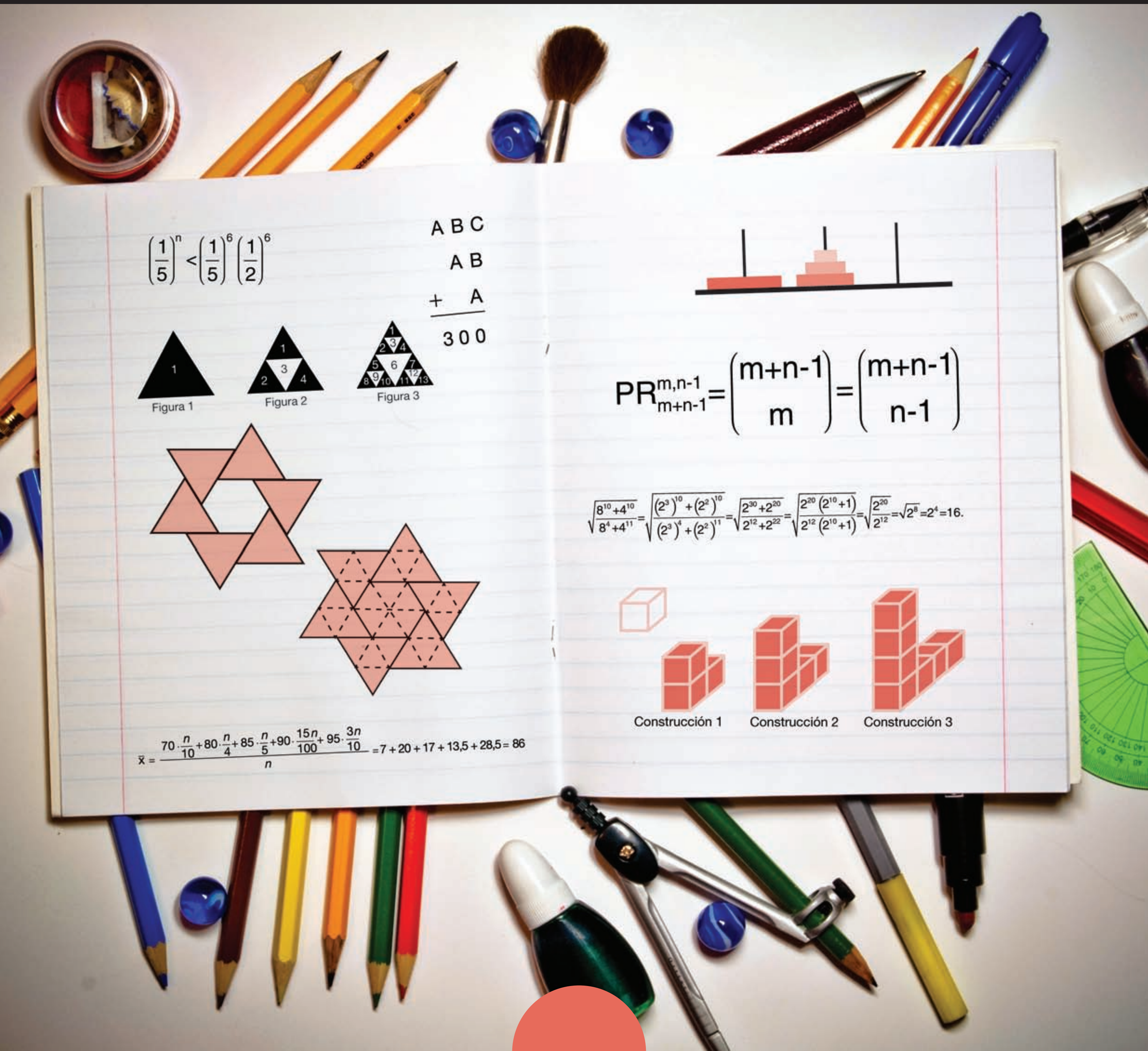
Ampliación de Matemáticas 3º de ESO: Resolución de Problemas

Asociación Matemática Concurso de Primavera

Publicaciones
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN



EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN

Consejera de Educación
Excma. Sra. Dña. Lucía Figar de Lacalle

Viceconsejera de Educación
Ilma. Sra. Dña. Alicia Delibes Liniers

Directora General de Educación Secundaria y Enseñanzas Profesionales
Ilma. Sra. Dña. Mª José García-Patrón Alcázar

Área de Publicaciones
Julia González Henche
Juan Ignacio Fries García
Javier Alcántara Ortega

Tirada: 900 ejemplares
1ª Edición: 12/2010

Edita: Dirección General de Educación Secundaria y Enseñanzas Profesionales de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Gran Vía, 20, 3ª planta. 28013 Madrid
Tel.: 917201403 Fax.: 917201307

www.madrid.org

Preimpresión: Allende Branding
Impresión: Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid

Depósito Legal: M - 4133 - 2011
ISBN: 978-84-451-3373-6

Impreso en España - ***Printed in Spain***

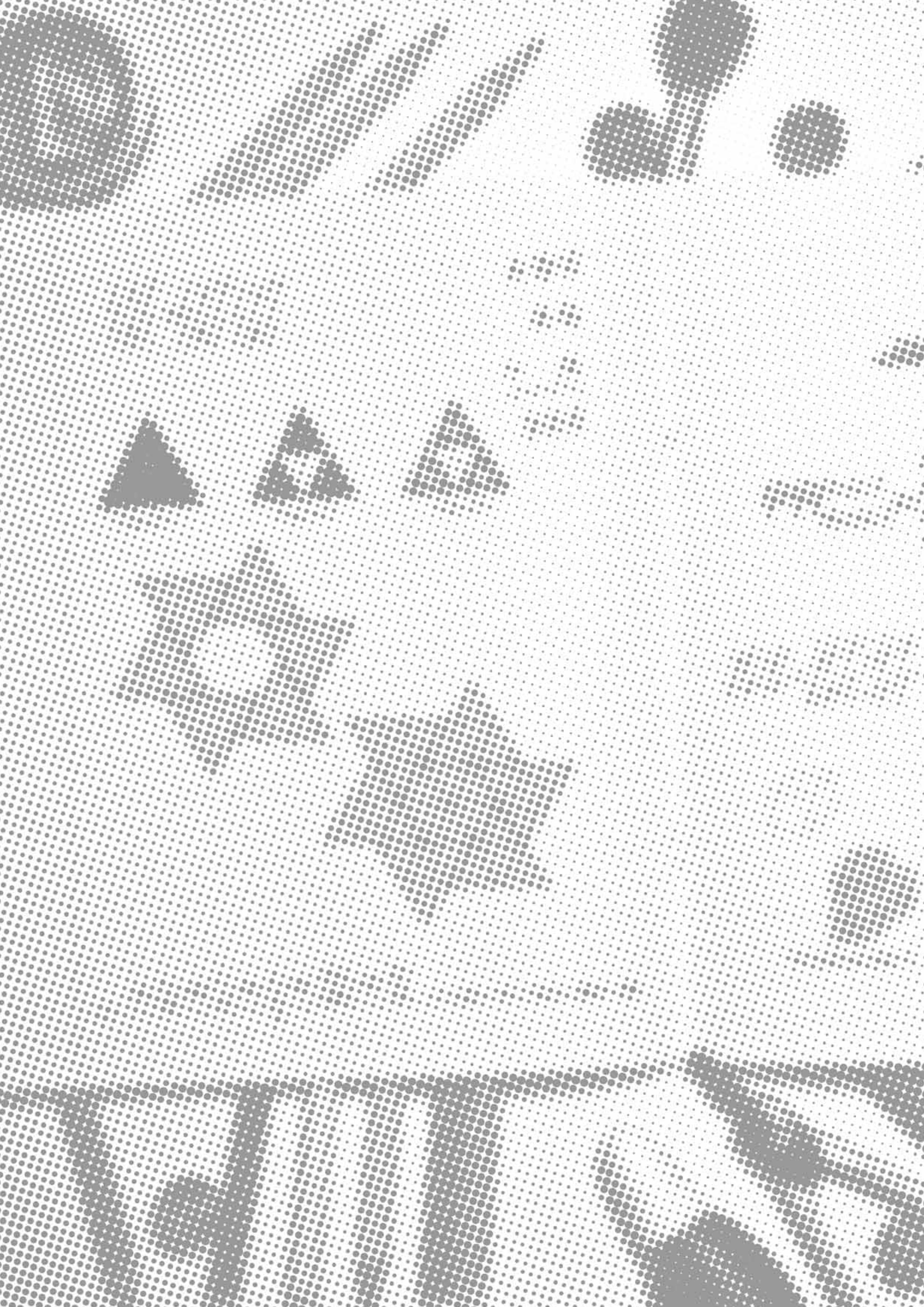
Ampliación de Matemáticas 3º de ESO: Resolución de Problemas

Juan Jesús Donaire Moreno
Jesús García Gual
María Gaspar Alonso-Vega
Joaquín Hernández Gómez
José Alfredo Martínez Sanz
María Moreno Warleta
M. Mercedes Sánchez Benito
Esteban Serrano Marugán

La Suma de Todos
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid
www.madrid.org

Índice

Índice



Presentación

En el curso 2009-10, la Comunidad de Madrid implantó en 3º de ESO una nueva materia optativa, *Ampliación de matemáticas: Resolución de problemas*, destinada a aquellos alumnos que muestran especial interés por las Matemáticas y desean profundizar en sus contenidos mediante la resolución de problemas.

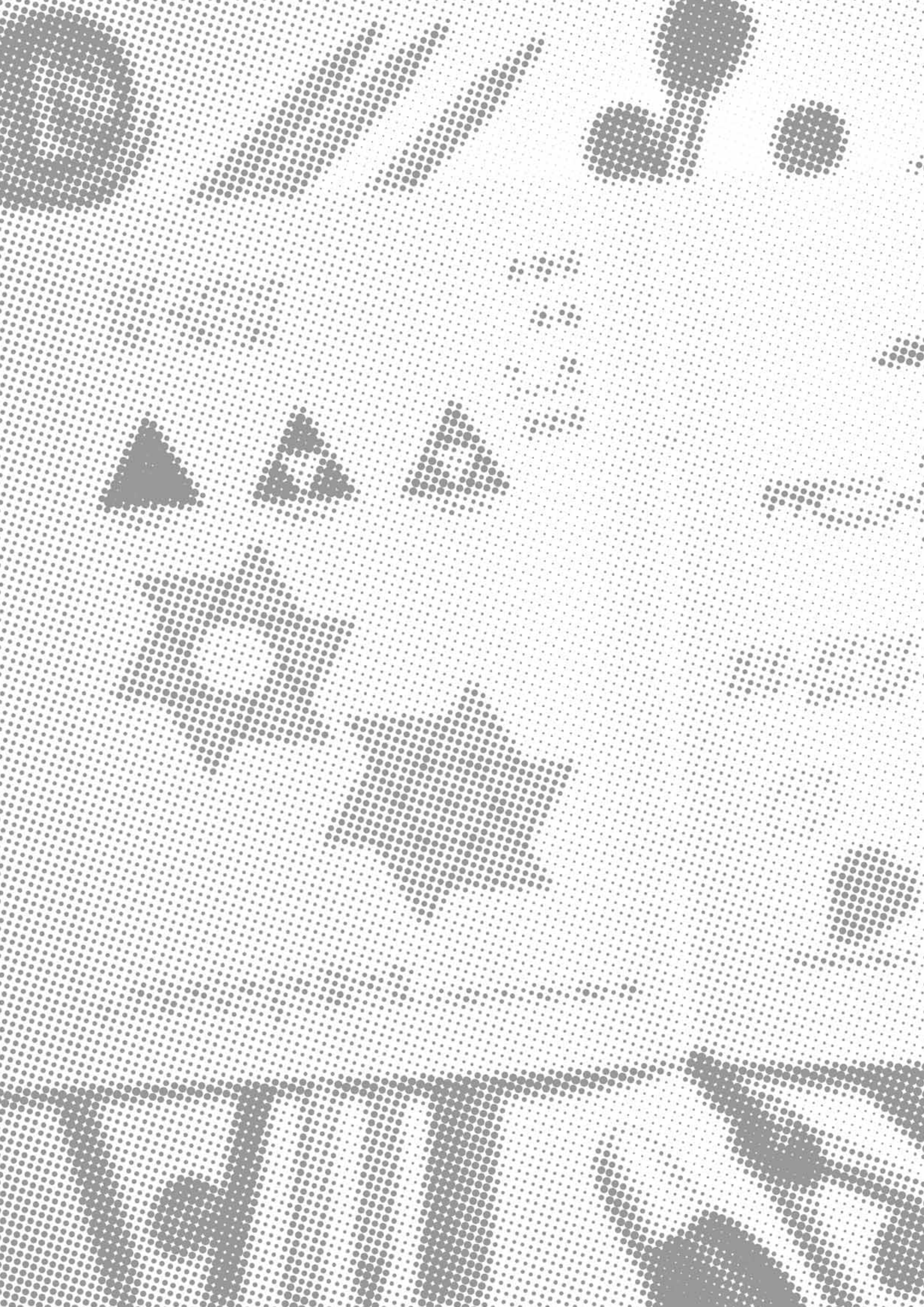
La Consejería de Educación quiere facilitar el trabajo de los profesores de esta optativa poniendo a su disposición este libro en el que encontrarán problemas adaptados al curso y al interés de sus alumnos, con sus correspondientes soluciones, así como una metodología apropiada para resolverlos.

Este libro puede ser utilizado por el profesor o directamente por el estudiante. La colección de problemas que contiene se presenta separada en los cuatro bloques en los que se organizan los contenidos del currículo de Matemáticas para facilitar el acceso a los distintos tipos de problemas, de acuerdo con la necesidad del usuario, ya sea éste el profesor o el alumno.

La resolución de los problemas que se plantean, en algún caso de gran dificultad, no requieren una ampliación de los contenidos de tercer curso de ESO, pero sí que el alumno movilice sus conocimientos, recursos y estrategias de resolución de problemas de manera más elaborada y compleja de los que se exige con carácter general.

Y para cerrar esta líneas de presentación, deseo expresar mi agradecimiento a los autores: profesores de la Asociación Matemática "Concurso de Primavera", vinculada a la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, que durante los últimos quince años vienen convocando este certamen, abierto a todos los alumnos de la Comunidad de Madrid y con el que se pretende estimular y motivar a una gran mayoría de estudiantes haciéndoles ver que es posible disfrutar pensando, haciendo y estudiando matemáticas.

Mª. José García-Patrón Alcázar
Directora General de Educación Secundaria y Enseñanzas Profesionales



Presentación de los autores

A modo de presentación de un libro de problemas para la asignatura de Ampliación de Matemáticas en 3º de ESO.

Aunque ya los aperitivos, los ejercicios, previenen nuestras papilas gustativas, son los problemas los platos principales de una buena mesa matemática. Pero no por ello despreciemos por rutinarios o poco elaborados los primeros. Una sociedad avanza a partir de las grandes ideas de unos pocos, pero el progreso se hace real, cuando esas ideas llegan a ser asimiladas (rutinarias) para otros muchos. No pretendamos que nuestros buenos cocineros aprendan degustando platos exquisitos, sin haber pasado por ir cogiendo mano a partir de arroces y pastas.

En fin, lo que aquí se presenta es una ampliación del libro de cocina matemática de 3º de ESO, que no explicita totalmente los ingredientes ni su proporción, aunque haga referencia al texto básico y a su manual de uso. Serán por tanto, el análisis, la analogía, la generalización, ..., los condimentos secretos de estos guisos, y por supuesto el buen hacer y el cariño que ponga el cocinero. Y no nos olvidemos de ir comprobando el resultado, metiendo de vez en cuando la cuchara en el caldo para controlar su sabor o hincando el tenedor en la carne (pescado, o garbanzo – que ninguna práctica alimentaria queda aquí excluida) para tantear su textura.

¡La mesa está servida! ¡Están invitados a ella!

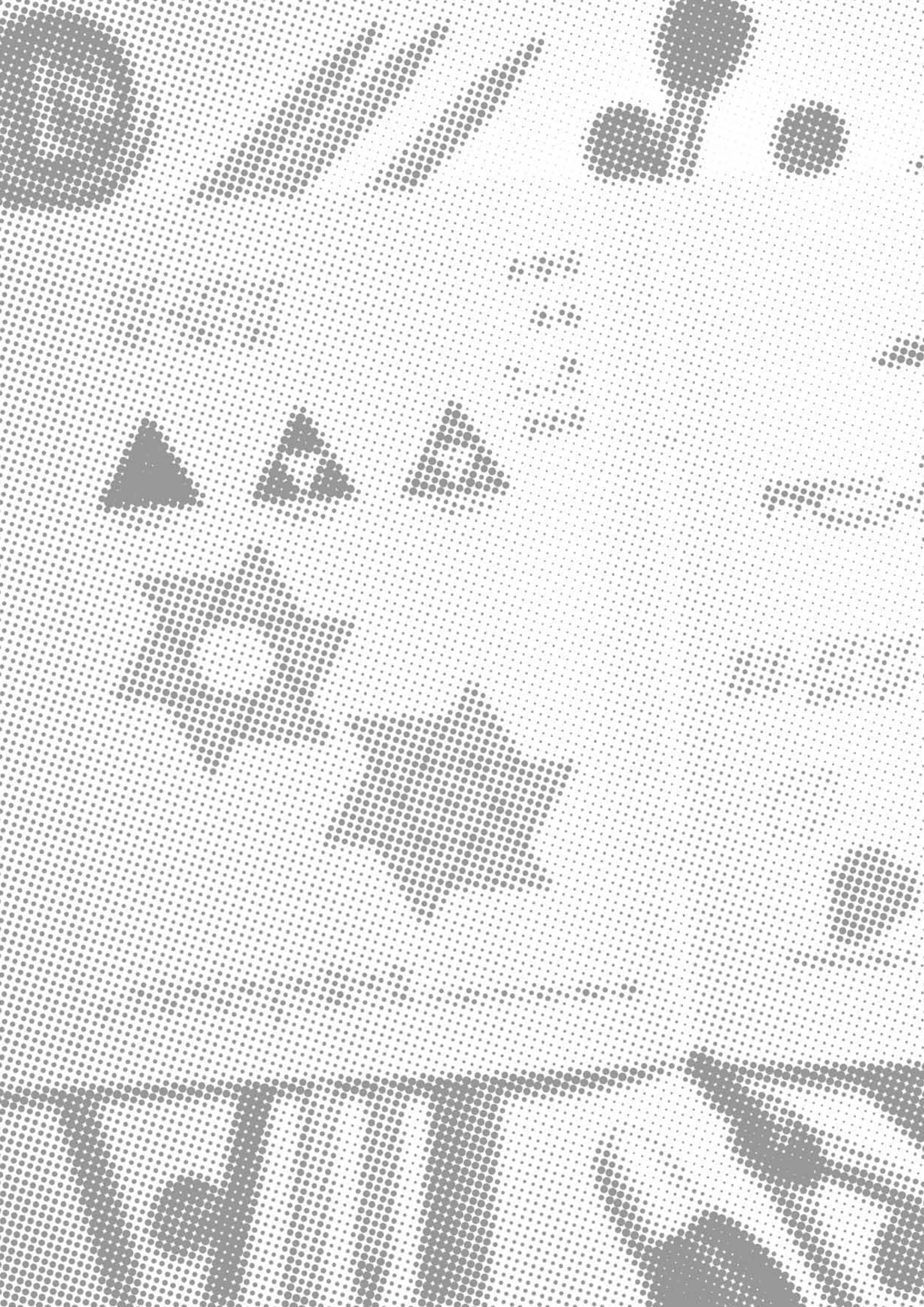
Sobre los chef del libro:

Son los ocho autores miembros de la Asociación Matemática Concurso de Primavera. Dicha asociación está vertebrada y tiene por origen el anual Concurso de Primavera de Problemas de Matemáticas de la Comunidad de Madrid, que celebrará en 2011 su decimoquinta edición. Su finalidad es potenciar el gusto y la afición por las matemáticas entre nuestros escolares no universitarios, desde 5º de Primaria hasta 2º de Bachillerato, aprovechando a su vez la dedicación y entusiasmo de tantos profesores de Matemáticas, que no se contentan ni presumen de ser los malos de las evaluaciones, sino que pretenden mejorar los resultados y la forma de impartir sus clases, recordando, como Euclides al rey Ptolomeo I, que no hay un atajo para que los reyes aprendan las matemáticas, que todos los caminos del aprendizaje hay que recorrerlos con esfuerzo y perseverancia, si bien (aquí abandonamos a Euclides) está en mano de los profesores hacer que el viaje sea más cómodo y entretenido.

Los ocho autores son consumados escritores de libros de recetas (14 libros de enunciados y soluciones de problemas del Concurso de Primavera y de otros van por delante) y proponen un menú a elegir de tres platos principales (Aritmética y Álgebra, Geometría, y Probabilidad y Estadística) y postre (Pijamas del departamento) para degustar durante todo un curso.

En las variaciones que introduzcan sus lectores estará el gusto.

Los autores



Bloque I. Aritmética y Álgebra

Bloque I. Aritmética y Álgebra

Introducción

Este bloque está dividido en los siguientes epígrafes:

ARI 1. Divisibilidad.
ARI 2. Fracciones y porcentajes.
ARI 3. Potencias y raíces.
ARI 4. Proporcionalidad.
ARI 5. Tiempo, distancia y velocidad.

En muchas ocasiones, nuestros alumnos identifican exclusivamente la aritmética con las operaciones entre números, olvidándose de entender qué son esos números. Comprender con claridad qué es un porcentaje nos abre las puertas para resolver muchísimos problemas en los que intervienen tantos por ciento. De igual manera, lo primero y fundamental es entender qué significa ser divisible entre, por ejemplo, 4 y una vez conseguido esto, deberemos abordar el segundo paso: aprender el criterio de divisibilidad por 4.

Para resolver los problemas de este bloque es necesario conocer con soltura algunos conceptos básicos de la aritmética como pueden ser: múltiplo, divisor, ser divisible, resto, fracción, porcentaje, potencia, raíz, proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa. Para los problemas relacionados con el tiempo, la distancia y la velocidad, es necesario conocer la fórmula que los relaciona y poco más.

El arma fundamental para atacar esta colección de problemas es, ya lo hemos dicho, tener un buen conocimiento de los conceptos manejados y además saber operar dentro de los conjuntos numéricos conocidos y resolver ecuaciones de 1er y 2º grado y sistemas de ecuaciones.

Para terminar con esta breve introducción, nos gustaría animar a los docentes a que, a su vez, animen a sus estudiantes a que resuelvan los problemas sin usar ecuaciones, siempre que sea posible. ¡No todos los problemas se resuelven mediante ecuaciones! Es muy interesante que el alumno emplee técnicas de tanteo y aproximación para resolver problemas. El tanteo (prueba y error) requiere haber entendido cabalmente el problema que se está estudiando y permite al alumno usar su imaginación a la hora de resolverlo. En algunos problemas damos pistas para llegar a la solución por caminos diferentes a los usuales.

Bloque I . Enunciados

ARI 1. Divisibilidad

1. Un auditorio tiene 26 filas y 24 butacas en cada una. Todas las butacas están numeradas empezando en la primera fila. ¿En qué fila se encuentra la butaca 371?

2. En una clase de Matemáticas se formaron grupos de cuatro y quedaron 2 estudiantes libres. Luego se formaron grupos de 5 y quedó libre 1 estudiante. Si 15 de los estudiantes eran chicas y había más chicas que chicos, ¿cuántos chicos había en la clase?

3. En un papel hay escrito un número de cuatro cifras. Si borramos las dos últimas, el número queda así: 86??. Sabiendo que el número original era divisible por 3, 4 y 5, ¿cuál es el número que estaba escrito en el papel?

4. ¿Para cuántos enteros positivos n es verdadero que $\frac{n+17}{n-7}$ es un número entero positivo?

5. ¿Cuántos números, del 1 al 1001 son divisibles por 5 o por 9 pero no por ambos?

6. ¿Cuál es el cociente entre el mínimo común múltiplo de los 40 primeros enteros positivos y el mínimo común múltiplo de los 30 primeros?

7. ¿Cuál es el mayor resto posible cuando dividimos un número de dos cifras entre la suma de sus cifras?

8. En un colegio hay 1000 estudiantes y cada uno tiene una taquilla. Todos los años, a final de curso, montan un juego algo extraño: se colocan en orden alfabético, y el primero abre todas las taquillas. A continuación, el segundo las cierra de dos en dos; o sea, cierra la 2, 4, 6, etc. Luego el tercero acude a las taquillas números 3, 6, 9, 12, etc. y las abre si estaban cerradas y las cierra si estaban abiertas; a continuación el cuarto va a las taquillas 4, 8, 12, 16, etc. y hace lo mismo (las abre o las cierra según estén cerradas o abiertas) y así continúa el juego hasta que todos pasan por las taquillas. Al final, ¿cuál es el número de la última taquilla abierta?

9. Un punto reticular es un punto del plano con coordenadas enteras. ¿Cuántos puntos reticulares de la recta $3x + 4y = 59$ hay en el primer cuadrante?

10. Antonio y Beatriz empiezan a trabajar el mismo día. El horario de Antonio consiste en 3 días de trabajo y 1 de descanso, mientras que Beatriz trabaja 7 días seguidos y luego descansa 3 días seguidos. En los 1.000 primeros días de trabajo, ¿cuántos días coinciden en el descanso?

11. ¿Cuántos años del siglo XXI verificarán la propiedad de que dividiendo el número del año por 2, 3, 5 y 7 obtengamos siempre de resto 1?

12. El número de gatos que viven en Gatolandia es un número de 6 cifras, cuadrado perfecto y cubo perfecto. Cuando se mueran 6 de esos gatos, el número de gatos vivos será un número primo. ¿Cuántos gatos hay en Gatolandia?

13. Mustafá compró una gran alfombra. El vendedor midió la alfombra con una regla que supuestamente medía un metro. Como resultó de 30 metros de largo por 20 metros de ancho, le cobró 120000 rupias. Cuando Mustafá llegó a su casa midió nuevamente la alfombra y se dio cuenta que el vendedor le había cobrado 9408 rupias de más. ¿Cuántos centímetros mide la regla que usó el vendedor?

14. Joaquín y su amigo Andrés van todos los días a clase en el autobús de la línea 62. Andrés paga siempre los billetes.

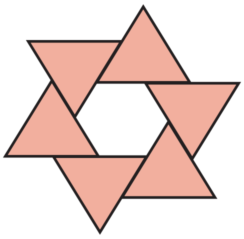
Cada billete tiene impreso un número de 5 dígitos. Un día, Andrés observa que los números de sus billetes –el suyo y el de Joaquín– además de consecutivos, son tales que la suma de los diez dígitos es precisamente 62.

Joaquín le pregunta a Andrés si la suma de los dígitos de alguno de los billetes es 35 y, al saber la respuesta, puede decir correctamente el número de cada billete.

¿Cuáles eran esos números?

ARI 2. Fracciones y porcentajes

1. El lado de cada uno de los triángulos equiláteros de la figura es el doble del lado del hexágono regular del centro. ¿Qué fracción del área total de los seis triángulos representa el área del hexágono?



2. Alicia ahorra cada semana los $\frac{3}{4}$ de su paga. Si consigue ahorrar 312 euros al año, ¿cuál es la paga semanal de Alicia?

3. Si n es un entero y $\frac{n}{24}$ está entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{4}$, ¿cuál es el valor de n?

4. ¿Cuándo es un número entero el siguiente producto?

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

5. Dos jarras de 600 mililitros cada una contienen zumo de naranja. Una está llena la tercera parte y la otra los dos quintos. Añadimos agua a cada una hasta llenarlas completamente y, posteriormente, las vaciamos en una jarra grande. ¿Qué fracción del líquido de la jarra grande es zumo de naranja?

6. Juan utiliza parte del dinero que lleva para comprar varios CDs, todos a igual precio. Si con un quinto del dinero que tenía ha pagado un tercio del total de los CDs que compró, ¿qué fracción del dinero que llevaba le quedará después de pagar todos los CDs?

7. ¡El 80 % de los estudiantes de este centro está a favor de que haya exámenes no avisados!, proclamó el Jefe de Estudios con satisfacción pero olvidando conscientemente que al 80 % de los estudiantes del centro no se les había preguntado nada. ¿Qué porcentaje de los estudiantes del centro le habían dicho al Jefe de Estudios que estaban a favor de los exámenes no avisados?

8. Si la base de un rectángulo aumenta un 15% y su altura un 20%, ¿en qué porcentaje aumenta su área?

9. En una clase aprobó el 66% de los alumnos y en otra, en la que había el doble, aprobó solamente el 57%. ¿Cuál es el porcentaje de aprobados entre las dos clases?

10. En una epidemia de gripe en Madrid, hace tres días, tenía gripe el 10% de la población y estaba sana el 90% restante. En los tres últimos días, el 10% de los enfermos se curó y el 10% de los sanos cogió la gripe. ¿Qué porcentaje de la población está ahora sana?

11. En una reunión, una de cada tres mujeres y dos de cada cinco hombres son fumadores, y hay doble número de hombres que de mujeres. ¿Cuál es la proporción de personas fumadoras?

12. Algunos de los animales que hay en Madrid están realmente locos. El 10% de los gatos se creen que son perros y el 10% de los perros se creen que son gatos. Todos los demás, perros y gatos, son perfectamente normales. Un día hicimos un test a todos los perros y gatos de Madrid y resultó que el 20% del total se creían que eran gatos. ¿Qué porcentaje del total de gatos y perros de Madrid son realmente gatos?

13. En la fiesta del vals, $\frac{1}{3}$ de los chicos está bailando con $\frac{2}{5}$ de las chicas. ¿Qué fracción de personas no está bailando?

14. El parlamento de un país cuenta con 2000 diputados. El 12,121212…% de los diputados asistentes a una reunión son rubios y el 23,423423423…% fuman. ¿Cuántos diputados faltaron a esa reunión?

ARI 3. Potencias y raíces

1. Si desarrollamos el número $4^5 \cdot 5^{13}$, ¿cuántas cifras tendrá?

2. Un viaje espacial sale de la Tierra hacia un planeta situado a 2^{20} km. Después de hacer un cuarto del trayecto, la nave pierde el contacto por radio con la Tierra, recuperándolo cuando está a 2^{19} km de ella. ¿Cuántos km recorrió la nave sin contacto por radio?

3. Si $8^{668} + 2^{2005} + 4^{1003} = 7 \cdot 16^x$, ¿cuánto vale x?

4. a) ¿Cuál es la cifra de las unidades de $3^{1001} \cdot 7^{1002} \cdot 13^{1003}$?

b) ¿Cuál es la penúltima cifra de 11^{48} ?

5. ¿Cuál es el mayor entero n para el que $n^{200} < 5^{300}$?

6. ¿Cuál es el valor de $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2005} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2005}$?

7. Si $x > y > 0$, expresa $\dfrac{x^y \cdot y^x}{y^y \cdot x^x}$ como una única potencia.

8. Calcula el valor de $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$.

9. ¿Cuántas parejas de números hay cuyo mínimo común múltiplo sea $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ y su máximo común divisor sea $2^2 \cdot 5$?

10. La familia Abolengo es muy tradicional. Hace muchísimos años Pepita Abolengo tuvo tres hijas a las que dio su apellido (la primera generación) y, desde entonces, todas las mujeres Abolengo tienen siempre tres hijas de apellido Abolengo. Si van ya por la séptima generación de mujeres Abolengo, ¿cuántas mujeres Abolengo, incluida Pepita, han existido?

11. Si $1^2 + 11^2 + 21^2 + \ldots + 91^2 = S$, ¿cuánto vale la suma $2^2 + 12^2 + 22^2 + \ldots + 92^2$ en función de S?

12. ¿Cuál es el primer natural n para el que $(0{,}2)^n < 10^{-6}$?

ARI 4. Proporcionalidad

1. Dos gatos, *Mu* y *Mi*, cazaron entre los dos 60 ratones. Si *Mu* caza tres ratones por cada dos ratones que caza *Mi*, ¿cuántos ratones cazó *Mi*?

2. Un terreno está representado sobre un plano con una escala 1:2500 por un rectángulo de 64 mm de longitud y 48 mm de anchura. ¿Cuál es el área real del terreno?

3. Un albañil necesita 10000 ladrillos para cierto trabajo. Por su larga experiencia sabe que no más del 7% de los que le traigan se le van a romper. Si los ladrillos vienen en cajas de 100, ¿cuál es el mínimo número de cajas que debe pedir para estar seguro de acabar el trabajo?

4. Tres personas se han repartido una cantidad de dinero directamente proporcional a los números 6, 3 y 2. Si la que menos recibe, ha recibido 300 euros, ¿qué cantidad total se repartió?

5. En cierta competición, se entregan premios en metálico a los clasificados en los tres primeros lugares. La cantidad total a entregar se divide en dos partes que está en la proporción 5:4, donde la parte mayor corresponde al primero y la otra se vuelve a dividir en dos partes en la misma razón 5:4, siendo ahora la mayor para el segundo y la pequeña para el tercero. Si el tercer clasificado recibe 290 euros menos que el primero, ¿cuántos euros recibió el segundo?

6. Una lámina de cristal absorbe el 20 % de la luz roja que le llega, es decir, deja pasar el 80 %. ¿Cuántas láminas de cristal debo colocar como mínimo, una encima de otra, para que pase como mucho la mitad de la luz roja que les llegue?

7. En un supermercado se vende detergente en tres tipos de envases: pequeño (P), mediano (M) y grande (G). El envase mediano cuesta un 50% más que el pequeño y contiene 20% menos detergente que el grande. El envase grande contiene doble detergente que el pequeño y cuesta un 30% más que el mediano. Ordena los tres tipos de envase, del más rentable al menos rentable.

8. ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a las 4:20?

9. Una fotocopiadora tarda una hora en sacar m fotocopias y otra, para sacar el mismo número de fotocopias, tarda una hora y media. ¿Cuántos minutos tardarán las dos juntas en sacar ese número m de fotocopias?

10. Trabajando juntas, Ana y Cati pintan un mural en 10 horas; Ana y Gloria lo harían en 12 horas y Cati y Gloria en 15 horas. Si se pusieran las tres juntas a pintar, ¿en cuántas horas acabarían el mural?

11. En una reunión, la tercera parte de los asistentes tiene ojos verdes, el 80% cabello oscuro y el 20% ojos verdes y cabello oscuro. ¿Cuál es la proporción de los que no tienen ojos verdes ni cabello oscuro?

12. El jardín de Antonio es doble que el de Benito y triple que el de Carlos. Los tres empiezan a la vez a cortar la hierba, cada uno en su jardín. Carlos va la mitad de rápido que Benito y la tercera parte de rápido que Antonio.

¿Quién acabó el primero?

13. La torre Eiffel tiene 300 m de altura, está construida enteramente de hierro y pesa exactamente 8000 toneladas. Se quiere construir un modelo reducido de la torre, también de hierro y que pese 1 kg. ¿Cuál debe ser su altura?

ARI 5. Tiempo, distancia y velocidad

Algunos de los problemas de este tipo pueden resolverse generalizando juiciosamente el concepto de velocidad a cualquier magnitud que varíe con el tiempo y aplicando los mismos procedimientos empleados en la resolución de problemas de movimiento. Además ofrecen una oportunidad más de relacionar la aritmética con la geometría y el álgebra, contribuyendo así a percibir la unidad de la matemática.

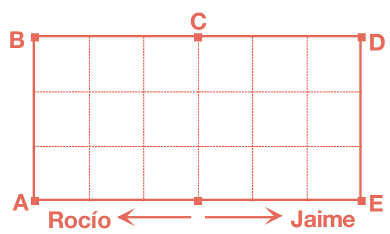
1. **Un grifo pierde una gota de agua cada segundo. Si 600 gotas de agua llenan una vasija de 100 mililitros, ¿cuántos litros de agua se pierden en 300 días?**

2. **Un ciclista va de excursión y cuando lleva recorrido un tercio del camino, para a comer un poco. Si en ese momento le faltan aún 11 km para llegar a la mitad del camino, ¿cuántos kilómetros tiene la excursión completa?**

3. **Un coche sale de un punto P a las 12 de la mañana a 90 km/hora. ¿A qué hora dará alcance a un ciclista que salió de P a las 7 de la mañana a 15 km/hora?**

4. **Para hacer un viaje de 30000 km utilizamos las cinco ruedas de un coche. (A veces cambiábamos una por la de repuesto). Si cada una de las cinco recorrió los mismos kilómetros, ¿cuántos km hizo cada una?**

5. **Rocío siempre camina el doble de rápido que Jaime. Si parten del punto señalado en sentido contrario, y van dando vueltas a la parcela rectangular de la figura, de 18 cuadrados de área, ¿cuál, de los puntos indicados, será el más próximo cuando se encuentren por primera vez?**



6. **En cierto momento de un viaje, el conductor observa que el cuentakilómetros marca el número capicúa 35953 km y 75 minutos después el cuentakilómetros marca el capicúa siguiente. ¿Cuál es la velocidad media, en km/hora, del coche durante esos 75 minutos?**

7. ***Rayo* corre a velocidad constante, y *Centella* m veces más rápido que *Rayo* (m es un número mayor que 1). Si *Centella* le da una ventaja de h metros a *Rayo*, ¿qué distancia, en metros, debe recorrer *Centella* para alcanzar a *Rayo*?**

8. En Matematilandia hay un sistema muy curioso de limitación de velocidad: A 1 km del centro de la ciudad hay una señal de limitación de velocidad a 120 km/hora; a medio kilómetro, otra limitación a 60 km/hora, a $\frac{1}{3}$ de km, la limitación de velocidad llega a 40 km/hora; a $\frac{1}{4}$ km, la señal es de 30 km/hora, a $\frac{1}{5}$ km de 24 km/hora y, finalmente, a $\frac{1}{6}$ de km del centro de la ciudad, hay una señal de limitación de velocidad a 20 km/hora. Si viajas siempre a la velocidad límite, ¿qué tiempo tardas en llegar desde la señal de 120 km/hora al centro de la ciudad?

9. Un triángulo equilátero está originariamente pintado de negro. Cada minuto cambia, de forma que la cuarta parte de cada triángulo negro se vuelve blanca.
Al cabo de 5 minutos, ¿qué parte del triángulo original sigue estando de negro?

10. Dos ciclistas marchan a velocidad uniforme. El más lento tarda 15 segundos más que el más rápido en recorrer 4 km y recorre 1 km menos que el otro en 15 minutos. ¿Cuál es la velocidad, en km/hora, del ciclista más rápido?

11. Luis y Esteban tuvieron que ir, cada uno en su coche, desde Madrid al pueblo de Luis.

Ambos viajaron a velocidad constante. Esteban salió a las 7 de la mañana y llegó a la una de la tarde y Luis salió una hora más tarde que Esteban pero llegó hora y media antes que éste. ¿A qué hora alcanzó Luis a Esteban?

12. En el pueblo de Luis solo tienen dos caminos. Uno de ellos tiene un tramo en muy mal estado y el otro es intransitable en una longitud triple que la anterior, siendo ambos tramos uniformemente malos. El alcalde decide que eso no puede seguir así y, para ello, dispone de una brigadilla de mantenimiento (con la virtud de que todos los hombres tienen el mismo rendimiento).

Durante día y medio la brigadilla al completo trabaja en el tramo largo. El resto del segundo día se reparten mitad por mitad entre los dos tramos y finalizan el más largo.

Por fin, el tercer día, 2 hombres trabajando durante toda la jornada terminan el tramo corto. ¿Cuántos hombres componen la brigadilla?

Bloque I. Soluciones

ARI 1. Divisibilidad

1. **Un auditorio tiene 26 filas y 24 butacas en cada una. Todas las butacas están numeradas empezando en la primera fila. ¿En qué fila se encuentra la butaca 371?**

Al dividir 371 entre 24, obtenemos $371 = 24 \cdot 15 + 11$, (cociente 15 y resto 11), es decir, que se completan 15 filas y se ocupan 11 butacas de la fila 16. La butaca número 371 se encuentra entonces en la fila 16.

2. **En una clase de Matemáticas se formaron grupos de cuatro y quedaron 2 estudiantes libres. Luego se formaron grupos de 5 y quedó libre 1 estudiante. Si 15 de los estudiantes eran chicas y había más chicas que chicos, ¿cuántos chicos había en la clase?**

El número de estudiantes de la clase es un número entero, que da resto 2 al dividirlo entre 4, y resto 1 al dividirlo entre 5.

Los múltiplos de 5 terminan en 0 o en 5, así que los números que dan resto 1 al dividirlos entre 5 terminan en 1 o en 6. Por otra parte, si el resto de la división de un número entre 4 es 2, ese número debe ser par. Concluimos que el número de estudiantes de la clase termina en 6.

Como en la clase hay 15 chicas, y hay menos chicos que chicas, en la clase hay menos de 30 estudiantes y más de 15.

Los únicos valores posibles para el número de estudiantes son entonces 16 y 26. Pero 16 es un múltiplo de 4, así que hay 26 estudiantes, entre los cuales 15 son chicas.

El número de chicos de la clase es 11.

3. **En un papel hay escrito un número de cuatro cifras. Si borramos las dos últimas, el número queda así: 86??. Sabiendo que el número original era divisible por 3, 4 y 5, ¿cuál es el número que estaba escrito en el papel?**

Nuestro número es 86*ab*.

Como es divisible entre 5, termina en 0 o en 5. Pero al ser múltiplo de 4 es par y $b = 0$.

Como es divisible entre 4, el número *a* 0 también es divisible entre 4, y por tanto *a* debe ser par.

Como 86*a*0 es divisible entre 3, $8 + 6 + a + 0 = 14 + a$ es múltiplo de 3, con lo que *a* sólo puede ser el par 4.

El número original es 8640.

4. **¿Para cuántos enteros positivos n es verdadero que $\dfrac{n+17}{n-7}$ es un número entero positivo?**

Tenemos que encontrar los valores de n para los que $n - 7$ es un divisor positivo de $n + 17$.

