2 \\ 33 & 1{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17\,650 & 705 \\ 11490 & 459 \end{pmatrix}$$

OPCIÓN B

1. Encuentra el valor o valores del parámetro α que hace que el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

no tenga solución única. En ese o esos casos, si es posible, calcula sus soluciones.

Sean M y M^* las matrices de coeficientes y ampliada, respectivamente.

Para que el sistema no tenga solución única debe cumplirse que rg(M) = rg(M^*) < número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = 2\,(2-\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 2$$

• Si $\alpha = 2$: $M^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ F_4-F_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3-F_2 \\ F_4-2F_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z + t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \\ t = \lambda \end{cases}$. Tiene infinitas soluciones.

2. Razona que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\lambda \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ tiene inversa cualquiera que sea el valor del parámetro λ. Calcula A^{-1} en función de λ. Resuelve las ecuaciones matriciales*:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad YA = (2 \quad 2) \qquad AZ = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$|A| = \lambda - 1 - \lambda = -1 \neq 0$. El determinante de A es distinto de cero, cualquiera que sea λ. Por tanto, siempre existe la matriz A^{-1}.

Hallamos A^{-1}: $|A| = -1$, Adj (A) = $\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1-\lambda & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \dfrac{(\text{Adj}\,A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda+1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Despejamos X: $X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda+1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+2 & \lambda+1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Despejamos Y: $Y = (2, 2)\,A^{-1} = (2, 2)\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda+1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (2 - 2\lambda,\ 2\lambda)$

Despejando Z: $Z = A^{-1}A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(* Estas ecuaciones faltaban en el enunciado original del libro.)

3. Halla el rango de la siguiente matriz, según los valores de los parámetros *a* y *b*:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 2 & b & b^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a - 2$ resulta que, si $a \neq 2$, entonces $\text{rg}(A) \geq 2$.

• Si $a = 2$, entonces tenemos la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & b & b^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ cuyo rango es dos, cualquiera que sea el valor de b.

• Si $a \neq 2$ veamos si puede tener rango 3. Hemos de considerar los determinantes:

$D_1 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & b & b^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-2)\, b\, (1-b)$

$D_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 2 & b^2 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = (ab^2 - 1)(a-2)$

$D_2 = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 2 & b & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = (ab-1)\,(a-2)$

$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ b & b^2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0$

Si $b \neq 0$, $b \neq 1$, entonces $D_1 \neq 0$ y $\text{rg}(A) = 3$.

Si $b = 0$, entonces $D_2 = 2 - a \neq 0$ y $\text{rg}(A) = 3$.

Si $b = 1$, entonces la matriz A es: $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-2)(a-1)$, resulta que, para $b = 1$, si $a \neq 2$, y $a \neq 1$, entonces $\text{rg}(A) = 3$.

Si $a = 1$, entonces $\text{rg}(A) = 2$.

4. ¿Es conmutativo el producto de matrices? Si la respuesta es afirmativa, demuéstralo; si es negativa, da un ejemplo que lo ponga de manifiesto.

¿Qué matrices conmutan con la matriz *A*?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En general, el producto de matrices no es conmutativo.

Ejemplo: sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB \neq BA$$

Es obvio que el producto de matrices no es conmutativo.

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz que conmuta con $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos correspondientes de ambas matrices

$a + 2b = a \Rightarrow b = 0$

$c + 2d = 2a + c \Rightarrow d = a$

Las matrices buscadas son de la forma $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$

5. a) Encuentra el número de vectores linealmente independientes que hay en el conjunto de vectores:

$$S = \{(1, 1, 1); (0, 2, 1); (2, 0, -3); (-1, 1, 2)\}$$

b) Determina un vector que, teniendo sus dos primeras componentes igual a 1, se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de *S*.

a) Al ser vectores de **R³,** el máximo número de vectores linealmente independientes es 3.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces los tres primeros vectores son linealmente independientes. El cuarto depende linealmente de los anteriores.

b) $(1, 1, z) = a\,(0, 2, 1) + b(2, 0, -3) \Rightarrow 2b = 1;\ 2a = 1;\ a - 3b = z.$

Se tiene que $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$; $z = -1$

Por tanto, el vector buscado es (1, 1, –1).

6. Calcula el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b+c} & \boldsymbol{c+a} & \boldsymbol{a+b} \end{vmatrix}$$

Sumando a la tercera fila la segunda, obtenemos:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c+a & c+a+b & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, ya que las filas primera y tercera son iguales.

7. El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de 500 € (sin impuestos). El valor del vino es 60 € menos que el de los refrescos y el de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que por los refrescos debe pagar un IVA del 6 %, por la cerveza del 12 % y por el vino del 30 %, lo que hace que la factura total con impuestos sea de 592,40 €, calcula la cantidad invertida en cada tipo de bebida.

Sean *R* € en refrescos, *C* € en cerveza y *V* € en vino las cantidades invertidas en cada tipo de bebida.

El sistema resultante es: $\begin{cases} R+C+V=500 \\ R+C-V=60 \\ \frac{6R}{100}+\frac{12C}{100}+\frac{30V}{100}=92,40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R+C+V=500 \\ R+C-V=60 \\ 6R+12C+30V=9240 \end{cases}$

R = 120; *C* = 160; *V* = 220;

Solución: 120 € en refrescos, 160 € en cervezas y 220 € en vino.

8. Una matriz cuadrada *M* es ortogonal si cumple *M' M* = *I*, donde *I* es la matriz identidad y *M'* es la traspuesta de *M*. Determina si la matriz siguiente es ortogonal:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Si llamamos *M* a la matriz dada, tenemos que comprobar si *M'M* = *I*

$$M'M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \neq I$$

Luego la matriz dada no es ortogonal.

Notas:

Notas: