Hacia la universidad Geometría

OPCIÓN A

1 a) Calcula tres vectores que sean perpendiculares a $\vec{u} = (-1, 2, 1)$ pero que no sean paralelos entre sí.

b) Calcula un vector que sea perpendicular a la vez a $\vec{u}$ y al primero que has dado como ejemplo del apartado anterior.

a) Los vectores deberán ser de la forma $\vec{a} = (x, y, z)$ tal que $-x + 2y + z = 0$

Tres ejemplos son (1, 0, 1), (2, 1, 0) y (3, 1, 1).

b) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} = (2, 2, -2) \parallel (1, 1, -1)$

2 Dadas las rectas que tienen por ecuaciones $r: \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+1}{m}$ y $s: \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -2x + y + nz = 4 \end{cases}$

a) Halla el valor de *m* y *n* para que *r* y *s* sean paralelas.

b) Para los valores calculados de *m* y *n*, calcula la ecuación del único plano que contiene a las dos rectas.

a) Para que sean *r* y *s* paralelas, sus vectores deben ser linealmente dependientes.

Un vector de *r* es (4, 2, *m*). Un vector de *s* es $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & n \end{vmatrix} = (2n + 1, 2 - n, 5)$

$$\frac{4}{2n+1} = \frac{2}{2-n} = \frac{m}{5} \Rightarrow n = \frac{3}{4}, m = 8$$

b) Un punto de *r* es *A*(3, −1, −1). Un punto de *s* es *B*(−5, 0, −8).

El plano pedido tiene por vectores (2, 1, 4) y $\overrightarrow{AB} = (-8, 1, -7)$

La ecuación es $\begin{vmatrix} 2 & -8 & x-3 \\ 1 & 1 & y+1 \\ 4 & -7 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 11x + 18y - 10z - 25 = 0$

3 Se consideran los puntos *A*(1, −2, 4) *B*(2, 2, −1) y *C*(−1, 0, 2):

a) Calcula las coordenadas del punto *D* de forma que *ABCD* sean los cuatro vértices de un paralelogramo.

b) Calcula el área del paralelogramo.

c) Calcula la medida de la altura del paralelogramo correspondiente a la base de extremos *A* y *B*.

a) Sea *M* el punto medio de *A* y *C*: *M*(0, −1, 3)

M debe ser también el punto medio de *B* y *D*. Por tanto, *D*(−2, −4, 7).

b) El área del paralelogramo coincide con el módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{AB} = (1, 4, -5)$ y $\overrightarrow{AD} = (-3, -2, 3)$

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (2, 12, 10) \Rightarrow S = \sqrt{4 + 144 + 100} = \sqrt{248}\ \text{u}^2$

c) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 16 + 25} = \sqrt{42} \Rightarrow$ altura $= \dfrac{\sqrt{248}}{\sqrt{42}} = \sqrt{\dfrac{124}{21}}$ u

4 **Dado el punto $A(-3, 0, -4)$ y la recta $s: \begin{cases} x-y=-2 \\ y+z=2 \end{cases}$**

a) Calcula las coordenadas de proyección ortogonal de *A* sobre *s*.

b) Calcula la distancia del punto *A* a la recta *s*.

c) Calcula las coordenadas del punto simétrico de *A* respecto de *s*.

a) Sea π el plano perpendicular a *s* y que pasa por *A*.

El vector de dirección de *s* es el vector normal de π. Entonces:

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1) \Rightarrow \pi: x + y - z + d = 0$. Como pasa por *A*, $d = -1 \Rightarrow \pi: x + y - z - 1 = 0$

La proyección *M* es la intersección de π y de *s*: $M\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$

b) $d(A, s) = d(A, M) = \sqrt{\frac{64}{9}+\frac{25}{9}+\frac{169}{9}} = \frac{\sqrt{258}}{3}$

c) *M* es el punto medio de *A* y *A'*. Entonces $A'\left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

5 **Dada la recta $r: \frac{x-1}{2} = -\frac{y}{2} = 1-z$ y el punto $P(-2, 0, 3)$.**

a) Calcula la ecuación del plano π que es perpendicular a *r* y que pasa por *P*.

b) ¿Cuántas rectas hay que sean perpendiculares a *r* y que pasen por *P*?

c) Calcula la ecuación de la recta *s* perpendicular a *r* y que pasa por *P* de forma que *r* y *s* sean secantes.

d) Calcula la distancia que separa a *P* de *r*.

La ecuación de la recta en forma continua es $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{-1}$

a) El vector de dirección de *r* es perpendicular al plano. Por tanto, $\pi: 2x - 2y - z + D = 0$.

Como, además, $P \in \pi \Rightarrow -4 - 3 + D = 0$, luego $D = 7$ y $\pi: 2x - 2y - z = -7$

b) Hay infinitas: todas las rectas contenidas en π y que pasan por *P*.

c) El punto de intersección de *r* y *s* coincidirá con el punto de intersección de *r* y π. Este punto será:

$2 \cdot (1+2t) - 2 \cdot (-2t) + t - 1 = -7 \Rightarrow t = -\frac{8}{9}$

$Q = r \cap s = \left(-\frac{7}{9}, \frac{16}{9}, \frac{17}{9}\right)$

La recta buscada pasa por *P* y por *Q*. Entonces: $PQ: \begin{cases} x = -2 + 11t \\ y = 16t \\ z = 3 - 10t \end{cases}$

d) $d(P, r) = d(P, Q) = \sqrt{\frac{121}{81}+\frac{256}{81}+\frac{100}{81}} = \frac{\sqrt{53}}{3}$

6 **Dados los puntos del espacio *A*(1, –1, 2), *B*(0, 3, –2) y *C*(4, 0, –3):**

a) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta *r* que pasa por *A* y *B*.

b) Escribe la ecuación general del plano π que pasa por *A*, *B* y *C*.

c) Escribe la ecuación del plano π' que es perpendicular a π y que contiene a *r*.

d) Halla la distancia que separa a *C* de π' y la distancia que separa a *C* de *r*.

a) $r:\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -1+4\lambda \\ z = 2-4\lambda \end{cases}$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, 4, -4)$; $\overrightarrow{AC} = (3, 1, -5) \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 & x-1 \\ 4 & 1 & y+1 \\ -4 & -5 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 16x + 17y + 13z - 25 = 0$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 16 & x-1 \\ 4 & 17 & y+1 \\ -4 & 13 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi': 40x - 17y - 27z - 3 = 0$

d) $d(C,\pi') = d(C,r) = \dfrac{|40\cdot 4 - 3\cdot(-27) - 3|}{\sqrt{40^2+17^2+27^2}} = \dfrac{238}{\sqrt{2618}}$

7 **Dadas las rectas $r:\ x-1 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{-1}$, $s:\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$:**

a) Comprueba que *r* y *s* se cruzan y escribe las ecuaciones de la perpendicular común a ambas.

b) Halla la distancia que separa a *r* de *s*.

a) $P_r(1, 0, -2)$; $\vec{u}_r = (1, 2, -1)$; $P_s(1, 1, 0)$; $\vec{u}_s = (2, 2, -1) \Rightarrow \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2$; $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$ se cruzan.

$P(1+\lambda, 2\lambda, -2-\lambda)$; $Q(1+2\mu, 1+2\mu, -\mu)$; $\overrightarrow{PQ} = (2\mu-\lambda, 1+2\mu-2\lambda, -\mu+2+\lambda)$ es perpendicular a $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s \Rightarrow \begin{cases} 7\mu - 6\lambda = 0 \\ 9\mu - 7\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = 0 \Rightarrow P(1, 0, -2)$; $Q(1, 1, 0)$; $\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 2)$

Perpendicular común: $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -2+2t \end{cases}$

b) $d(r, s) = d(P, Q) = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ u

8 **Se considera la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 11y - 9z + 2 = 0$:**

a) Calcula las coordenadas de su centro y la medida de su radio.

b) Comprueba que los puntos *A*(0, −1, 2) y *B*(1, 1, −1) pertenecen a la esfera.

c) Calcula la longitud de la cuerda de la esfera que tiene por extremos las intersecciones de dicha esfera con la recta $r:\begin{cases} y+z=20 \\ y-z=2 \end{cases}$

a) $c_1 = -\dfrac{D}{2} = \dfrac{3}{2}$; $c_2 = -\dfrac{E}{2} = \dfrac{11}{2}$; $c_3 = -\dfrac{F}{2} = \dfrac{9}{2} \Rightarrow C\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{11}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$; $r = \sqrt{\dfrac{D^2}{4} + \dfrac{E^2}{4} + \dfrac{F^2}{4} - G} = \dfrac{\sqrt{203}}{2}$

b) $A(0, -1, 2) \Rightarrow 1 + 4 + 11 - 18 + 2 = 0$; $B(1, 1, -1) \Rightarrow 1 + 1 + 1 - 3 - 11 + 9 + 2 = 0$

c) Se resuelve el sistema y se obtienen *P*(1, 11, 9) y *Q*(2, 11, 9), por lo que la longitud de la cuerda será *d*(*P*, *Q*) = 1.

OPCIÓN B

1 Los puntos *A'* y *B'* son las proyecciones ortogonales de los puntos *A*(2, –1, 1) y *B*(1, –3, 0) en el plano $\pi: 2x - y - z - 3 = 0$.

a) Calcula las coordenadas de *A'* y *B'*.

b) Comprueba que *A*, *B*, *A'* y *B'* son cuatro puntos coplanarios.

c) Calcula el área del cuadrilátero de vértices *A*, *B*, *A'* y *B'*.

a) Recta $AA': \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$; $A' = AA' \cap \pi \Rightarrow A'\left(\dfrac{10}{6}, -\dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{6}\right)$

Recta $BB': \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z}{-1}$; $B' = BB' \cap \pi \Rightarrow B'\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{8}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

b) Las rectas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son, evidentemente, paralelas. Por tanto, *A*, *B*, *A'* y *B'* son coplanarios.

c) $S_{ABA'B'} = S_{AA'B'} + S_{B'BA} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{A'A} \times \overrightarrow{A'B'}\right| + \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{B'A} \times \overrightarrow{B'B}\right| =$

$$\frac{1}{2}\left|\left(\frac{6}{36} \quad -\frac{18}{36} \quad \frac{30}{36}\right)\right| + \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{12}{36} \quad \frac{36}{36} \quad -\frac{60}{36}\right)\right| = \frac{\sqrt{35}}{12} + \frac{\sqrt{35}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{4}$$

2 a) Calcula el valor de *x* para que los vectores $\vec{u}$ = (1, *x*, 0) y $\vec{v}$ = (*x* + 3, 2, –8) sean ortogonales y, para ese valor hallado, calcula el área del paralelogramo determinado por los dos vectores.

b) Calcula todos los valores de *y* que hacen que los vectores ortogonales hallados en el apartado anterior junto con el vector $\vec{w}$ = (*y*, –1, *y* + 1) determinen un paralelepípedo de 20 unidades cúbicas de volumen.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow x + 3 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \vec{u} = (1, -1, 0) \Rightarrow \vec{v} = (2, 2, -8)$

$$S = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -8 \end{vmatrix} = |(8, 8, 4)| = \sqrt{64 + 64 + 16} = 12 \text{ u}^2$$

b) $$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -8 \\ y & -1 & y+1 \end{vmatrix} = 12y - 4 \Rightarrow |12y - 4| = 20 \Rightarrow \begin{cases} 12y - 4 = 20 & \text{si } y \ge \frac{1}{3} \Rightarrow y = 2 \\ 4 - 12y = 20 & \text{si } y < \frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

3 Dados el plano π : 2*x* – 3*y* + *z* + 1 = 0 y la recta $r: \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$:

a) Calcula el seno del ángulo que forman la recta *r* y el plano π.

b) Halla la ecuación de la recta *s* proyección ortogonal de *r* sobre π.

a) $\text{sen}(r, \pi) = \dfrac{|(2, -3, 1) \cdot (-1, -1, 2)|}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+1+4}} = \dfrac{3}{2\sqrt{21}}$

b) El plano que contiene a *r* y es perpendicular a π es *x* + *y* + *z* + 1 = 0. Entonces *s* : $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + z + 1 = 0 \end{cases}$

4 **Calcula las coordenadas del centro y la longitud del radio de la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - x + 4y + 4 = 0$ y estudia la posición relativa del plano $\pi : 2x - y + z = 0$ respecto de dicha superficie.**

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+2)^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}, -2, 0\right); r = \frac{1}{2}$$

$$d(C, \pi) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} > r \Rightarrow \pi \text{ es exterior a la esfera.}$$

5 **Dadas las rectas $r : \begin{cases} x = 1 + a(y-2) \\ x = z \end{cases}$ y $s : \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ ax - z = 2a - 2 \end{cases}$:**

a) Averigua su posición relativa, según los valores de *a*.

b) Tomando *a* = 0, determina los puntos $P \in r$ y $Q \in s$ tales que la distancia entre *P* y *Q* sea mínima.

a) Se discute el sistema $\begin{cases} x = 1 + a(y-2) \\ x = z \\ y - z + 1 = 0 \\ ax - z = 2a - 2 \end{cases}$

Si *a* = 1 son paralelas; Si *a* = –1 son secantes, y en el resto de casos se cruzan.

b) *P*(1, *y*, 1); *Q*(*x*, 1, 2); *d*(*P*, *Q*) = $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + 1}$, que es mínima si *x* = 1, *y* = 1.

Luego *P*(1, 1, 1) y *Q*(1, 1, 2)

6 **Se considera la recta $r : \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$.**

a) Determina la ecuación de la recta *s* que corta perpendicularmente a *r* y pasa por *A*(0, 2, 2) y las coordenadas del punto *P*, intersección de *r* y *s*.

b) Halla la ecuación del plano π que contiene a *r* y *s*, y la de la recta *t* perpendicular a π por el punto *P*.

Si *Q* es cualquier punto de *t*, explica, sin hacer ningún cálculo, qué relación hay entre las distancias de *Q* a *r*, a *s* y a π.

a) *P*(1 – *t*, *t*, 2 – *t*); $\vec{u}_r$ = (–1, 1, –1); $\overrightarrow{PA}$ = (*t* – 1, 2 – *t*, *t*)

$\overrightarrow{PA} \cdot \vec{u}_r = 0 \Rightarrow$ *t* = 1; *P* (0, 1, 1). Entonces *s* = *PA* es *s*: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

b) π contiene a *r* y pasa por *A*: $\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x + y - z = 0$

t: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Las tres distancias son iguales, pues *P* está en *r*, *s* y π, y es el punto más cercano a *Q*.

7 **Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los planos π : $2x - y + 2z - 6 = 0$ y π' : $3x + 6y + 6z - 1 = 0$. ¿Qué nombre recibe este lugar?**

Sea $X(x, y, z)$ un punto genérico del lugar.

$d(X, \alpha) = d(X, \beta) \Rightarrow \dfrac{|2x - y + 2z - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{|3x + 6y + 6z - 1|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2}} \Rightarrow$ Dos soluciones:

$\dfrac{2x - y + 2z - 6}{3} = \dfrac{3x + 6y + 6z - 1}{9} \Rightarrow 3x - 9y - 17 = 0$

$\dfrac{2x - y + 2z - 6}{3} = -\dfrac{3x + 6y + 6z - 1}{9} \Rightarrow 9x + 3y + 12z - 19 = 0$

El lugar está formado por los dos planos bisectores.

8 **Calcula la ecuación en forma continua de la recta que es paralela al plano π : $x - 2y - z - 1 = 0$ y que corta perpendicularmente a la recta $s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ en el punto $P(1, 1, 2)$.**

Los vectores de dirección de r deberán ser perpendiculares al vector $\vec{v} = (1, 1, 1)$, vector de dirección de s, y al vector $\vec{w} = (1, -2, -1)$, vector normal de π. Por tanto, un vector de dirección de r será:

$$\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (1, 2, -3) \Rightarrow r : x - 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$$