Expresando $n + 17$ como $(n - 7) + 7 + 17 = (n - 7) + 24$, resulta que $\dfrac{n+17}{n-7} = \dfrac{(n-7)+24}{n-7} = 1 + \dfrac{24}{n-7}$

El problema se reduce entonces a encontrar los divisores positivos de $24 = 2^3 \cdot 3$. Hay exactamente 8, que nos proporcionan los siguientes valores de n:

$n - 7 = 1$, y $n = 8$; $n - 7 = 2$, y $n = 9$; $n - 7 = 4$, y $n = 11$; $n - 7 = 8$, y $n = 15$; $n - 7 = 3$, y $n = 10$; $n - 7 = 6$, y $n = 13$; $n - 7 = 12$, y $n = 19$; $n - 7 = 24$, y $n = 31$.

Bloque I

Bloque II

Bloque III

Bloque IV

5. **¿Cuántos números, del 1 al 1001 son divisibles por 5 o por 9 pero no por ambos?**

Como $1000 = 200 \cdot 5$, entre 1 y 1001 hay 200 múltiplos de 5.

Como $999 = 9 \cdot 111$, entre 1 y 1001 hay 111 múltiplos de 9.

Los múltiplos comunes a 5 y 9 son los múltiplos de su mínimo común múltiplo, que es 45. Estos forman parte tanto de los 200 múltiplos de 5 como los de los 111 múltiplos de 9.

La división de 1001 entre 45 da cociente 22 y resto 11, así que habrá 22 múltiplos de 45 entre los 1001 primeros enteros positivos.

Así, son múltiplos de 5 pero no de 9, $200 - 22 = 178$ números, y son múltiplos de 9 pero no de 5, $111 - 22 = 89$ números.

En total habrá $178 + 89 = 267$ números divisibles por 5 o por 9, pero no por ambos.

6. **¿Cuál es el cociente entre el mínimo común múltiplo de los 40 primeros enteros positivos y el mínimo común múltiplo de los 30 primeros?**

Necesitaremos ver qué factores primos figuran entre los 40 primeros números sin aparecer entre los 30 primeros. Estos son el 31 y el 37.

Además, $32 = 2^5$, mientras que la mayor potencia de 2 que aparece en los 30 primeros números es 4 ($16 = 2^4$).

Por lo tanto,

$$\frac{mcm\ (1,2,.....,39,40)}{mcm\ (1,2,.....,29,30)} = 2 \cdot 31 \cdot 37 = 2294$$

7. **¿Cuál es el mayor resto posible cuando dividimos un número de dos cifras entre la suma de sus cifras?**

El número de dos cifras es *ab*, y la suma de sus cifras, $a + b$ vale a lo sumo 18. Como el resto es siempre menor que el divisor, en ningún caso puede ser mayor que 17.

Si $a + b = 18$, el número sería 99, y el resto de la división de 99 entre 18 es 9, así que 17 no se obtendrá nunca como resto.

Obtenemos divisor 17 con los números 89 y 98. Los restos que obtenemos al dividir cada uno de estos números entre 17 son respectivamente 4 y 13, así que tampoco podremos obtener 16 como resto de la división de un número de 2 cifras entre la suma de sus dígitos.

La suma de los dígitos es 16 en los números 88, 79 y 97. Resulta que $79 = 16 \cdot 4 + 15$, así que el mayor resto posible es 15.

8. **En un colegio hay 1000 estudiantes y cada uno tiene una taquilla. Todos los años, a final de curso, montan un juego algo extraño: se colocan en orden alfabético, y el primero abre todas las taquillas. A continuación, el segundo las cierra de dos en dos; o sea, cierra la 2, 4, 6, etc. Luego el tercero acude a las taquillas números 3, 6, 9, 12, etc. y las abre si estaban cerradas y las cierra si estaban abiertas; a continuación el cuarto va a las taquillas 4, 8, 12, 16, etc. y hace lo mismo (las abre o las cierra según estén cerradas o abiertas) y así continúa el juego hasta que todos pasan por las taquillas. Al final, ¿cuál es el número de la última taquilla abierta?**

Pensemos en una taquilla cualquiera, con el número n. Los alumnos que se dirigirán a ella son los que ocupan un lugar en la lista que sea un divisor de n. Como inicialmente estaba cerrada, al terminar el juego quedará abierta si se han dirigido a ella un número impar de estudiantes, es decir, si n tiene un número impar de divisores; si el número de divisores de n es par, al terminar el juego la taquilla estará cerrada.

Los únicos números con un número impar de divisores son los cuadrados perfectos. En efecto, si a es un divisor de n, también lo será el cociente $\frac{n}{a}$, con lo que los divisores de n pueden emparejarse, salvo que se cumpla que $a = \frac{n}{a}$.

En ese caso, $n = a^2$ es un cuadrado perfecto. Así, las taquillas que quedarán abiertas serán las correspondientes a cuadrados perfectos, y el mayor cuadrado perfecto más pequeño que 1000 es $31^2 = 961$. Este es el número de la última taquilla abierta.

9. **Un punto reticular es un punto del plano con coordenadas enteras. ¿Cuántos puntos reticulares de la recta $3x + 4y = 59$ hay en el primer cuadrante?**

Buscamos valores x, y que sean enteros positivos y soluciones de la ecuación $3x + 4y = 59$.

Despejando, tenemos $4y = 59 - 3x$, múltiplo de 4. Para $x = 1$, $59 - 3 = 56 = 4 \cdot 14$, y así el par (1,14) es solución.

Restando ahora las igualdades $\begin{cases} 3x + 4y = 59 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 14 = 59 \end{cases}$, obtenemos $3 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 14) = 0$, es decir, $3 \cdot (x - 1) = 4 \cdot (14 - y)$, que es un múltiplo de 3. Todo se reduce ahora a encontrar valores positivos de y para los que $4 \cdot (14 - y)$ sea múltiplo de 3.

Como 3 y 4 son primos entre sí, para que $4 \cdot (14 - y)$ sea múltiplo de 3 es necesario que lo sea $14 - y$.

Las posibilidades son:

$14 - y = 0$, luego $y = 14$, $x = 1$, y obtenemos la solución conocida (1,14).

$14 - y = 3$, luego $y = 11$, $x = 5$, y el par (5,11) es solución.

$14 - y = 6$, luego $y = 8$, $x = 9$ y el par (9, 8) es solución.

$14 - y = 9$, luego $y = 5$, $x = 13$ y el par (13,5) es solución.

$14 - y = 12$, luego $y = 2$, $x = 17$, y el par (17,2) es solución.

Si $14 - y$ es un múltiplo de 3 mayor o igual que 15, y sería negativo.

Por lo tanto, hay exactamente cinco puntos reticulares de la recta en el primer cuadrante.

10. **Antonio y Beatriz empiezan a trabajar el mismo día. El horario de Antonio consiste en 3 días de trabajo y 1 de descanso, mientras que Beatriz trabaja 7 días seguidos y luego descansa 3 días seguidos. En los 1.000 primeros días de trabajo, ¿cuántos días coinciden en el descanso?**

Supongamos numerados los días desde el momento en que Antonio y Beatriz empiezan a trabajar.

Antonio descansa los días 4, 8, 12, 16….., es decir, en los múltiplos de 4.

Beatriz descansa los días 8, 9, 10; 18, 19, 20; 28, 29, 30…..

Se trata de contar cuántos múltiplos de 4 hay en la sucesión de días de descanso de Beatriz.

En esta sucesión se van repitiendo ternas de enteros consecutivos, dos pares y uno impar. Ningún múltiplo de 4 es impar, luego Antonio y Beatriz no coincidirán nunca en estos días de descanso.

Los dos pares que aparecen en cada una de las ternas de descanso de Beatriz son pares consecutivos, luego uno exactamente de ellos será un múltiplo de 4. Así pues, el problema se reduce ahora a contar cuántas de estas ternas de enteros consecutivos hay entre los 1000 primeros enteros positivos. Como corresponde una terna a cada decena, habrá tantas como decenas, es decir, 1000 : 10 = 100.

Antonio y Beatriz coinciden en 100 días de descanso.

11. **¿Cuántos años del siglo XXI verificarán la propiedad de que dividiendo el número del año por 2, 3, 5 y 7 obtengamos siempre de resto 1?**

Los años del siglo XXI son números de cuatro cifras del tipo 20**. Si n es uno de estos números, da resto 1 en la división entre 2, 3, 5 y 7, es decir, al restarle 1, obtenemos el número $n - 1$, que será múltiplo de 2, 3, 5 y 7. Cualquier múltiplo común a 2, 3, 5 y 7 será múltiplo de su mínimo común múltiplo, que es $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Basta ahora comprobar cuántos múltiplos de 210 corresponden al siglo XXI, es decir, están comprendidos entre 2000 y 2100. Pero $210 \cdot 9 = 1890$ y $210 \cdot 10 = 2100$: ninguno de los múltiplos de 210 está en el intervalo indicado, y por lo tanto ningún año del siglo XXI da resto 1 en la división entre 2, 3, 5 y 7.

12. **El número de gatos que viven en Gatolandia es un número de 6 cifras, cuadrado perfecto y cubo perfecto. Cuando se mueran 6 de esos gatos, el número de gatos vivos será un número primo. ¿Cuántos gatos hay en Gatolandia?**

Llamemos n al número de gatos de Gatolandia. Al ser un cuadrado perfecto y un cubo perfecto, n será la potencia sexta de algún número entero, es decir $n = a^6$ para algún entero a, y además es un número de seis cifras. Observamos que a será menor que 10, ya que 10^6 tiene 7 cifras, y mayor que 6 ya que 6^6 tiene solamente 5.

Así pues, n será 7^6, 8^6 ó 9^6.

Al morir seis gatos quedan $a^6 - 6$ habitantes en Gatolandia, y éste es un número primo. Pero $9^6 - 6$ es múltiplo de 3, y $8^6 - 6$ es par (múltiplo de 2).

Por lo tanto, el número de gatos de Gatolandia sólo puede ser $7^6 = 117649$, si este número menos 6 es primo (¡y lo es, palabra de gato!) como puedes confirmar en http://www.prime-numbers.org/.

13. **Mustafá compró una gran alfombra. El vendedor midió la alfombra con una regla que supuestamente medía un metro. Como resultó de 30 metros de largo por 20 metros de ancho, le cobró 120000 rupias. Cuando Mustafá llegó a su casa midió nuevamente la alfombra y se dio cuenta que el vendedor le había cobrado 9408 rupias de más. ¿Cuántos centímetros mide la regla que usó el vendedor?**

En teoría se vendieron $20 \cdot 30 = 600\ m^2$, luego el precio del metro cuadrado es $\frac{120000}{600} = 200$ rupias. Si x es la medida de la regla que usó el vendedor, en realidad la alfombra mide $30x$ de largo y $20x$ de ancho. Como le cobró 9408 rupias de más, entonces $(600 - 600x^2) \cdot 200 = 9408$ de donde $120000 - 120000x^2 = 9408$,

y $x^2 = \frac{120000 - 9408}{120000} = \frac{110592}{120000} = \frac{9216}{10000}$

Luego $x = \sqrt{\frac{9216}{10000}} = \frac{96}{100}$, y la regla del vendedor mide 96 cm.

14. **Joaquín y su amigo Andrés van todos los días a clase en el autobús de la línea 62. Andrés paga siempre los billetes.**

Cada billete tiene impreso un número de 5 dígitos. Un día, Andrés observa que los números de sus billetes –el suyo y el de Joaquín– además de consecutivos, son tales que la suma de los diez dígitos es precisamente 62.

Joaquín le pregunta a Andrés si la suma de los dígitos de alguno de los billetes es 35 y, al saber la respuesta, puede decir correctamente el número de cada billete.

¿Cuáles eran esos números?

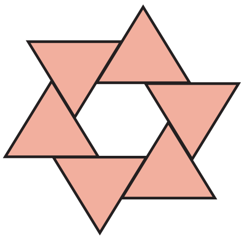
En principio si se trata de dos números consecutivos de cinco cifras parecería que las sumas de sus cifras deberían diferir en una unidad, pero por el enunciado esto no es así, puesto que las dos sumas deben a su vez sumar 62 (¡par!). Así que son seguidos pero no muy parecidos en escritura, es decir el pequeño acaba en 9 y el siguiente en 0, teniendo distintas al menos las cifras de las unidades y la de las decenas. Si los dos números fueran $abcd9$ y $abc(d+1)0$, la suma de los 10 dígitos sería
$2(a + b + c + d) + 1 + 9 + 0$, y así $(a + b + c + d) = 26$ y $(a + b + c + d + 9) = 35$. Entonces si la suma de las cifras de uno de ellos fuera 35, tendríamos bastantes números y no podríamos determinarlos. Por tanto la respuesta de Joaquín a si había uno con suma de cifras 35 fue “No”, así que aseguramos que uno de los números tiene dos nueves al final.

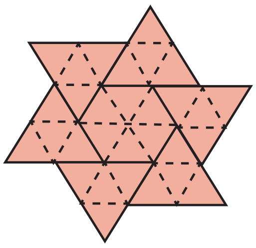
También hay que descartar la posibilidad de que sean $abc99$ y $ab(c+1)00$, pues la suma de las diez cifras sería impar. Luego añadimos un 9 más, y pensamos en los números $ab999$ y $a(b+1)000$ con $2(a + b) + 1 + 27 = 62$, teniéndose que $a + b = 17$, y debiendo ser $a = 9$ y $b = 8$. (La posibilidad de 89999 y 90000 está descartada por la paridad de la suma de las diez cifras).

Luego Andrés dedujo con la respuesta de Joaquín que los números eran 98999 y 99000.

ARI 2. Fracciones y porcentajes

1. **El lado de cada uno de los triángulos equiláteros de la figura es el doble del lado del hexágono regular del centro. ¿Qué fracción del área total de los seis triángulos representa el área del hexágono?**





En problemas de este tipo es muy útil intentar descomponer toda la figura completa en otras figuras más pequeñas e iguales entre sí. Por la forma de la figura, parece que debemos buscar triángulos equiláteros sin más que prolongar algunas líneas y unir algunos vértices. De esta manera vemos que cada triángulo grande contiene 4 triangulillos y que el hexágono interior contiene 6 triangulillos. Así pues los 6 triángulos tienen 24 triangulillos por sólo 6 del hexágono, lo que representa $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ del área.

2. **Alicia ahorra cada semana los $\frac{3}{4}$ de su paga. Si consigue ahorrar 312 euros al año, ¿cuál es la paga semanal de Alicia?**

312 euros correponden a los $\frac{3}{4}$ de su paga anual, por lo que 104 euros suponen $\frac{1}{4}$ de su paga anual. Como un año tiene 52 semanas, su paga semanal son 8 euros.

3. **Si n es un entero y $\frac{n}{24}$ está entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{4}$, ¿cuál es el valor de n?**

Debemos buscar fracciones equivalentes con denominador 24; de esta manera, asegurar que $\frac{n}{24}$ está entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{4}$, es lo mismo que afirmar que $\frac{n}{24}$ está entre $\frac{4}{24}$ y $\frac{6}{24}$, de donde se deduce que n debe ser 5 ya que es un entero.

4. **¿Cuándo es un número entero el siguiente producto?**

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Calculemos dicho producto:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2}$$

La expresión $\frac{n+1}{2}$ será un número entero cuando $n + 1$ sea par, es decir, cuando n sea impar.

5. **Dos jarras de 600 mililitros cada una contienen zumo de naranja. Una está llena la tercera parte y la otra los dos quintos. Añadimos agua a cada una hasta llenarlas completamente y, posteriormente, las vaciamos en una jarra grande. ¿Qué fracción del líquido de la jarra grande es zumo de naranja?**

En la primera jarra hay $\frac{1}{3}$ de 600 ml de zumo de naranja, es decir, 200 ml. En la segunda jarra hay $\frac{2}{5}$ de 600 ml de zumo de naranja, es decir 240 ml de zumo de naranja.
La proporción final es $\frac{200+240}{1200} = \frac{400}{1200} = \frac{11}{30}$.

Es importante recalcar que la proporción final no es la suma $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$.

6. **Juan utiliza parte del dinero que lleva para comprar varios CDs, todos a igual precio. Si con un quinto del dinero que tenía ha pagado un tercio del total de los CDs que compró, ¿qué fracción del dinero que llevaba le quedará después de pagar todos los CDs?**

Si con un quinto de su dinero compra un tercio de los CDs, entonces, todos los CDs (tres tercios) los podrá comprar con el triple del dinero, es decir con tres quintos. Así pues, después de comprarlos le quedan dos quintos de su dinero.

7. **¡El 80 % de los estudiantes de este centro está a favor de que haya exámenes no avisados!, proclamó el Jefe de Estudios con satisfacción pero olvidando conscientemente que al 80 % de los estudiantes del centro no se les había preguntado nada. ¿Qué porcentaje de los estudiantes del centro le habían dicho al Jefe de Estudios que estaban a favor de los exámenes no avisados?**

El Jefe de Estudios sólo consultó al 20% de los estudiantes y de éstos, el 80% estaba a favor de los exámenes sorpresa, es decir, el 20% del 80% del total, o lo que es lo mismo: $0{,}20 \cdot 0{,}80 = 0{,}16 = 16\%$ de los estudiantes del Centro.

8. **Si la base de un rectángulo aumenta un 15% y su altura un 20%, ¿en qué porcentaje aumenta su área?**

Llamando x e y a las dimensiones de la base y de la altura del rectángulo, las del nuevo rectángulo serán respectivamente $1{,}15x$ y $1{,}20y$. El área de este rectángulo mayor será, por tanto, $1{,}15x \cdot 1{,}20y = 1{,}38 \cdot xy$, lo que supone un aumento del 38% respecto del área del primer rectángulo.

9. **En una clase aprobó el 66% de los alumnos y en otra, en la que había el doble, aprobó solamente el 57%. ¿Cuál es el porcentaje de aprobados entre las dos clases?**

Si x y $2x$ son el número de alumnos de ambas clases, el número de aprobados fue

$\frac{66x}{100} + \frac{57 \cdot 2x}{100} = \frac{180x}{100} = \frac{9x}{5}$ y la proporción de aprobados $\frac{\frac{9x}{5}}{x + 2x} = \frac{3}{5}$, es decir, el 60%.

10. **En una epidemia de gripe en Madrid, hace tres días, tenía gripe el 10% de la población y estaba sana el 90% restante. En los tres últimos días, el 10% de los enfermos se curó y el 10% de los sanos cogió la gripe. ¿Qué porcentaje de la población está ahora sana?**

Trabajemos con 100 individuos, cosa que no afecta al resultado del problema y es más cómodo para muchos de los estudiantes. Hace tres días había 10 enfermos y 90 sanos. En los tres últimos días se curó 1 (el 10% de 10) y enfermaron 9 (el 10% de los sanos). Así pues ahora hay 1 + 81 = 82 sanos, que representará el 82%.

11. **En una reunión, una de cada tres mujeres y dos de cada cinco hombres son fumadores, y hay doble número de hombres que de mujeres. ¿Cuál es la proporción de personas fumadoras?**

Cuando nos tenemos que enfrentar a problemas de proporciones, una buena manera de atacarlos es trabajar con cantidades concretas. Eso sí, hay que elegir con tino estas cantidades. Podríamos suponer, por ejemplo, que las mujeres son 100 y los hombres 200 pero no es muy acertado ya que las mujeres fumadoras serían $33,\widehat{3}$. Como nos hablan de "una de cada tres" y de "dos de cada cinco", parece interesante tomar 15 (3 · 5) como referencia. Así, supongamos que las mujeres son 15 y los hombres, el doble, es decir 30. (También podríamos haber elegido, por ejemplo, 30 para las mujeres y 60 para los hombres). Por tanto, de las 15 mujeres, habrá 5 mujeres fumadoras (1 de cada 3) y de los 30 hombres, habrá 12 hombres fumadores (2 de cada 5). Ahora construimos la siguiente tabla con los datos:

	Mujeres	Hombres	Total
Fumadores	5	12	
No fumadores			
Total	15	30	

La completamos razonadamente y obtenemos que:

	Mujeres	Hombres	Total
Fumadores	5	12	17
No fumadores	10	18	28
Total	15	30	45

Es decir, hay 17 personas fumadoras de un total de 45.

(Si hubiéramos tomado 30 mujeres y 60 hombres, nos habría salido que fuman 34 de un total de 90 que es lo mismo que 17 de 45.)

12. **Algunos de los animales que hay en Madrid están realmente locos. El 10% de los gatos se creen que son perros y el 10% de los perros se creen que son gatos. Todos los demás, perros y gatos, son perfectamente normales. Un día hicimos un test a todos los perros y gatos de Madrid y resultó que el 20% del total se creían que eran gatos. ¿Qué porcentaje del total de gatos y perros de Madrid son realmente gatos?**

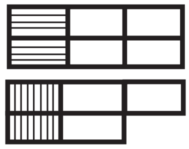
Hay g gatos y p perros en Madrid y nos piden calcular qué porcentaje representa $\frac{g}{g+p}$.

Se creen que son gatos $\frac{90}{100}g + \frac{10}{100}p$ que debe ser equivalente a $\frac{20}{100}(g+p)$.

Así pues, $9g + p = 2g + 2p$, es decir, $7g = p$, por lo que $\frac{g}{g+p} = \frac{g}{8g} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$.

13. **En la fiesta del vals, $\frac{1}{3}$ de los chicos está bailando con $\frac{2}{5}$ de las chicas. ¿Qué fracción de personas no está bailando?**

En el dibujo representamos con rayas horizontales a los chicos que bailan y con rayas verticales a las chicas que bailan. Las rayas horizontales y verticales deben, por tanto, representar el mismo número de personas, ya que el vals se baila por parejas (chica-chico).



Completamos el dibujo con rectangulitos blancos para indicar los chicos y chicas que no bailan.

La fracción de los que no bailan (rectangulitos blancos) es $\frac{7}{11}$.

14. **El parlamento de un país cuenta con 2000 diputados. El 12,121212…% de los diputados asistentes a una reunión son rubios y el 23,423423423…% fuman. ¿Cuántos diputados faltaron a esa reunión?**

Puesto que 12,1212...= $\frac{1200}{99} = \frac{400}{33}$ y 23,423423... = $\frac{23400}{999} = \frac{2600}{111}$, tenemos que si x es el número de asistentes, $\frac{400}{33} \cdot \frac{x}{100}$ y $\frac{2600}{111} \cdot \frac{x}{100}$, es decir, $\frac{4x}{33}$ y $\frac{26x}{111}$ deben ser números enteros por lo que al no tener divisiones comunes 4 y 33 ni 26 y 111, el número x debe ser múltiplo de 33 (3 · 11) y de 111 (3 · 37), es decir, múltiplo de 3 · 11 · 37, mínimo común múltiplo de ambos. Como 3 · 11 · 37 < 2000 y 2 · 3 · 11 · 37 > 2000, el número de asistentes será x = 3 ·11 · 37 = 1221, por lo que a dicha reunión faltaron 2000 - 1221 = 779 diputados.

ARI 3. Potencias y raíces

1. **Si desarrollamos el número $4^5 \cdot 5^{13}$, ¿cuántas cifras tendrá?**

Aplicando las propiedades de las potencias:

$4^5 \cdot 5^{13} = (2^2)^5 \cdot 5^{13} = 2^{10} \cdot 5^{10} \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^{10} \cdot 5^3 = 10^{10} \cdot 5^3 = 125 \cdot 10^{10} \Longrightarrow 3 + 10 = 13$ cifras.

2. **Un viaje espacial sale de la Tierra hacia un planeta situado a 2^{20} km. Después de hacer un cuarto del trayecto, la nave pierde el contacto por radio con la Tierra, recuperándolo cuando está a 2^{19} km de ella. ¿Cuántos km recorrió la nave sin contacto por radio?**

Un cuarto del trayecto total es $\frac{2^{20}}{4} = \frac{2^{20}}{2^2} = 2^{18}$, que es el punto en el que perdió el contacto y luego lo recupera en 2^{19}. Si restamos, ya sabremos los km que estuvo la nave sin contacto: $2^{19} - 2^{18}$ = (¡cuidado con hacer barbaridades!, recuerda que para sumar y restar potencias de la misma base no hay fórmulas especiales, sólo podemos sacar factor común) = 2^{18} (2 - 1) = 2^{18} km.

3. **Si $8^{668} + 2^{2005} + 4^{1003} = 7 \cdot 16^x$, ¿cuánto vale *x*?**

Vamos a escribir la suma que queremos evaluar empleando sumandos de la misma base que, obviamente, será 2. Es importante usar bien las propiedades de las potencias:

$8^{668} + 2^{2005} + 4^{1003} = (2^3)^{668} + 2^{2005} + (2^2)^{1003} = 2^{2004} + 2^{2005} + 2^{2006}$ y, sacando factor común 2^{2004}, la suma será igual a $2^{2004}(1 + 2 + 2^2) = 7 \cdot 2^{2004}$. Igualando a la expresión del enunciado del problema, ya podemos calcular la *x* que buscábamos:

$7 \cdot 2^{2004} = 7 \cdot 16^x \longrightarrow 2^{2004} = 16^x = (2^4)^x = 2^{4x} \longrightarrow 2004 = 4x \longrightarrow x = 501$

4. **a) ¿Cuál es la cifra de las unidades de $3^{1001} \cdot 7^{1002} \cdot 13^{1003}$?**

b) ¿Cuál es la penúltima cifra de 11^{48}?

a) Estos problemas se basan en que la última cifra de las sucesivas potencias de un número siempre sigue un patrón periódico que se repite y que depende de la última cifra de la base.

Así, por ejemplo, las potencias de los números que acaban en 3 siguen este patrón (sólo escribimos la última cifra, que es la que nos interesa):

$3^1 = 3 \longrightarrow 3^2 = 9 \longrightarrow 3^3 = ...7 \longrightarrow 3^4 = ...1 \longrightarrow 3^5 = ...3 \longrightarrow 3^6 = ...9 \longrightarrow 3^7 = ...7 \longrightarrow 3^8 = ...1$

Es decir, la serie de las terminaciones es: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, …, repitiéndose de cuatro en cuatro, por tanto, para calcular esa última cifra habrá que hallar el resto de dividir el exponente entre 4.

Vayamos a nuestro problema: $3^{1001} \cdot 7^{1002} \cdot 13^{1003}$ (lo arreglamos un poco buscando el mismo exponente) $= 3^{1001} \cdot 7^{1001} \cdot 7 \cdot 13^{1001} \cdot 13^2 = (3 \cdot 7 \cdot 13)^{1001} \cdot 7 \cdot 13^2 = 273^{1001} \cdot 7 \cdot 13^2$

Estudiamos estos 3 factores:

La última cifra de 273^{1001} es 3 ya que el resto de dividir 1001 entre 4 es igual a 1 (es decir, termina en la 1ª cifra del bloque 3971, que es un 3. Si, por ejemplo, el resto hubiese sido 2, le correspondería la cifra 9).

La última cifra de 7 es 7.

La última cifra de 13^2 es 9.

Por tanto, la última cifra que andamos buscando será la última cifra de $3 \cdot 7 \cdot 9$ que es un 9.

b) Calculamos las primeras potencias de 11 hasta encontrar una pauta: Escribiendo $11^0 = 01$; $11^1 = 11$; $11^2 = \ldots 21$; $11^3 = \ldots 31$; $11^4 = \ldots 41$; …….$11^{10} = \ldots 01$ y vuelve a empezar. Así pues, la penúltima cifra sigue la pauta 0123456789 0123456789 …, es decir, la penúltima cifra de 11^n es igual al resto de dividir *n* entre 10, luego en nuestro caso la penúltima cifra será 8.

5. **¿Cuál es el mayor entero *n* para el que $n^{200} < 5^{300}$?**

Como tenemos exponentes tan altos vamos a intentar rebajarlos un poco para ser más ágiles. Lo mejor es tomar raíces en los dos miembros, en nuestro caso, calcularemos la raíz 100-ésima:

$n^{200} < 5^{300} \Rightarrow \sqrt[100]{n^{200}} < \sqrt[100]{5^{300}} \Rightarrow n^2 < 5^3 \Rightarrow n^2 < 125$ y esto ya parece más sencillo.

Si $n = 10 \longrightarrow 10^2 = 100 < 125$

Si $n = 11 \longrightarrow 11^2 = 121 < 125$

Si $n = 12 \longrightarrow 12^2 = 144 > 125$, es decir para $n = 12$ nos pasamos.

Por tanto la respuesta es $n = 11$.

6. **¿Cuál es el valor de $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2005} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2005}$?**

No hay que asustarse, fíjate que

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2005} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2005} = \left(\frac{(\sqrt{5}+1)\cdot(\sqrt{5}-1)}{4}\right)^{2005} = \left(\frac{\sqrt{5}^{2}-1}{4}\right)^{2005} = \left(\frac{4}{4}\right)^{2005} = 1^{2005} = 1.$$

7. **Si $x > y > 0$, expresa $\frac{x^y \cdot y^x}{y^y \cdot x^x}$ como una única potencia.**

Haciendo algunas transformaciones algebraicas y usando las propiedades de potencias obtenemos:

$$\frac{x^y \cdot y^x}{y^y \cdot x^x} = \left(\frac{x}{y}\right)^{y} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{x} = \left(\frac{y}{x}\right)^{-y} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{x} = \left(\frac{y}{x}\right)^{x-y}$$

8. **Calcula el valor de $\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^{4}+4^{11}}}$.**

Escribamos todas las bases como potencias de base 2: $8 = 2^3$ y $4 = 2^2$. Usando propiedades de potencias de igual base y sacando factor común se obtiene:

$$\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^{4}+4^{11}}} = \sqrt{\frac{(2^3)^{10}+(2^2)^{10}}{(2^3)^{4}+(2^2)^{11}}} = \sqrt{\frac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}} = \sqrt{\frac{2^{20}(2^{10}+1)}{2^{12}(2^{10}+1)}} = \sqrt{\frac{2^{20}}{2^{12}}} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16.$$

9. **¿Cuántas parejas de números hay cuyo mínimo común múltiplo sea $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ y su máximo común divisor sea $2^2 \cdot 5$?**

Los números deben ser de la forma $2^a\, 3^b\, 5^c$ y $2^A\, 3^B\, 5^C$ con la condición de que a y A sean 2 y 3, b y B sean 0 y 1 y c y C sean 1 y 2. Hay 2 posibilidades para elegir a (una vez elegido a, A queda determinado), dos para elegir b y otras dos para elegir c, luego hay $2^3 = 8$ parejas de números que cumplen esa condición.

10. **La familia Abolengo es muy tradicional. Hace muchísimos años Pepita Abolengo tuvo tres hijas a las que dio su apellido (la primera generación) y, desde entonces, todas las mujeres Abolengo tienen siempre tres hijas de apellido Abolengo. Si van ya por la séptima generación de mujeres Abolengo, ¿cuántas mujeres Abolengo, incluida Pepita, han existido?**

Como en cada generación se triplica el número de mujeres Abolengo, debemos sumar $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^7$ que es la suma de los siete primeros términos de una progresión geométrica de razón 3:

$$\frac{3^8-1}{3-1} = \frac{(3^4-1)(3^4+1)}{2} = 40 \cdot 82 = 3280.$$ Han existido 3280 mujeres Abolengo.

11. **Si $1^2 + 11^2 + 21^2 + ... + 91^2 = S$, ¿cuánto vale la suma $2^2 + 12^2 + 22^2 + ... + 92^2$ en función de S?**

En este problema habrá que buscar alguna relación entre la segunda suma y la primera. Las bases de la segunda son una unidad mayor que las de la primera:

$2^2 + 12^2 + 22^2 + ...+ 92^2 = (1 + 1)^2 + (11 + 1)^2 + (21 + 1)^2 + ... + (91 + 1)^2 =$
$= (1^2 + 1 + 2) + (11^2 + 1 + 22) + (21^2 + 1 + 42) + ... + (91^2 + 1 + 182) =$
$= S + 3 + 23 + 43 + ... + 183$ y ya sólo falta calcular la suma $3 + 23 + 43 + ... + 183$, que es la suma de los 10 primeros términos de una progresión aritmética y por tanto vale

$\dfrac{3 + 183}{2} \cdot 10 = 930$. Así pues, $2^2 + 12^2 + 22^2 + ...+92^2 = S+930$

12. **¿Cuál es el primer natural n para el que $(0{,}2)^n < 10^{-6}$?**

Escribiendo $0{,}2^n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ y $10^{-6} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^6 \left(\dfrac{1}{2}\right)^6$, queremos que $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n < \left(\dfrac{1}{5}\right)^6 \left(\dfrac{1}{2}\right)^6$ o, lo que es lo mismo, que $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-6} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{64}$. Entonces, $5^{n-6} > 64$ y esto ocurre si $n - 6 \geq 3$. Luego el menor valor es $n = 9$.

ARI 4. Proporcionalidad

1. **Dos gatos, *Mu* y *Mi*, cazaron entre los dos 60 ratones. Si *Mu* caza tres ratones por cada dos ratones que caza *Mi*, ¿cuántos ratones cazó *Mi*?**

De cada 5 ratones, *Mu* caza 3 y *Mi* 2. Así pues, de 60 ratones (12 grupos de 5), *Mi* cazó 24 (12 parejas).

2. **Un terreno está representado sobre un plano con una escala 1:2500 por un rectángulo de 64 mm de longitud y 48 mm de anchura. ¿Cuál es el área real del terreno?**

El terreno tiene una longitud de $\dfrac{64 \cdot 2500}{1000}$ m, es decir, 160 m y una anchura de $\dfrac{48 \cdot 2500}{1000} = 120$ m, por lo que su área será $160 \cdot 120 = 19200$ m^2, es decir, 1,92 hectáreas.

3. **Un albañil necesita 10000 ladrillos para cierto trabajo. Por su larga experiencia sabe que no más del 7% de los que le traigan se le van a romper. Si los ladrillos vienen en cajas de 100, ¿cuál es el mínimo número de cajas que debe pedir para estar seguro de acabar el trabajo?**

Debe pedir x ladrillos sabiendo que $x - \frac{7x}{100} \geq 10000$, es decir $x \geq 10753$. Como vienen en cajas de 100, con 108 cajas sabe que podrá acabar el trabajo.

4. **Tres personas se han repartido una cantidad de dinero directamente proporcional a los números 6, 3 y 2. Si la que menos recibe, ha recibido 300 euros, ¿qué cantidad total se repartió?**

Se ha dividido cierta cantidad en 11 (6 + 3 + 2 = 11) partes iguales y sabemos que 300 euros son dos partes del total.

Así pues, cada parte son 150 €, que multiplicados por las 11 partes totales supone un montante de 150 · 11 = 1650 €.

5. **En cierta competición, se entregan premios en metálico a los clasificados en los tres primeros lugares. La cantidad total a entregar se divide en dos partes que está en la proporción 5:4, donde la parte mayor corresponde al primero y la otra se vuelve a dividir en dos partes en la misma razón 5:4, siendo ahora la mayor para el segundo y la pequeña para el tercero. Si el tercer clasificado recibe 290 euros menos que el primero, ¿cuántos euros recibió el segundo?**

Repartir en proporción 5:4 significa que uno se lleva 5 partes y el otro 4, es decir, el total se divide en 9 partes, de las cuales 5 son para uno y 4 para el otro. Así pues, si llamamos x a la cantidad total a entregar, el ganador se lleva $\frac{5}{9}x$ y el resto es, por tanto, $\frac{4}{9}x$. Como ese resto se vuelve a repartir en igual proporción entre el segundo y el tercero, al segundo le corresponden $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} x = \frac{20}{81}x$ y al tercero $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} x = \frac{16}{81} x$.

Como nos dicen que $\frac{5}{9}x - \frac{16}{81} x = 290$, tenemos que $\frac{45 - 16}{81} x = 290$; es decir $x = 810$ €, de los que el segundo se lleva $\frac{20}{81} \cdot 810 = 200$ €.

Bloque I Bloque II Bloque III Bloque IV

6. **Una lámina de cristal absorbe el 20 % de la luz roja que le llega, es decir, deja pasar el 80 %. ¿Cuántas láminas de cristal debo colocar como mínimo, una encima de otra, para que pase como mucho la mitad de la luz roja que les llegue?**

Si llamamos *x* a la cantidad inicial de luz roja, vemos que con una lámina pasaría el 80% de *x*, es decir $\frac{80}{100} \cdot x = 0{,}8x$. Y ya se observa el procedimiento, cada lámina que se coloca es como multiplicar por 0,8.

Con dos láminas pasaría: $0{,}8 \cdot 0{,}8x = 0{,}64x$.

Con tres láminas: $0{,}8 \cdot 0{,}64x = 0{,}512x$.

Con cuatro láminas: $0{,}8 \cdot 0{,}512x = 0{,}4096x$, que ya supone menos de la mitad (menos de 0,5) de la luz roja inicial *x*. Así que la respuesta es 4 láminas.

7. **En un supermercado se vende detergente en tres tipos de envases: pequeño (P), mediano (M) y grande (G). El envase mediano cuesta un 50% más que el pequeño y contiene 20% menos detergente que el grande. El envase grande contiene doble detergente que el pequeño y cuesta un 30% más que el mediano. Ordena los tres tipos de envase, del más rentable al menos rentable.**

Elaboremos una tabla con los datos, llamando *p* al peso del envase pequeño y *c* a su contenido:

	Precio	Contenido	Precio por unidad de peso
Pequeño	p	c	$\frac{p}{c}$
Mediano	$1{,}5p$	$0{,}8 \cdot 2c = 1{,}6c$	$\frac{1{,}5p}{1{,}6c} = 0{,}9375\ \frac{p}{c}$
Grande	$1{,}3 \cdot 1{,}5p = 1{,}95p$	$2c$	$\frac{1{,}95p}{2c} = 0{,}975\ \frac{p}{c}$

Así pues, ordenados de mejor a peor precio, quedarían así: mediano, grande, pequeño.

8. **¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a las 4:20?**

Este es un problema clásico de la matemática. Seguro que madres, padres y abuelos lo recuerdan. Lo primero es hacer un dibujo del reloj con sus dos agujas, la de las horas y el minutero. Como en la esfera (en realidad es un círculo) del reloj hay 12 horas, está claro que el ángulo entre dos horas consecutivas es de $\frac{360º}{12} = 30º$. Y ahora viene la clave: cada vez que el minutero avanza 60 minutos (o sea, una vuelta), la manecilla de las horas recorre 30º (fíjate: la mitad de 60). Es decir, si el minutero avanza *n* minutos, la manecilla de las horas barre un ángulo de $\frac{n}{2}$ grados. A las 4:20, el minutero está en la hora 4 (que coincide con los 20 minutos), pero la manecilla de las horas se ha desplazado $\frac{20}{2} = 10º$.

9. **Una fotocopiadora tarda una hora en sacar *m* fotocopias y otra, para sacar el mismo número de fotocopias, tarda una hora y media. ¿Cuántos minutos tardarán las dos juntas en sacar ese número *m* de fotocopias?**

¿A que este problema recuerda al de los grifos que llenan una bañera? Claro, es el mismo. Había que calcular lo que llena cada grifo por unidad de tiempo…

Como nos piden minutos, pasaremos las horas a minutos:

La primera fotocopiadora saca m fotocopias en 60 min, por tanto en 1 minuto saca $\frac{m}{60}$ fotocopias; y la segunda saca m fotocopias en 90 min, lo que indica que saca $\frac{m}{90}$ fotocopias en 1 minuto. Así pues, las dos juntas en 1 minuto sacan

$\frac{m}{60} + \frac{m}{90} = \frac{3m + 2m}{180} = \frac{5m}{180} = \frac{m}{36}$ fotocopias, que es precisamente $\frac{1}{36}$ de las m fotocopias que necesitamos sacar. Por tanto para obtener m fotocopias tardarán 36 minutos.

Este tipo de problemas se puede resolver de otra manera. Resolvamos este problema clásico: Un grifo llena un tanque en 4 horas y otro en 6 horas. ¿Cuánto tiempo necesitaremos para llenar el tanque si ambos grifos están abiertos?

Si los grifos estuvieran abiertos 12 horas (12 es el mcm de 4 y 6), el primer grifo habría llenado 3 tanques y el segundo 2. Es decir, 5 tanques se llenan en 12 horas y ya el problema se resuelve él solito: 1 tanque se llenará en $\frac{12}{5}$ de hora, es decir, 2 horas y 24 minutos.

10. **Trabajando juntas, Ana y Cati pintan un mural en 10 horas; Ana y Gloria lo harían en 12 horas y Cati y Gloria en 15 horas. Si se pusieran las tres juntas a pintar, ¿en cuántas horas acabarían el mural?**

Llamando a, c y g al número de horas que emplearían Ana, Cati y Gloria en pintar el mural en solitario, podemos escribir los datos mediante estas tres igualdades:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{10} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{g} = \frac{1}{12} \qquad \frac{1}{c} + \frac{1}{g} = \frac{1}{15}$$

Sumando las tres igualdades llegamos a que $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{g} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$ Así pues, trabajando las tres juntas pintarían $\frac{1}{8}$ del mural en una hora, por lo que el mural completo lo pintarían en 8 horas.

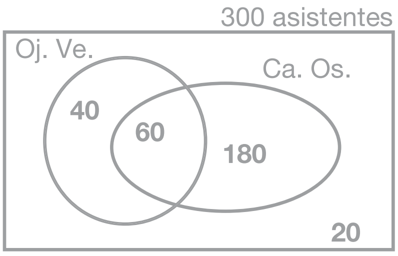
Podemos resolverlo con el método explicado en el problema anterior. Si las tres amigas pintaran durante 60 horas (60 es el mcm de 10, 12 y 15), la primera pareja (Ana, Cati) pintaría 6 murales; la segunda (Ana, Gloria) pintaría 5 murales; y la tercera pareja (Cati, Gloria) pintaría 4 murales. Aquí viene el quid: entre dos Anas, dos Catis y dos Glorias pintan 15 murales en 60 horas, así que Ana, Cati y Gloria pintan 7,5 murales en 60 horas.

Y se termina: un mural lo pintan en 60:7,5 = 8 horas.

11. **En una reunión, la tercera parte de los asistentes tiene ojos verdes, el 80% cabello oscuro y el 20% ojos verdes y cabello oscuro. ¿Cuál es la proporción de los que no tienen ojos verdes ni cabello oscuro?**

En este tipo de problemas en el que intervienen proporciones o porcentajes es muy útil trabajar con cantidades concretas y luego, al final, hallar la proporción o el porcentaje pedido. En este problema es acertado suponer que asisten 300 personas a la reunión ya que es múltiplo de 3 y de 100. Utilizaremos unos sencillos diagramas.

Ya solo falta ir rellenando las regiones con su cantidad correspondiente. Es importante darse cuenta con qué dato debemos empezar: el 20% (20% de 300, es decir, 60 personas) tienen ojos verdes y cabello oscuro. Pondremos 60 en la intersección. Como el 80% (240) tienen cabello oscuro, debemos colocar 180 en la parte que queda, pues ya hay 60 con cabello oscuro. Así, poco a poco, hasta completar los diagramas.



Al final quedan 20 asistentes que ni tienen ojos verdes ni cabello oscuro, lo que hace una proporción de $\dfrac{20}{300} = \dfrac{1}{15}$.

12. **El jardín de Antonio es doble que el de Benito y triple que el de Carlos. Los tres empiezan a la vez a cortar la hierba, cada uno en su jardín. Carlos va la mitad de rápido que Benito y la tercera parte de rápido que Antonio.**
¿Quién acabó el primero?

Sabiendo que $tiempo = \dfrac{espacio}{velocidad}$ vamos a resolver el problema.

Si llamamos $6x$ al tamaño del jardín de A, entonces, $3x$ será el de B y $2x$ el de C.

Si llamamos y a la velocidad que lleva C, entonces, $2y$ es la velocidad de B y $3y$ la de A.

Por tanto, A tardará $\dfrac{6x}{3y} = 2\dfrac{x}{y}$, B tardará $\dfrac{3x}{2y} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x}{y}$ y C tardará $\dfrac{2x}{y} = 2\dfrac{x}{y}$,

es decir, Benito es el que menos tiempo emplea en cortar la hierba de su jardín.

13. **La torre Eiffel tiene 300 m de altura, está construida enteramente de hierro y pesa exactamente 8000 toneladas. Se quiere construir un modelo reducido de la torre, también de hierro y que pese 1 kg. ¿Cuál debe ser su altura?**

Sabemos que el peso es proporcional al volumen y éste es proporcional al cubo de la altura, así pues, si llamamos x a la altura de la maqueta, podemos escribir esta proporción, en la que hemos pasado ya las toneladas a kilogramos:

$\dfrac{8000000}{1} = \dfrac{300^3}{x^3}$, de donde se concluye que $x^3 = 3{,}375$ y, por tanto, $x = 1{,}5$. La altura de la maqueta debe ser de un metro y medio.

ARI 5. Tiempo, distancia y velocidad

Algunos de los problemas de este tipo pueden resolverse generalizando juiciosamente el concepto de velocidad a cualquier magnitud que varíe con el tiempo y aplicando los mismos procedimientos empleados en la resolución de problemas de movimiento. Además ofrecen una oportunidad más de relacionar la aritmética con la geometría y el álgebra, contribuyendo así a percibir la unidad de la matemática.

1. Un grifo pierde una gota de agua cada segundo. Si 600 gotas de agua llenan una vasija de 100 mililitros, ¿cuántos litros de agua se pierden en 300 días?

En 300 días perderá 300 · 86400 = 25920000 gotas de agua. Como cada gota tiene un volumen de $\frac{100}{600}$ mililitros = $\frac{0,1}{600}$ litros, tendremos unas pérdidas de $25920000 \cdot \frac{0,1}{600} = 4320$ litros.

2. Un ciclista va de excursión y cuando lleva recorrido un tercio del camino, para a comer un poco. Si en ese momento le faltan aún 11 km para llegar a la mitad del camino, ¿cuántos kilómetros tiene la excursión completa?

11 km equivalen a $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ de camino, es decir, 11 km suponen $\frac{1}{6}$ del camino, por lo que la excursión completa es de 66 km.

También podemos emplear un método puramente algebraico. En este caso la lectura del problema nos lleva a plantear una ecuación: si el camino tiene x km, el enunciado nos dice que $\frac{x}{3} + 11 = \frac{x}{2}$ cuya solución es $x = 66$ km.

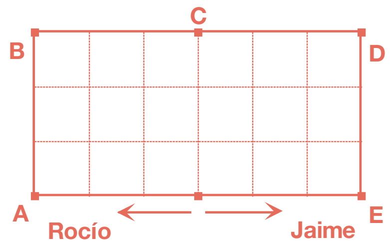
3. Un coche sale de un punto P a las 12 de la mañana a 90 km/hora. ¿A qué hora dará alcance a un ciclista que salió de P a las 7 de la mañana a 15 km/hora?

Si el coche circula durante t horas, la bicicleta lo hará durante $t + 5$ horas. Como ambos recorren el mismo espacio, tenemos $90t = 15(t + 5)$ cuya solución es $t = 1$ hora. Por lo que le alcanzará a la 1 de la tarde.

4. Para hacer un viaje de 30000 km utilizamos las cinco ruedas de un coche. (A veces cambiábamos una por la de repuesto). Si cada una de las cinco recorrió los mismos kilómetros, ¿cuántos km hizo cada una?

Puesto que el viaje ha sido de 30.000 km y siempre llevábamos 4 ruedas, entre todas han recorrido 30.000 · 4 = 120.000 km que, repartidos entre las 5 ruedas que hemos utilizado, tocan a $\frac{120000}{5} = 24.000$ km cada una.

5. **Rocío siempre camina el doble de rápido que Jaime. Si parten del punto señalado en sentido contrario, y van dando vueltas a la parcela rectangular de la figura, de 18 cuadrados de área, ¿cuál, de los puntos indicados, será el más próximo cuando se encuentren por primera vez?**



Cuando se encuentran por primera vez, entre los dos habrán recorrido el perímetro, 18, de la figura. Como Rocío recorre dos lados de cuadrado por cada uno que recorre Jaime, cuando Jaime haya recorrido x, Rocío habrá recorrido $2x$, siendo $2x + x = 18$, es decir, $x = 6$ y contando 6 lados desde el punto de partida en el sentido de Jaime, llegamos a que el punto de encuentro es el punto D.

6. **En cierto momento de un viaje, el conductor observa que el cuentakilómetros marca el número capicúa 35953 km y 75 minutos después el cuentakilómetros marca el capicúa siguiente. ¿Cuál es la velocidad media, en km/hora, del coche durante esos 75 minutos?**

El siguiente capicúa a 35953 deberá empezar por 36 y será el 36063. Lo que indica que han pasado 36063 - 35953 = 110 km y como los ha recorrido en 75 minutos, la velocidad media será: $\frac{110}{75}$ km/min $= \dfrac{110}{\frac{75}{60}} = \dfrac{110 \cdot 60}{75} = 88$ km/h.

7. ***Rayo* corre a velocidad constante, y *Centella* m veces más rápido que *Rayo* (m es un número mayor que 1). Si *Centella* le da una ventaja de h metros a *Rayo*, ¿qué distancia, en metros, debe recorrer *Centella* para alcanzar a *Rayo*?**

Si la velocidad de *Rayo* es v m/s, la de Centella será mv m/s. Si esta recorre x metros hasta alcanzar a *Rayo*, tardará $\dfrac{x}{mv}$ segundos en hacerlo. Por su parte *Rayo*, en el mismo tiempo, habrá recorrido una distancia $x - h$ a velocidad v y por lo tanto tardará $\dfrac{x-h}{v}$ segundos.

Tenemos pues que resolver la ecuación $\dfrac{x}{mv} = \dfrac{x-h}{v}$:

$$xv = mv\,(x - h) \Rightarrow x = mx - mh \Rightarrow mh = x(m - 1) \Rightarrow x = \frac{mh}{m-1} \text{ metros}$$

Resaltemos que simplemente hemos calculado los tiempos de *Centella* y *Rayo* y los hemos igualado. Muchos problemas, en los que ocurren dos procesos que tardan el mismo tiempo, o en los que el espacio recorrido es el mismo, se resuelven con extrema facilidad empleando este método algebraico.

8. **En Matematilandia hay un sistema muy curioso de limitación de velocidad: A 1 km del centro de la ciudad hay una señal de limitación de velocidad a 120 km/hora; a medio kilómetro, otra limitación a 60 km/hora, a $\frac{1}{3}$ de km, la limitación de velocidad llega a 40 km/hora; a $\frac{1}{4}$ km, la señal es de 30 km/hora, a $\frac{1}{5}$ km de 24 km/hora y, finalmente, a $\frac{1}{6}$ de km del centro de la ciudad, hay una señal de limitación de velocidad a 20 km/hora. Si viajas siempre a la velocidad límite, ¿qué tiempo tardas en llegar desde la señal de 120 km/hora al centro de la ciudad?**

Calculemos las distancias entre las señales:

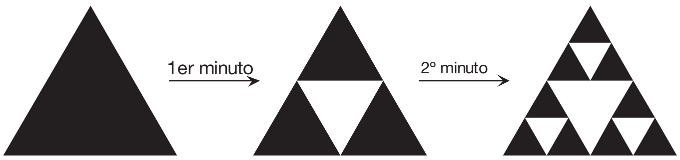
$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6};\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12};\ \frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}\text{ y }\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}.$$

Recorro $\frac{1}{2}$ km a 120 km/hora, $\frac{1}{6}$ km a 60 km/hora, $\frac{1}{12}$ km a 40 km/hora, $\frac{1}{20}$ km a 30 km/hora, $\frac{1}{30}$ km a 24 km/hora y finalmente $\frac{1}{6}$ km a 20 km/hora.
Así pues, el tiempo empleado en minutos, será:

$$\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{\frac{1}{6}}{1}+\frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}}+\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{30}}{\frac{2}{5}}+\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}=\frac{147}{120}=$$

= 1,225m = 1m 13,5 segundos.

9. **Un triángulo equilátero está originariamente pintado de negro. Cada minuto cambia, de forma que la cuarta parte de cada triángulo negro se vuelve blanca.**
Al cabo de 5 minutos, ¿qué parte del triángulo original sigue estando de negro?



Si tomamos como unidad el área del triángulo original, basta calcular el número de triangulitos negros y el área de uno de ellos al cabo de cada minuto. Hecho esto, sólo restará multiplicar el número de triangulitos por su área (después del quinto minuto) para tener la fracción de superficie perdida.

1er minuto: 3 triangulitos negros de área $\frac{1}{4}$

2º minuto: 3^2 triangulitos negros de área $\left(\frac{1/4}{4}\right)=\frac{1}{4^2}$

3er minuto: 3^3 triangulitos negros de área $\frac{1}{4^3}$

...

5º minuto: 3^5 triangulitos negros de área $\frac{1}{4^5}$

Por tanto, la parte que seguirá estando de negro es: $3^5\cdot\frac{1}{4^5}=\left(\frac{3}{4}\right)^5$

10. **Dos ciclistas marchan a velocidad uniforme. El más lento tarda 15 segundos más que el más rápido en recorrer 4 km y recorre 1 km menos que el otro en 15 minutos. ¿Cuál es la velocidad, en km/hora, del ciclista más rápido?**

El más lento tarda $\frac{15}{4}$ segundos más que el más rápido en recorrer 1 km, es decir, si el rápido recorre 1 km en t minutos, el lento lo recorrerá en $t + \frac{1}{16}$ minutos. Así pues, la velocidad del rápido en km/minuto es $\frac{1}{t}$ y la del lento, $\frac{1}{t+\frac{1}{16}} = \frac{16}{16t+1}$ por lo que sus velocidades respectivas, en km/hora, serán $\frac{60}{t}$ y $\frac{960}{16t+1}$.

Por otra parte, si uno recorre 1 km menos que el otro en 15 minutos, se sigue que en 1 hora recorrerá 4 km menos con lo que $\frac{960}{16t+1} + 4 = \frac{60}{t}$, ecuación que nos lleva a $16t^2 + t - 15 = 0$ cuya solución positiva (la otra carece de sentido) es $t = \frac{15}{16}$ minutos, con lo que la velocidad del rápido en km/hora será $\frac{60}{t} = 60 : \frac{15}{16} = 64$ km/hora.

Está claro que se ha planteado el problema por un método que puede llamarse aritmético, pero queda igualmente claro que el proceso de resolución está lejos de ser solo aritmético. No obstante, este tipo de problemas son más fáciles de resolver con métodos algebraicos. En este caso particular, basta traducir directamente las dos condiciones del enunciado al lenguaje algebraico:

Si el rápido tarda t segundos en recorrer 4 km su velocidad será $\frac{4}{t}$ km/s y la del lento $\frac{4}{t+15}$ km/s .

Si el rápido recorre una distancia x en 15 minutos su velocidad será $\frac{x}{15 \cdot 60} = \frac{x}{900}$ km/s y la del lento $\frac{x-1}{900}$ km/s.

Se sigue que $\frac{4}{t} = \frac{x}{900}$ y $\frac{4}{t+15} = \frac{x-1}{900} = \frac{x}{900} - \frac{1}{900}$, que nos llevan a $\frac{4}{t+15} = \frac{4}{t} - \frac{1}{900}$ y esta última a $t^2 + 15t - 54000 = 0$ cuya solución positiva (la otra carece de sentido) es $t = 225$ segundos, de donde la velocidad del rápido en km/hora será $\frac{4 \cdot 3600}{225} = 64$ km/hora.

11. **Luis y Esteban tuvieron que ir, cada uno en su coche, desde Madrid al pueblo de Luis.**
Ambos viajaron a velocidad constante. Esteban salió a las 7 de la mañana y llegó a la una de la tarde y Luis salió una hora más tarde que Esteban pero llegó hora y media antes que éste. ¿A qué hora alcanzó Luis a Esteban?

Plantearemos este problema por tres métodos distintos.

Método Aritmético

Cuando Luis salió, Esteban llevaba 1 hora de camino y como tardó 6 horas en completar el viaje, en ese momento, había recorrido $\frac{1}{6}$ del trayecto. Luis, por su parte, tardó en el recorrido completo 3,5 horas o lo que es lo mismo $\frac{7}{2}$ horas, por lo que en 1 hora recorrió $\frac{1}{7/2} = \frac{2}{7}$ del trayecto, es decir, mientras Esteban recorrió $\frac{1}{6}$ del camino total Luis hizo $\frac{2}{7}$ del mismo. Así pues, cada hora que pasa desde que salieron, Luis se acerca a Esteban $\frac{2}{7} - \frac{1}{6} = \frac{5}{42}$ del trayecto.

Como a las 8 de la mañana les separaba una distancia igual a $\frac{1}{6}$ del total, el tiempo que debe pasar hasta que su distancia mutua sea 0 es $\frac{1}{6} : \frac{5}{42} = \frac{7}{5}$ horas $= \frac{7 \cdot 60}{5} =$ 84 minutos =

= 1 h 24 minutos, de modo que el alcance se produjo a las 9 h 24 min.

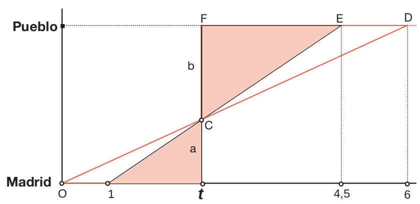
Método Algebraico

Sea t la hora del alcance e y la distancia de Madrid al pueblo. Como el camino recorrido hasta el momento del adelantamiento es igual para los dos coches, bastará calcular los espacios recorridos por ambos coches (multiplicando el tiempo de cada uno por su velocidad) e igualarlos: $(t - 7)\,\frac{y}{6} = (t - 8)\,\frac{y}{3,5}$, eliminando y, la ecuación lleva a

$t = \frac{47}{5}$ = 9,4 horas = 9 horas + 0,4 · 60 minutos = 9 h 24 min.

Comprobamos que este procedimiento exige menos ingenio que el primero y su resolución es completamente rutinaria. Pero a cambio, permite resolver problemas mucho más difíciles en los que además también será necesario el ingenio.

Método Geométrico



Si representamos en el eje vertical las distancias y en el horizontal el tiempo transcurrido (en horas) desde que salió Esteban, el segmento OD representa el movimiento de Esteban y el segmento 1E el de Luis.

El alcance se produce t horas después de salir Esteban y a unas distancias, b del pueblo y a de Madrid.

De la semejanza de los triángulos 1tC y CFE se sigue: $\frac{t - 1}{a} = \frac{4,5 - t}{b}$

y de la semejanza de los triángulos OtC y CFD: $\frac{t}{a} = \frac{6 - t}{b}$

Dividiendo miembro a miembro las dos igualdades: $\frac{t - 1}{t} = \frac{4,5 - t}{6 - t}$ ecuación que lleva a

$t = \frac{12}{5}$ horas $= \frac{12 \cdot 60}{5}$ = 144 minutos = 2 h 24 min. Así que el alcance se produjo a las 9 h 24 min.

12. **En el pueblo de Luis solo tienen dos caminos. Uno de ellos tiene un tramo en muy mal estado y el otro es intransitable en una longitud triple que la anterior, siendo ambos tramos uniformemente malos. El alcalde decide que eso no puede seguir así y, para ello, dispone de una brigadilla de mantenimiento (con la virtud de que todos los hombres tienen el mismo rendimiento).**

Durante día y medio la brigadilla al completo trabaja en el tramo largo. El resto del segundo día se reparten mitad por mitad entre los dos tramos y finalizan el más largo.

Por fin, el tercer día, 2 hombres trabajando durante toda la jornada terminan el tramo corto. ¿Cuántos hombres componen la brigadilla?

Sea y la longitud del tramo corto y v la "velocidad" en m/día de cada trabajador.

Tramo largo: durante el primer día y medio, como trabajan x hombres a una "velocidad" v, repararán $xv\frac{3}{2}$ metros y en la media jornada restante (en la que intervienen $\frac{x}{2}$ hombres), harán $\frac{x}{2}v\frac{1}{2}$ metros, completando los $3y$ metros del tramo. Así que tenemos

$$xv\frac{3}{2} + \frac{xv}{4} = 3y.$$

Tramo corto: En la media jornada del 2º día harán $\frac{x}{2}v\frac{1}{2}$ metros y los dos hombres de la tercera jornada repararán $2v \cdot 1$ metros. Por lo que $\frac{xv}{4} + 2v = y$.

Multiplicando la última ecuación por 3 y considerando la ecuación del tramo largo tenemos: $\frac{3x}{2} + \frac{x}{4} = \frac{3x}{4} + 6$, cuya solución es $x = 6$ hombres.

Bloque II. Geometría

Bloque II. Geometría

"Nadie salga de la enseñanza secundaria sin saber algo de Geometría"

Introducción

Este bloque está dividido en los siguientes epígrafes:

GEO 1. Construcciones geométricas con GeoGebra.
GEO 2. Utilización de los teoremas de Pitágoras y Tales en mediciones indirectas.
GEO 3. Polígonos. Definiciones básicas. Resultados sobre cuadriláteros.
GEO 4. Geometría de la circunferencia.
GEO 5. Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos.

La Geometría fue en sus comienzos el arquetipo del pensamiento abstracto y de la belleza. En el siglo XIX se demostró la existencia de "otras geometrías" (no euclídeas) y se tambalearon los cimientos de la Matemática. Durante el siglo XX, los matemáticos estuvieron ocupados en fijar y reforzar las bases de su doctrina y evitaron las engañosas imágenes. Se declaró la muerte de Euclides. Las pedagogías de finales de siglo se impregnaron de ese celo iconoclasta y la Geometría casi llegó a desaparecer de las escuelas o a hacerlo acompañada necesariamente del Álgebra y del Análisis. Hora es de devolverla al estrado, si no con sus antiguas pompas, al menos con el reconocimiento a sus métodos y su importancia en la formación del razonamiento, dentro de lo que ahora se llama "Aprender a pensar". Si Poincaré decía que "la Geometría es el arte de pensar bien y dibujar mal", hoy hay software que nos permite dibujar bien y pensar mejor. Liberada de una excesiva formalidad, innecesaria en esta etapa, la Geometría crea una armónica simbiosis entre forma y medida.

El teorema de Pitágoras, el teorema de Tales, el área del círculo, el volumen de la pirámide, el trazado de tangentes a una circunferencia, ..., forman parte de la cultura general exigible al ciudadano medio, y resulta difícil escuchar a Alejandro Casona pronunciar su "Nadie entre que sepa Geometría", salvo entendiendo la frase como la poética e ilusa receta de escribir teatro sin atenerse a normas concebidas.

La variedad de métodos y de geografías de la Geometría provoca algo de desconcierto en el neófito a la hora de elegir las armas y el camino hacia la solución de los problemas y, aunque no es desdeñable el uso de la memoria, ésta debe ser acompañada tanto de recursos nemotécnicos (entre ellos el conocimiento de las raíces etimológicas de los términos) como de imágenes que promuevan por analogía el uso de fórmulas y razonamientos, haciendo poco justificable el olvido de ciertos resultados o la confusión entre fórmulas de longitud, áreas o volúmenes.

Esperamos que esta pequeña colección de problemas ilustre alguna de las técnicas más usuales de esta materia y a su vez haga ver su utilidad y su armonía. Hemos procurado que las soluciones (dentro de su necesariamente limitado espacio) dejen ver el hilo de los razonamientos y que se pueda disfrutar de ellos.

GeoGebra

GeoGebra es un programa de geometría dinámica libre.

Todos los programas de geometría dinámica (GeoGebra, Cabri, Sketchpad, Cinderella, etc….) permiten, después de haber hecho una construcción geométrica, mover algunos elementos de la construcción y observar cómo se modifica toda la construcción dinámicamente al alterar los datos iniciales. Podríamos decir que en un programa de geometría dinámica se utilizan una serie de objetos elementales: puntos, rectas, circunferencias…..a partir de los cuales se realizan distintas construcciones estableciendo relaciones geométricas entre los elementos que intervienen, de modo que al mover cualquier objeto elemental se mantienen las relaciones geométricas existentes entre los elementos de la construcción.

Una característica común de todos los programas de geometría dinámica es la facilidad con la que se pueden utilizar, de manera que a partir de unas breves indicaciones y unas pocas instrucciones se pueden realizar las primeras construcciones.

Todos los problemas presentados se pueden trabajar con cualquiera de los programas anteriormente citados, hemos elegido GeoGebra por ser un programa de uso libre muy fácil de manejar. Un manual básico para utilizarlo se puede obtener en:

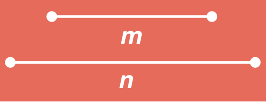
http://www.geogebra.org/

Además de hacer la construcción geométrica con GeoGebra en todos los problemas propuestos se trata de encontrar el razonamiento matemático adecuado para su demostración.

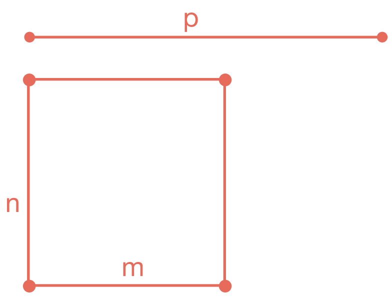
Bloque II. Enunciados

GEO 1. Construcciones geométricas con GeoGebra

1. Dados dos segmentos de longitudes m y n, respectivamente, construye el segmento media geométrica de longitud $\sqrt{m \cdot n}$. Indica cómo usar el resultado anterior para hallar las medidas $\sqrt{n}$, donde n es un número natural positivo.
Usa también la construcción para obtener un cuadrado equivalente (de igual área) al rectángulo de lados m y n.



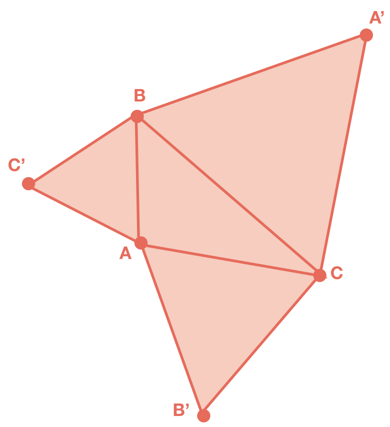
2. Dado un rectángulo de lados m y n, construye un rectángulo equivalente de lado p.



3. En un triángulo cualquiera ABC, construye el ortocentro H, el baricentro G y el circuncentro F. Comprueba que están alineados (la recta que pasa por G, F y H se llama recta de Euler). Mide los segmentos HG y GF y calcula el cociente de sus medidas. Tira ahora de uno de los vértices del triángulo y observa que se mantiene la proporción. Fija de nuevo un triángulo ABC y construye el triángulo definido por sus puntos medios. Razona en el nuevo dibujo las relaciones observadas de F, G y H.

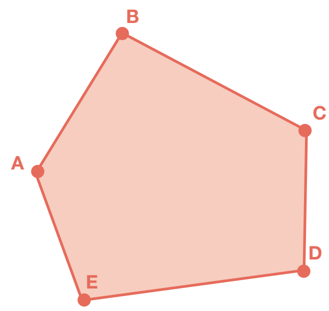
4. **Problema de Napoleón.**

Dado un triángulo cualquiera ABC, sobre cada lado construye triángulos equiláteros hacia afuera ABC', BCA' y CAB'. Comprueba que los centros de los equiláteros forman así mismo un triángulo equilátero. Comprueba que las circunferencias circunscritas a estos equiláteros se cortan en un punto T. Comprueba que T es también la intersección de los segmentos AA', BB' y CC'. Comprueba también que desde T se ven los lados de ABC con un ángulo de 120º.

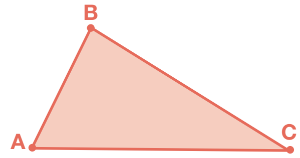


5. **Problema de Fermat.**
Seguimos en el dibujo del problema anterior. Tira de un vértice para que el triángulo no tenga un ángulo mayor de 120º. Dibuja un punto P dentro del triángulo, y calcula la suma de distancias de P y de T a los vértices A, B y C. Comprueba, moviendo P, que la suma de las distancias es mayor que la suma de las distancias de T.

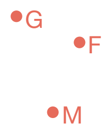
6. **Dado el pentágono convexo ABCDE, encuentra un cuadrilátero con igual área.**



7. **Dado un triángulo ABC, dibuja un hexágono convexo de igual área.**

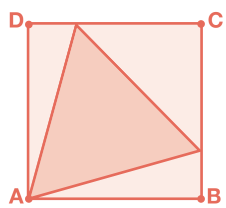


8. **Construye un triángulo conociendo su circuncentro F, su baricentro G y un punto medio M de un lado.**



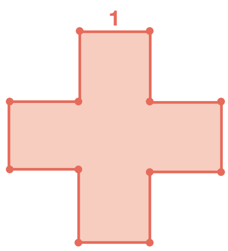
9. **Construye un rectángulo áureo, sabiendo que sus lados están en proporción $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.**

10. **Dado un cuadrado ABCD, construye un triángulo equilátero inscrito en el cuadrado y que tenga A como vértice.**



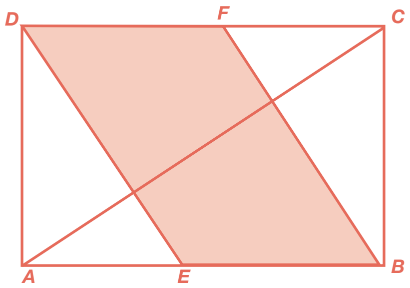
11. **Usando la igualdad $5 = 2^2 + 1^2$, trocea un cuadrado y con los trozos forma cinco cuadrados iguales.**

12. **Trocea una cruz griega de lado 1 en cuatro trozos y con ellos forma un cuadrado.**

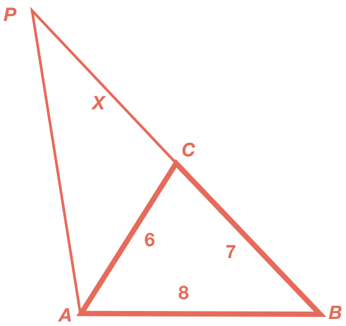


GEO 2. Teoremas de Pitágoras y Tales

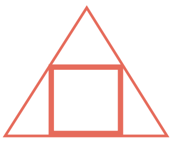
1. **En el rectángulo que se muestra en la figura, *DE* y *FB* son perpendiculares a *AC*. Si *AB* = 18 cm y *BC* = 12 cm, calcula la longitud del segmento *EB* y el área del paralelogramo *EBFD* sombreado.**



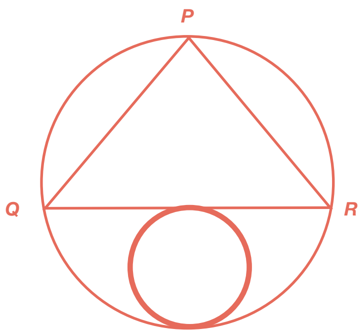
2. **Prolongamos el lado *BC* del triángulo *ABC* hasta un punto P de forma que el triángulo *PAB* sea semejante al triángulo *PCA*. Si *AB* = 8, *BC* = 7 y *CA* = 6, calcula la longitud de *PC*.**



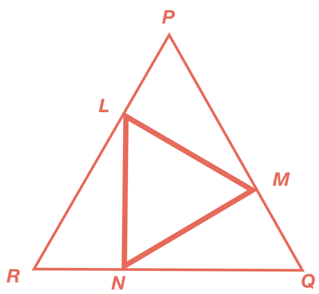
3. **Un cuadrado de lado 1 m está inscrito en un triángulo equilátero como se muestra en la figura. ¿Cuál es la longitud del lado del triángulo?**



4. **En una circunferencia de radio 6 inscribimos el triángulo isósceles *PQR* en el que *PQ* = *PR*. Una segunda circunferencia es tangente a la primera y tangente a la base *QR* del triángulo en su punto medio, como se muestra en la figura. Si la longitud de *PQ* es $4\sqrt{5}$, ¿cuál es el radio de la circunferencia pequeña?**

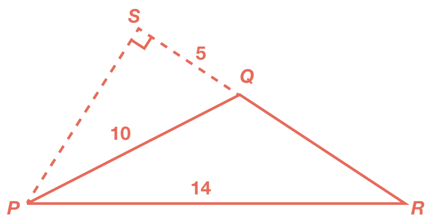


5. **El triángulo equilátero *LNM*, inscrito en otro triángulo equilátero *PRQ*, tiene un área igual a 7 cm². Si el lado *LN* es perpendicular al lado *RQ*, ¿cuál es el área del triángulo grande *PRQ*?**



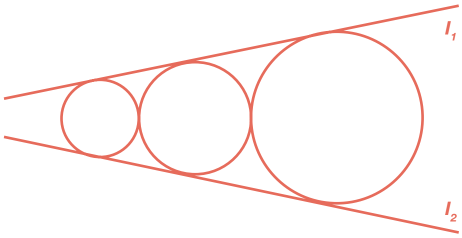
6. **En una circunferencia tenemos dos cuerdas paralelas de longitudes 10 cm y 14 cm que distan 6 cm entre sí. Halla la longitud de la cuerda paralela a ambas y que equidista de ellas.**

7. En el triángulo PQR, $PR = 14$ y $PQ = 10$.
Si prolongamos RQ hasta que corte en S a la perpendicular PS, resulta que $QS = 5$. ¿Cuál es el perímetro del triángulo PQR?

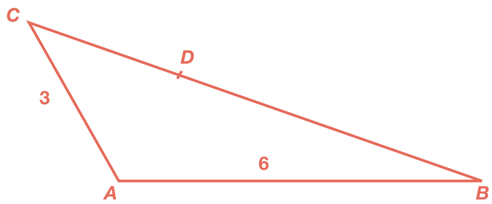


8. En un día soleado, reposa sobre un campo horizontal una gran esfera. En cierto momento, la sombra de la esfera llega hasta una distancia de 10 m del punto donde dicha esfera toca el suelo. En el mismo instante, un bastón de 1 m, colocado verticalmente, produce una sombra de 2 m. ¿Cuál es el radio de la esfera?
(Suponemos que los rayos del Sol son paralelos y que el bastón lo podemos representar por un segmento).

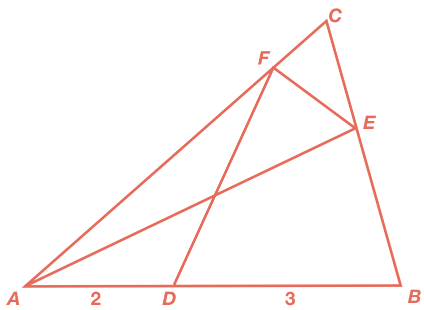
9. Las tres circunferencias de la figura adjunta son tangentes a las rectas l_1 e l_2 y además, cada una de ellas es tangente a la anterior. Si el radio de la mayor es 9 y el de la menor 4, ¿cuál es el radio de la del medio?



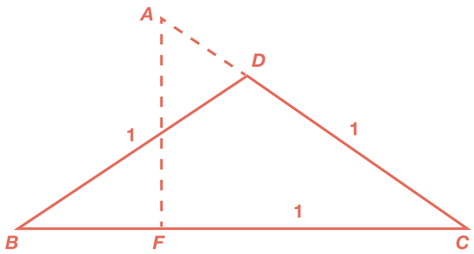
10. Tomamos un punto D en el lado CB de un triángulo ABC en el que $AC = 3$ y $AB = 6$. Si $\angle CAD = \angle DAB = 60º$, calcula la longitud del segmento AD.



11. El área del triángulo ABC de la figura es 10. Los puntos D, E y F, todos distintos de A, B y C, están, como se observa, en los lados AB, BC y CA respectivamente, siendo $AD = 2$ y $DB = 3$. Si el triángulo ABE y el cuadrilátero $DBEF$ tienen áreas iguales, ¿cuál es el valor de esta área?



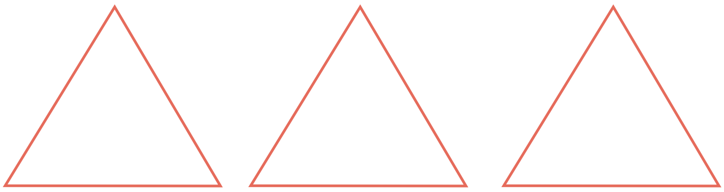
12. En el triángulo isósceles BCD de la figura, sus lados iguales miden $BD = DC = 1$. Por un punto F del lado BC, situado a 1 de distancia del vértice C, se traza una perpendicular a este lado y corta a la prolongación del lado DC en un punto A de manera que el triángulo ABC es rectángulo. Calcula la longitud de AC y de BC.



GEO 3. Polígonos. Cuadriláteros

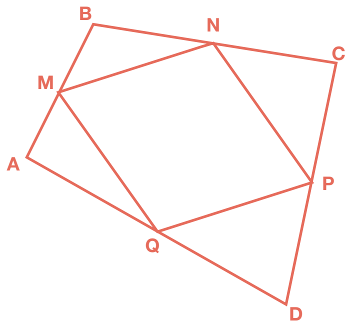
1. **Un triángulo cualquiera puede ser dividido en cuatro triángulos iguales semejantes al de partida. Un triángulo equilátero puede ser dividido en tres triángulos isósceles iguales, y un triángulo isósceles puede ser dividido en dos triángulos rectángulos iguales.**

Divide cada uno de los tres triángulos equiláteros dados en veinticuatro triángulos rectángulos iguales. Hazlo de tres formas diferentes.



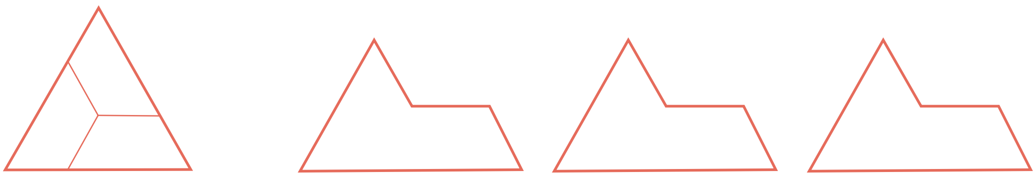
2. **Unimos en el sentido de avance de las agujas del reloj los puntos medios de un cuadrilátero convexo (según aparece en el dibujo). Prueba que el cuadrilátero obtenido es un paralelogramo.**

¿Cuál es la relación de áreas entre los dos cuadriláteros?

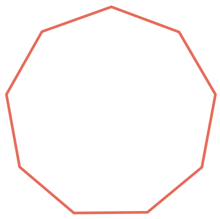


3. **Dividimos un triángulo en tres trapecios isósceles iguales. Llamamos esfinges a las figuras formadas por dos de ellos.**

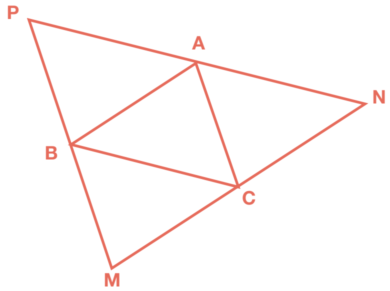
Divide la primera esfinge de abajo en seis triángulos equiláteros iguales, la segunda esfinge en cuatro esfinges iguales y la tercera esfinge en ocho trapecios isósceles.

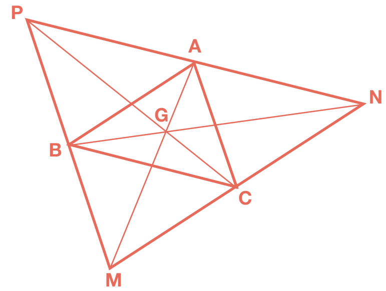


4. **Razona cómo calcular el ángulo interior de un polígono regular de *n* lados.**

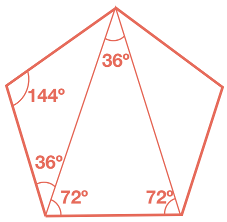


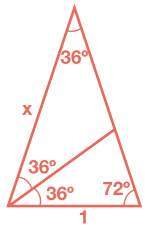
5. Ya sabes, y ahora queremos que demuestres, que las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto G (baricentro) y que la distancia de un vértice a G es dos tercios de la longitud de la mediana correspondiente. Si el corte de dos medianas tiene esa propiedad de distancia, la tercera tendrá que pasar también por ese punto. Para probar esa proporción de medidas te proponemos usar un triángulo MNP y el que se obtiene uniendo sus puntos medios.





6. A los triángulos isósceles con un ángulo de 36º los llamamos áureos. Los vemos aparecer en el pentágono regular. Se llama número de oro (y se denota por la letra griega ϕ) a la razón entre el lado grande y el pequeño. A partir de la descomposición del triángulo áureo de la derecha en dos triángulos áureos, calcula el valor de ϕ.





7. a) Iguales por lados perpendiculares

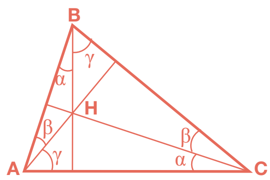
En un triángulo acutángulo dibujamos su ortocentro H y lo unimos con segmentos a los vértices. Prueba que se da la relación de ángulos del dibujo.

b) Iguales por relación cíclica algebraica

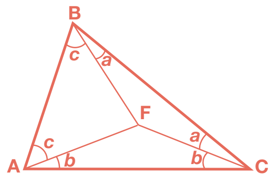
En el mismo triángulo dibujamos su circuncentro F y lo unimos también con los vértices, obteniéndose la relación de ángulos del dibujo.

Demuestra algebraicamente que: $\alpha = a$, $\beta = b$ y $\gamma = c$.

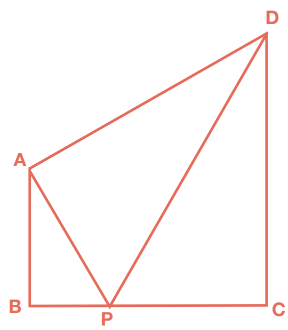
a)



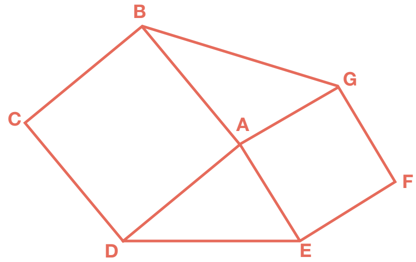
b)



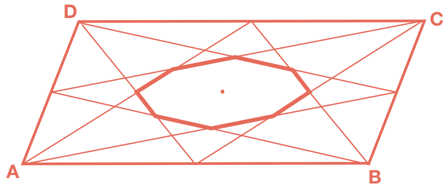
8. Los tres triángulos de la figura son rectángulos y semejantes. Si el triángulo ABP tiene de área 12 cm² ¿cuál es el área del trapecio *ABCD*?



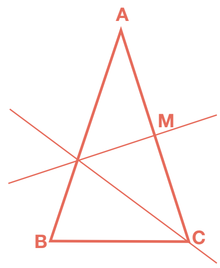
9. **El dibujo de la derecha está formado por dos cuadrados y dos triángulos. Razona que los dos triángulos tienen igual área.**



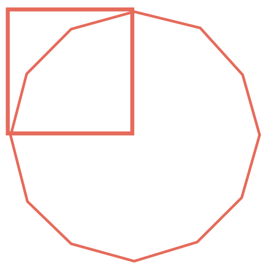
10. **En un paralelogramo se une cada vértice con los puntos medios de los lados no contiguos envolviendo dichos segmentos un octógono. Dividiendo este octógono en quesitos, calcula su razón de área con el paralelogramo**



11. **En un triángulo isósceles ABC, donde $\overline{AB} = \overline{AC}$, se verifica que la mediatriz del lado AC y la bisectriz de $\hat{C}$ se cortan en el lado AB. Halla sus ángulos.**

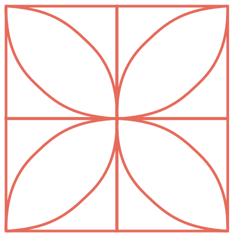


12. **Razona a partir del dibujo, la relación entre las áreas del dodecágono regular y el cuadrado de lado igual al radio de la circunferencia circunscrita.**

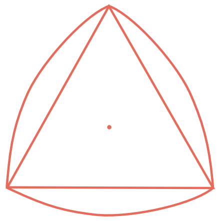


GEO 4. La circunferencia

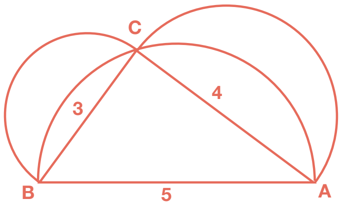
1. **En el dibujo, trazando semicircunferencias con centro los puntos medios de un cuadrado de lado 2 dm, hemos dibujado una flor de cuatro pétalos. ¿Cuál es su área?**



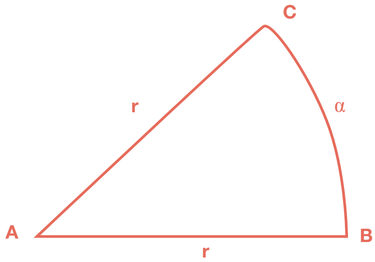
2. **Haciendo centro en los vértices de un triángulo equilátero de lado 2 dm hemos dibujado arcos de vértice a vértice. La curva así obtenida es de anchura constante. ¿Qué área encierra?**



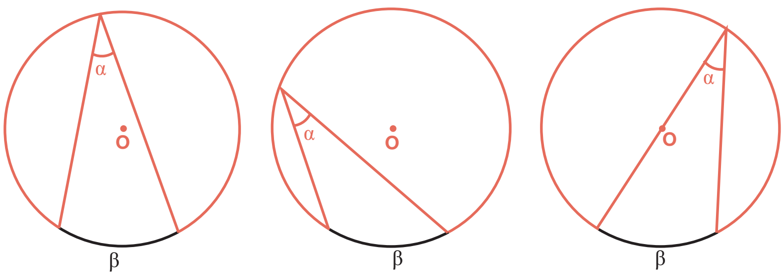
3. **En el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, trazamos semicircunferencias con centro en los puntos medios de los lados como se ve en el dibujo. Las dos lunas formadas son conocidas como lúnulas de Hipócrates. ¿Cuál es la suma de sus áreas?**



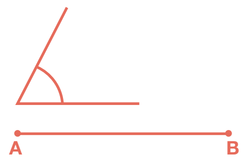
4. **Llamamos radián al ángulo de un sector circular cuyo arco mide lo mismo que el radio. Así la circunferencia mide 2π radianes (es decir, en una circunferencia caben un poco más de 6,28 radios). Sea un sector circular de radio r, ángulo a radianes y perímetro 4 m. Expresa su área en función de r. Razona que el área es máxima cuando $r = 1$.**



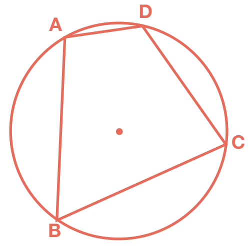
5. **En los tres dibujos podemos ver las diferentes posiciones del centro O de una circunferencia respecto a un ángulo inscrito (dentro, fuera y en un rayo del ángulo). Demuestra en los tres casos que el ángulo inscrito mide la mitad en grados del arco que abarca.**



6. **Construcción del arco capaz**
Halla el lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ve el segmento AB bajo un ángulo α.

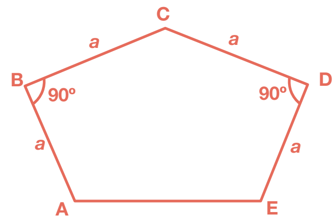


7. Probar que los cuadriláteros convexos inscritos en una circunferencia, son aquellos cuyos ángulos opuestos suman 180º.

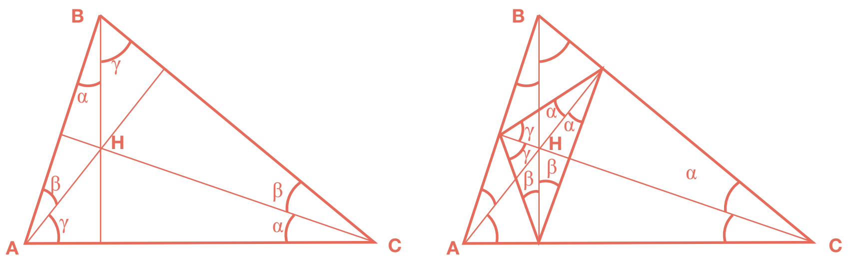


8. Dibuja un pentágono convexo ABCDE de forma que

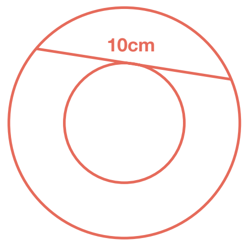
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = a$, y que $\hat{B} = \hat{D} = 90º$.



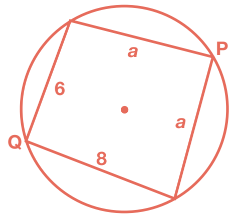
9. En un triángulo acutángulo trazamos las alturas, y marcamos el ortocentro H y los ángulos que forman las alturas con los lados. Con los pies de las alturas construimos el llamado triángulo órtico. Prueba que H es el incentro de este nuevo triángulo (incluso se da la relación de ángulos expresada por los dos dibujos)



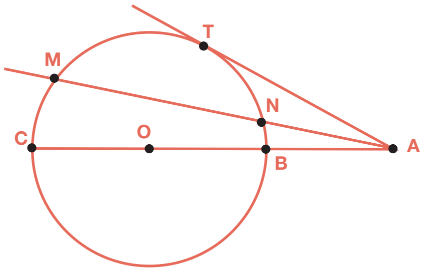
10. En una corona circular, la cuerda de la circunferencia exterior que es tangente a la circunferencia interior mide 10 cm. ¿Cuánto mide el área de la corona circular?

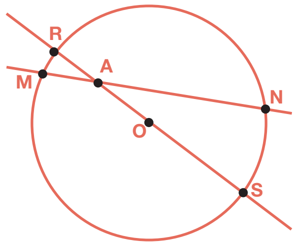


11. El cuadrilátero de la figura está inscrito en una circunferencia y tiene ángulos rectos en P y en Q. Tiene dos lados iguales y los otros dos miden 6 y 8 cm. ¿Cuál es, en cm^2, su área?



12. **Potencia de un punto respecto a una circunferencia**
Desde un punto A exterior a una circunferencia *C*, trazamos una secante que la corta en *M* y *N*, y una tangente en *T* a dicha circunferencia.
Prueba que se tiene la igualdad de producto de distancias: d(*A, N*) · d(*A, M*) = d(*A, T*)^2.
Este invariante métrico se conoce como “la potencia de un punto respecto a una circunferencia”. Exprésalo en función del radio y la distancia del centro al punto.
El concepto de potencia de un punto respecto a una circunferencia *C* puede ser generalizado para puntos interiores y para puntos de la circunferencia (en estos últimos es natural definir la potencia como 0)
No costará mucho probar que los triángulos *AMR* y *ANS* son semejantes y que por ello $\overline{AM}\cdot\overline{AN}=\overline{AR}\cdot\overline{AS}$. Este producto con signo menos es igual a $\overline{OA}^2 - R^2$, y es la potencia de A con respecto a la circunferencia C. Su carácter negativo es interpretado como debido a la distinta orientación de los segmentos AM y AN.





GEO 5. Cuerpos Geométricos

Para la obtención de áreas o volúmenes de figuras semejantes actuaremos cogiendo figuras con medidas lineales cómodas para el cálculo, y luego aplicaremos la razón de semejanza al cuadrado o al cubo según el caso.

1. **Área del triángulo equilátero de lado *l*. Área del hexágono regular de lado *l*.**

2. **Área del octógono regular de lado *l*.**

3. **Área del dodecágono regular de lado *l*.**

4. **Área del triángulo de vértices A(2, 7), B(6, –1) y C(13, 4)**

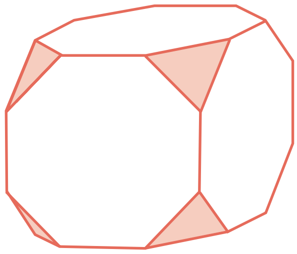
5. **Volumen del tetraedro regular de lado *l*.**

6. **Volumen del octaedro regular de lado *l*.**

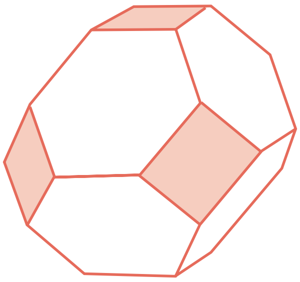
7. **Volúmenes de los sólidos obtenidos al girar el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 alrededor de uno de sus lados.**

8. **Volumen del tetraedro regular truncado de lado *l*.**

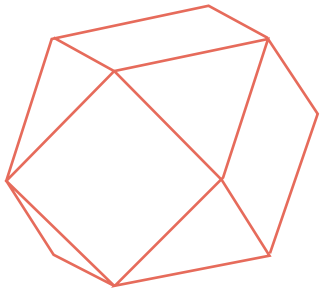
9. **Volumen del cubo truncado de lado *l*.**



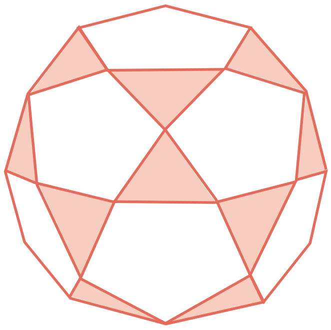
10. **Volumen del octaedro regular truncado de lado *l*.**



11. **Volumen del cuboctaedro de lado *l*.**



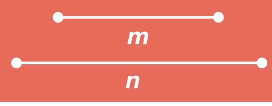
12. **Usando la fórmula de Euler y la uniformidad de los vértices, calcula el número de caras (triángulos y pentágonos) el número de vértices y el de aristas del icosidodecaedro.**



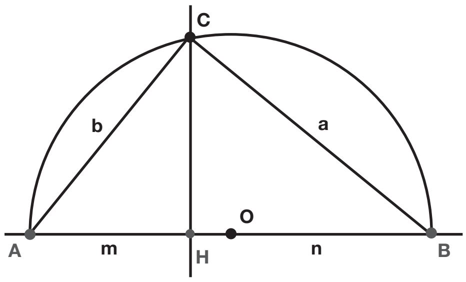
Bloque II. Soluciones

GEO 1. Consutrucciones geométricas con GeoGebra

1. **Dados dos segmentos de longitudes *m* y *n*, respectivamente, construye el segmento media geométrica de longitudes $\sqrt{m \cdot n}$. Indica cómo usar el resultado anterior para hallar las medidas $\sqrt{n}$, donde *n* es un número natural positivo.**
Usa también la construcción para obtener un cuadrado equivalente (de igual área) al rectángulo de lados *m* y *n*.

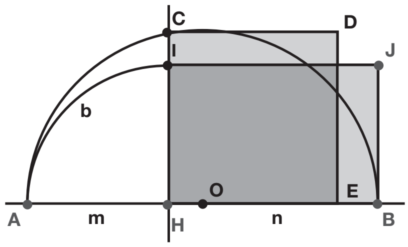


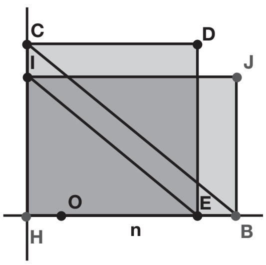
a) Llevamos los segmentos uno a continuación de otro sobre una misma recta, teniendo *m* = AH, *n* = HB.
b) Con centro en el punto medio O del segmento AB trazamos una semicircunferencia de diámetro AB.
c) Por H levantamos una perpendicular al segmento AB. Esta perpendicular corta a la semicircunferencia en un punto C.
d) Al trazar los segmentos CA y CB, se forma un triángulo rectángulo en el que CH = $\sqrt{m \cdot n}$

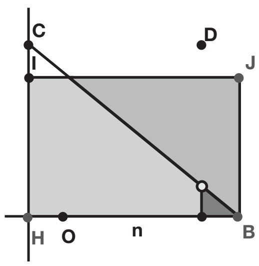


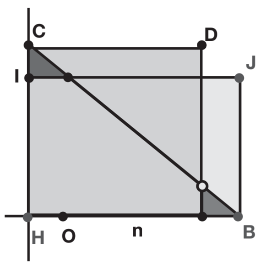
Podemos aplicar el resultado anterior al cálculo de medidas $\sqrt{n}$, basta con descomponer *n* en producto de dos números lo más parecidos posible (para que el dibujo de la construcción sea más pequeño) o en el caso peor tomar $n = 1 \cdot n$.

Para hallar un cuadrado equivalente a un rectángulo *m* x *n*, bastará con que, en la construcción anterior, giremos –90º con centro en H, el segmento AH, y acabemos de construir el rectángulo con vértices B, H, I, y el cuadrado de lado CH.
La misma construcción de la cuadratura del rectángulo sirve si $\sqrt{m \cdot n} < n < 2\sqrt{m \cdot n}$, para construir un puzzle de intercambio de una pieza a otra a partir del trazado de los segmentos IE y CB que son paralelos, ya que se tiene que: $\frac{IH}{CH} = \frac{EH}{BH}$.

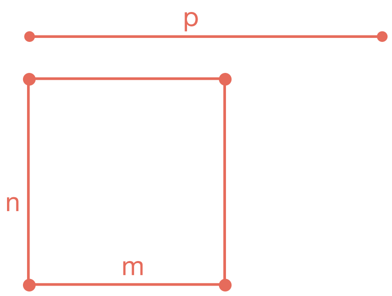




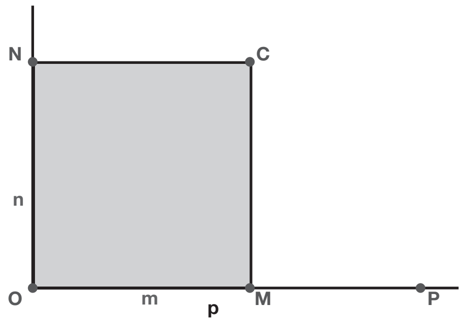


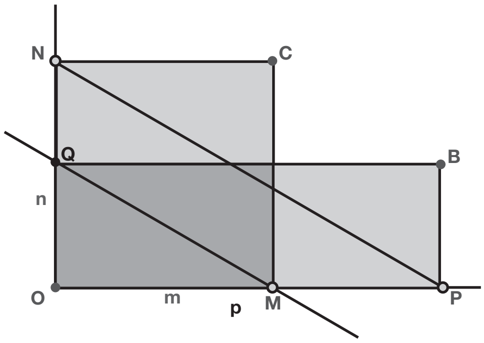


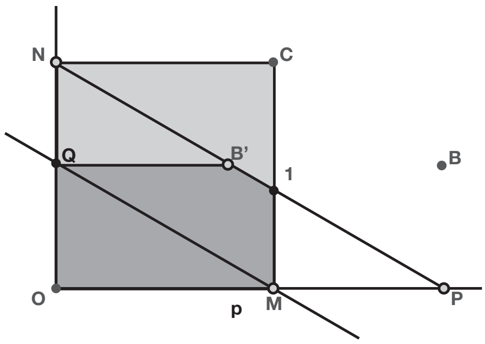
2. **Dado un rectángulo de lados *m* y *n*, construye un rectángulo equivalente de lado *p*.**

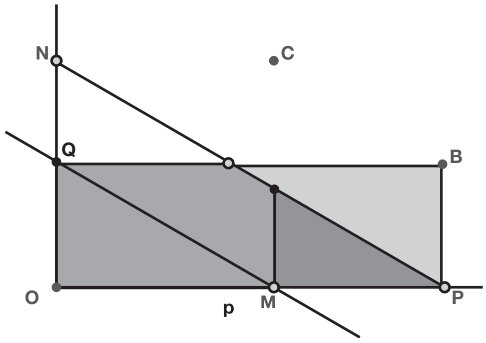


a) Trazamos dos semirrectas perpendiculares de origen O.
b) Llevamos a partir de O el rectángulo OMCN y el segmento OP.
c) Como queremos encontrar q de forma que $m \cdot n = p \cdot q$, y eso puede ser escrito en forma de proporción: $\dfrac{m}{p} = \dfrac{q}{n}$, dibujemos la relación de proporcionalidad uniendo datos correspondientes. Unimos P con N, y por M trazamos una paralela.
d) Obtenemos el punto de intersección Q con la semirrecta ON, siendo q = OQ.
Ya sólo queda dibujar el rectángulo OPBQ.
De nuevo, si $m < p < 2m$, obtenemos un sencillo puzzle de intercambio de rectángulos:

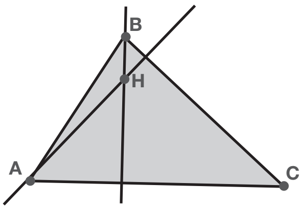




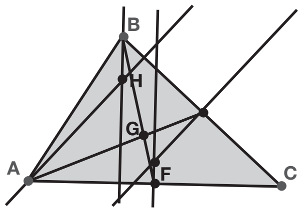




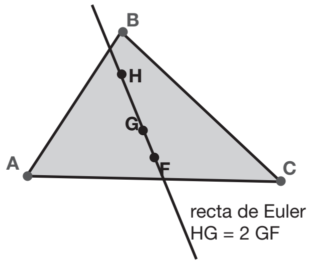
3. **En un triángulo cualquiera ABC, construye el ortocentro H, el baricentro G y el circuncentro F. Comprueba que están alineados (la recta que pasa por G, F y H se llama recta de Euler). Mide los segmentos HG y GF y calcula el cociente de sus medidas. Tira ahora de uno de los vértices del triángulo y observa que se mantiene la proporción. Fija de nuevo un triángulo ABC y construye el triángulo definido por sus puntos medios. Razona en el nuevo dibujo las relaciones observadas de F, G y H.**



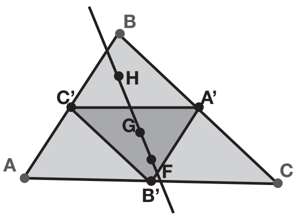
Trazado de dos alturas y ortocentro H

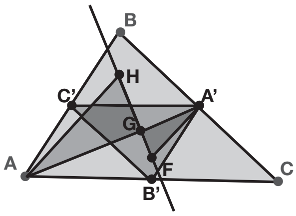


Trazado de dos mediatrices, dos medianas, circuncentro F y baricentro G



Para demostrar que HG =2GF, construimos el triángulo de los puntos medios A'B'C' y comprobamos que F es su ortocentro y G su baricentro. Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes con razón de semejanza 2:1. En esta semejanza, F es el punto correspondiente al punto H, por lo tanto AH =2A'F. Además los triángulos AHG y A'FG son semejantes en razón 2:1. Entonces la mediana AA' corta al segmento FH en el punto G tal que FH = 3FG.
Como G está en el segmento FH, concluimos que el circuncentro F, el baricentro G y el ortocentro H están alineados.

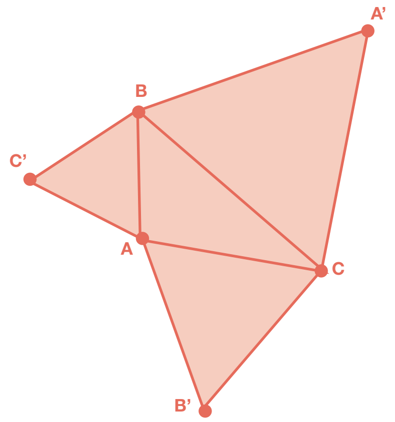




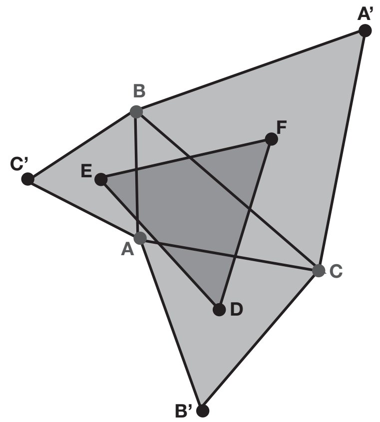
4.

Problema de Napoleón.

Dado un triángulo cualquiera ABC, sobre cada lado construye triángulos equiláteros hacia afuera ABC', BCA' y CAB'. Comprueba que los centros de los equiláteros forman así mismo un triángulo equilátero. Comprueba que las circunferencias circunscritas a estos equiláteros se cortan en un punto T. Comprueba que T es también la intersección de los segmentos AA', BB' y CC'. Comprueba también que desde T se ven los lados de ABC con un ángulo de 120º.



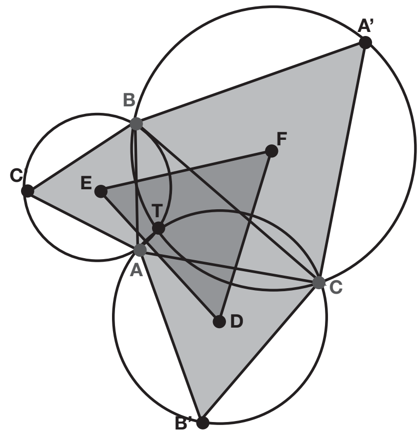
a) Trazamos los centros de los triángulos equiláteros adosados a los lados usando bisectrices.

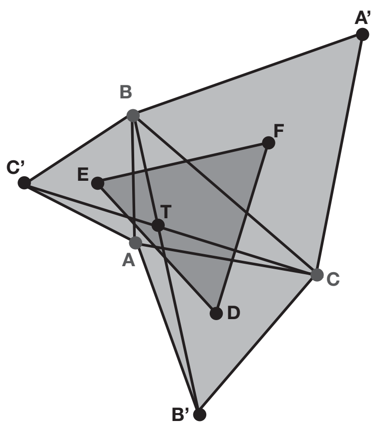


b) Construido el triángulo DEF, viendo lo que miden sus lados podemos comprobar que es equilátero.

c) Trazamos las circunferencias circunscritas y vemos que se cortan en un mismo punto T.

d) Medimos los ángulos con que T "observa" a los lados de ABC, y vemos que los tres miden 120º. Esto es fácil de demostrar ya que el arco BTC y el CA'B suman una circunferencia y CA'B =240º. Es esta posición de T en el corte de dos de las circunferencias lo que garantiza que las tres se cortan en T.





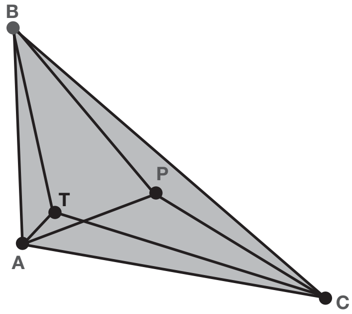
e) Unimos A con T y T con A' y medimos el ángulo ATA' = ATB + BTA' = 120º + 60º (es decir, A, T y A' están alineados). Podemos ver que $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$

5. **Problema de Fermat.**
Seguimos en el dibujo del problema anterior. Tira de un vértice para que el triángulo no tenga un ángulo mayor de 120º. Dibuja un punto P dentro del triángulo, y calcula la suma de distancias de P y de T a los vértices A, B y C. Comprueba, moviendo P, que la suma de las distancias es mayor que la suma de las distancias de T.

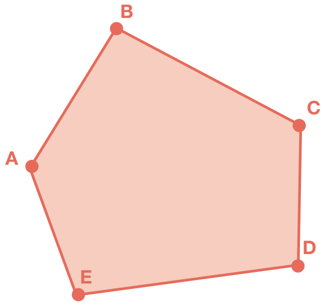
Las propiedades de la construcción anterior se completan con la de ser T el punto con menor suma de distancias a los vértices, siempre que no haya un ángulo mayor de 120°, ya que en ese caso T se sitúa fuera del triángulo ABC. Esta suma mínima es además igual a $\overline{AA'}$.

a) $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{AT} + \overline{BT} + \overline{CT} \leq \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$

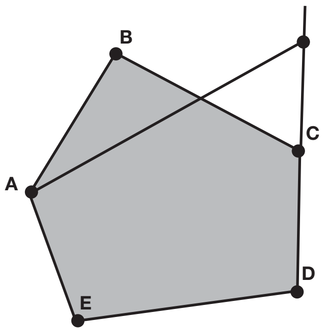
b) Desde T se ven también bajo 120° los lados del triángulo A'B'C'.

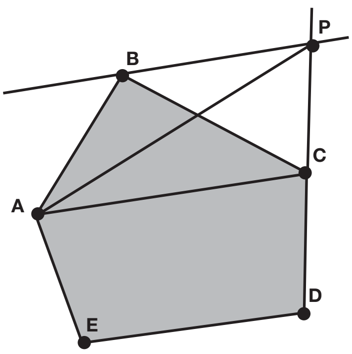


6. **Dado el pentágono convexo ABCDE, encuentra un cuadrilátero con igual área.**



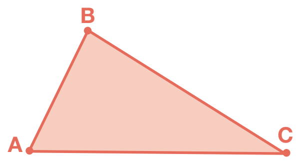
La idea pasa por eliminar un vértice. Por ejemplo, prolongar DC y unir A con la prolongación. El asunto es con qué punto de la prolongación hay que unir para que las áreas perdida y ganada sean iguales.
Un candidato se nos aparece: el corte de la paralela al segmento AC por el vértice B.





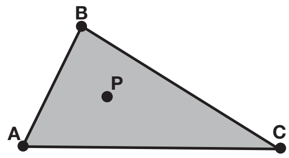
La justificación es sencilla: los triángulos ABC y APC tienen igual área pues tienen la misma base AC y tienen igual altura sobre esa base. Así, si les quitamos la parte común, las no comunes tendrán la misma área, pero esas áreas son la que quitamos y la que ponemos. Por tanto los polígonos ABCDE y APDE tienen igual área.

7. **Dado un triángulo ABC, dibuja un hexágono convexo de igual área.**

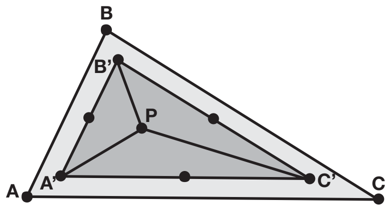


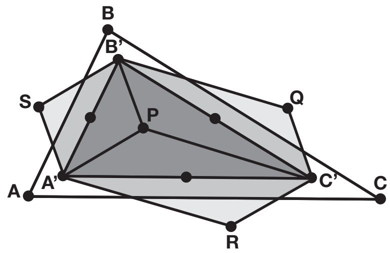
Sabemos que un triángulo puede ser visto como la mitad de un paralelogramo. Si dividimos nuestro triángulo en tres triángulos que puedan ser duplicados hacia fuera como paralelogramos, habremos conseguido un hexágono de área el doble de la del triángulo. Si queremos de área igual, bastará con partir de un triángulo que tenga la mitad de área, por ejemplo uno semejante de razón lineal $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

a) Tomamos un punto P interior al triángulo.
b) Contraemos el triángulo hacia P con razón $\frac{1}{\sqrt{2}}$.



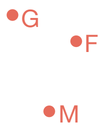
c) A partir de P dividimos el triángulo anterior en tres triángulos.
d) Duplicamos en forma de paralelogramos hacia fuera los tres triángulos.



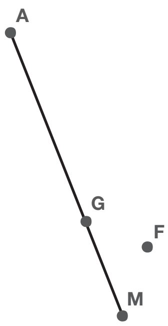


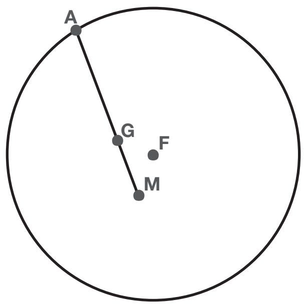
El hexágono A'RC'QB'S tiene igual área que el triángulo de partida ABC.

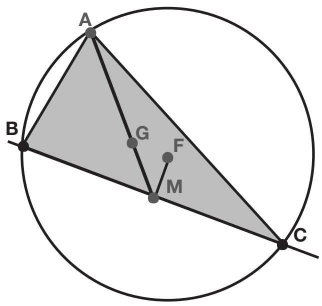
8. **Construye un triángulo conociendo su circuncentro F, su baricentro G y un punto medio M de un lado.**



a) Como conocemos G y M podemos hallar el vértice A opuesto al lado donde está M, ya que $\overline{AG} = 2\,\overline{GM}$.
b) Con centro en el circuncentro F y radio hasta A trazamos la circunferencia circunscrita.
c) Unimos F con M, que es un trozo de mediatriz y por M trazamos la recta perpendicular a FM, recta soporte del lado que contiene a M. Las intersecciones de esta recta con la circunferencia circunscrita nos dan los otros dos vértices B y C del triángulo buscado.

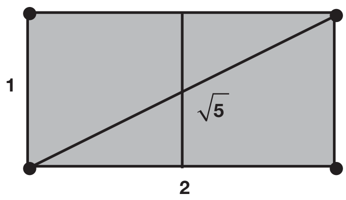






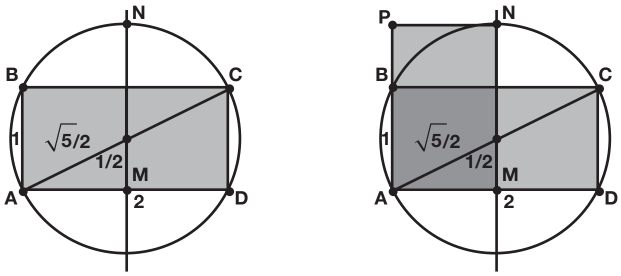
9. **Construye un rectángulo áureo, sabiendo que sus lados están en proporción $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.**

Se trata de construir, a partir de un segmento unidad, otro que mida $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Habrá pues que construir primero la medida $\sqrt{5}$.

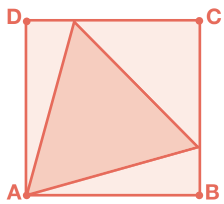


Que puede ser obtenida como diagonal de un rectángulo de lados 2 y 1.
a) Partimos de un cuadrado unidad y lo duplicamos dibujando su simétrico respecto a un lado.
b) Dibujamos una diagonal del rectángulo obtenido.

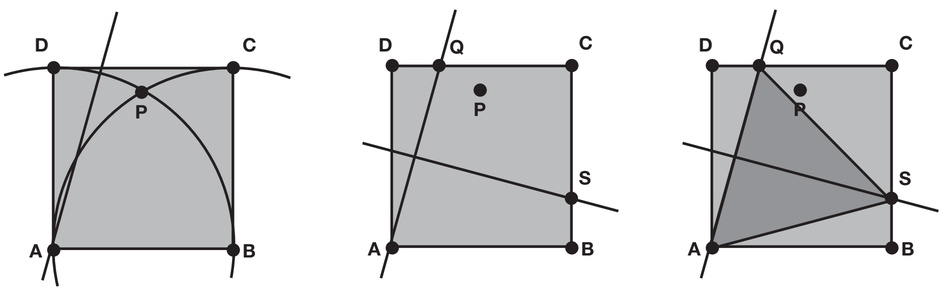
c) El punto medio de la diagonal nos proporciona las me didas $\frac{\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1}{2}$. Lo que tenemos que hacer es ponerlas una a continuación de la otra. Lo hacemos sobre la mediatriz del lado de medida 2.
d) El rectángulo con vértices en A, M y N, es áureo.



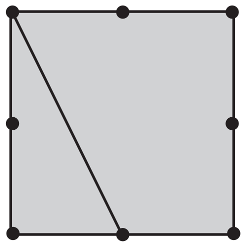
10. **Dado un cuadrado ABCD, construye un triángulo equilátero inscrito en el cuadrado y que tenga A como vértice.**



Supongamos resuelto el problema. El triángulo definirá un ángulo de 60º en A y dejará a ambos lados hasta el cuadrado dos ángulos de 15º. Construyamos uno de esos ángulos.
a) Iniciamos la construcción del triángulo equilátero ABP.
b) Trazamos la bisectriz del ángulo DAP.
c) La intersección de la bisectriz con CD nos da el segundo vértice Q del equilátero buscado.
El tercero, S, podemos obtenerlo como intersección de CB y la mediatriz de AQ.

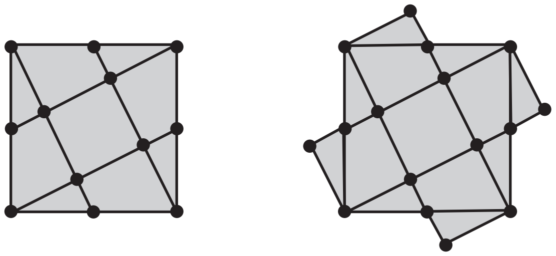


11. **Usando la igualdad 5 = $2^2 + 1^2$, trocea un cuadrado y con los trozos forma cinco cuadrados iguales.**

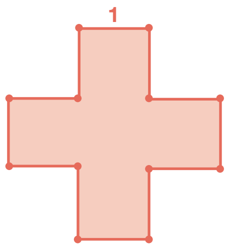


El área del cuadrado inicial será 5 veces el área de uno de los cuadrados finales, y por tanto entre sus lados la razón será de $\sqrt{5}:1$. Busquemos líneas en el cuadrado grande con medidas relacionadas con $\sqrt{5}$.

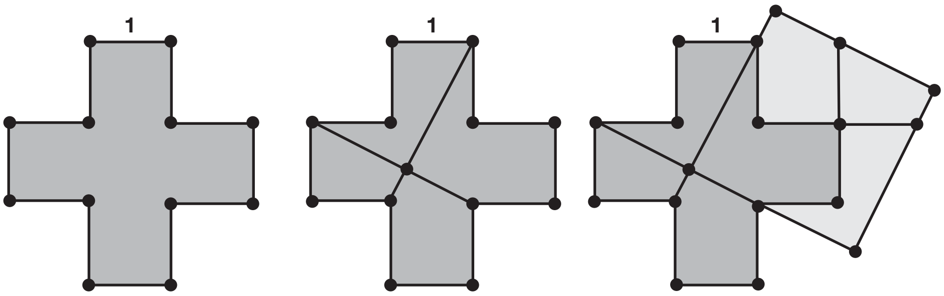
a) Construimos los puntos medios del cuadrado y consideramos un segmento que una un vértice y un punto medio del lado opuesto.
b) Construimos más líneas de éstas, bien paralelas a la anterior o perpendiculares.
c) Ya vemos un cuadrado central y pares de trozos complementarios.



12. **Trocea una cruz griega de lado 1 en cuatro trozos y con ellos forma un cuadrado.**



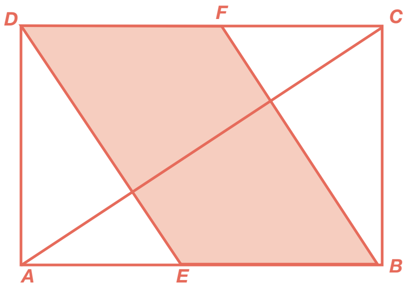
a) Como la cruz griega tiene lado 1, el cuadrado equivalente tendrá de área 5 unidades cuadradas y por tanto su lado medirá $\sqrt{5}$ unidades. Buscamos líneas en el dibujo que midan $\sqrt{5}$.
b) Encontrada una, buscamos otra de igual medida que sea perpendicular a ella y la corte dentro de la cruz griega.
c) Los cuatro trozos obtenidos forman un cuadrado usando sólo traslaciones.



¿Cómo puedes conseguir cuatro trozos iguales?

GEO 2. Teoremas de Pitágoras y Tales

1. **En el rectángulo que se muestra en la figura, *DE* y *FB* son perpendiculares a *AC*. Si *AB* = 18 cm y *BC* = 12 cm, calcula la longitud del segmento *EB* y el área del paralelogramo *EBFD* sombreado.**

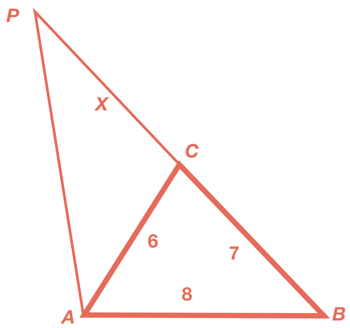


Al ser las rectas *DE* y *FB* perpendiculares a la diagonal, los triángulos *BCF* y *DAE* son semejantes al triángulo *ABC*, ya que tienen los tres ángulos iguales, por lo que podemos poner :

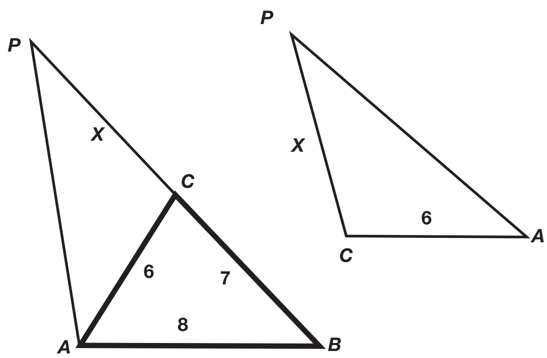
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{FC} \rightarrow \frac{18}{12} = \frac{12}{FC} \rightarrow FC = 8 \text{ cm.}$$

Análogamente *AE* = 8 cm, por lo que la suma de las áreas de dichos triángulos es $12 \cdot 8 = 96$ cm^2 y el área del paralelogramo *EBFD* será $12 \cdot 18 - 12 \cdot 8 = 12 \cdot (18 - 8) = 120$ cm^2.

2. **Prolongamos el lado *BC* del triángulo *ABC* hasta un punto P de forma que el triángulo *PAB* sea semejante al triángulo *PCA*. Si *AB* = 8, *BC* = 7 y *CA* = 6, calcula la longitud de *PC*.**



Para que se vean mejor los lados correspondientes de los triángulos semejantes los dibujamos así:



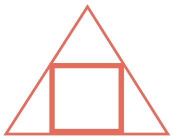
Las proporciones de los lados serán:

$$\frac{AP}{7+x} = \frac{x}{AP} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \rightarrow 4x = 3AP$$

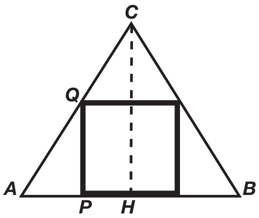
$$\frac{\frac{4}{3}x}{7+x} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{16}{3}x = 21 + 3x \rightarrow$$

$$16x = 63 + 9x \rightarrow x = 9 \text{ cm.}$$

3. **Un cuadrado de lado 1 m está inscrito en un triángulo equilátero como se muestra en la figura. ¿Cuál es la longitud del lado del triángulo?**



Los triángulos *AHC* y *APQ* son semejantes porque *PQ* y *HC* son segmentos paralelos, por lo tanto,



$$\frac{AC}{AH}=\frac{AQ}{AP} \text{ ,es decir, } \frac{l}{l/2}=\frac{AQ}{AP}\Rightarrow AQ=2\cdot AP$$

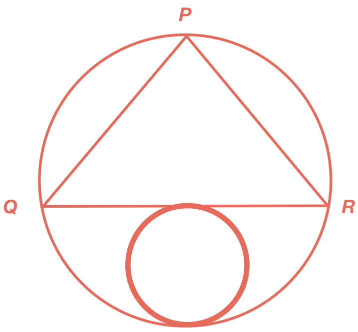
Como el triángulo *APQ* es rectángulo aplicamos el teorema de Pitágoras.

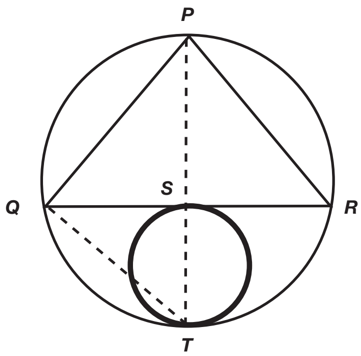
$$AQ^2=AP^2+PQ^2\Rightarrow(2\cdot AP)^2=AP^2+1^2\Rightarrow 3\cdot AP^2=1\Rightarrow AP=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ m}$$

El lado pedido del triángulo equilátero *ABC* es:

$$AB=2\cdot AP+1=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+1=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\text{ m}$$

4. **En una circunferencia de radio 6 inscribimos el triángulo isósceles *PQR* en el que *PQ* = *PR*. Una segunda circunferencia es tangente a la primera y tangente a la base *QR* del triángulo en su punto medio, como se muestra en la figura. Si la longitud de *PQ* es $4\sqrt{5}$, ¿cuál es el radio de la circunferencia pequeña?**





Si trazamos el diámetro *PT* y la cuerda *QT* se forma el triángulo rectángulo *PQT* en el que:

$$QT^2=PT^2-PQ^2\Rightarrow QT=\sqrt{12^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{64}=8$$

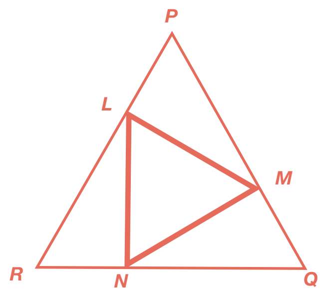
Los triángulos TSQ y TQP son semejantes porque son rectángulos con un ángulo agudo común, por lo tanto:

$$\frac{PT}{QT}=\frac{QT}{TS}\longrightarrow TS=\frac{8\cdot 8}{12}=\frac{16}{3},$$

que es el diámetro de la circunferencia pequeña.

Su radio es $r=\frac{8}{3}$.

5. **El triángulo equilátero *LNM*, inscrito en otro triángulo equilátero *PRQ*, tiene un área igual a 7 cm². Si el lado *LN* es perpendicular al lado *RQ*, ¿cuál es el área del triángulo grande *PRQ*?**

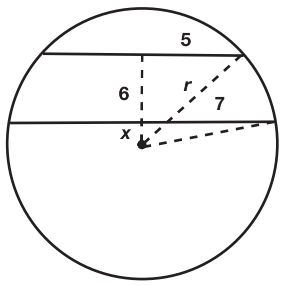


El triángulo rectángulo *RNL* es la mitad de un equilátero por lo que $LR = 2 \cdot RN$. Además el otro cateto es: $LN = \sqrt{LR^2 - RN^2} = \sqrt{3 \cdot RN^2} = \sqrt{3} \cdot RN$

Como el lado del triángulo equilátero grande es $3 \cdot RN$ y el del triángulo equilátero pequeño es $\sqrt{3} \cdot RN$, resulta que la razón de semejanza es $k = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ y la razón de las áreas es $k^2 = 3$. Por lo tanto el área del triángulo grande es 21 cm².

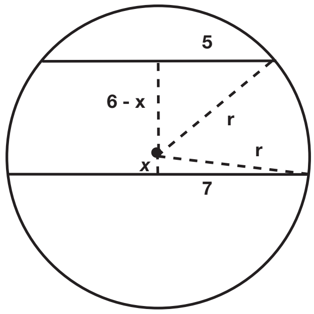
6. **En una circunferencia tenemos dos cuerdas paralelas de longitudes 10 cm y 14 cm que distan 6 cm entre sí. Halla la longitud de la cuerda paralela a ambas y que equidista de ellas.**

Supongamos primero que el centro no está entre las dos cuerdas.
Al trazar dos radios, como se ve en la figura, se forman dos triángulos rectángulos en los que:



$$\left.\begin{array}{r} r^2 = 5^2 + (6+x)^2 \\ r^2 = 7^2 + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 25 + 36 + x^2 + 12x = 49 + x^2 \Rightarrow 12x = -12$$

El valor negativo que se obtiene, $x = -1$, nos indica que el centro tiene que estar entre ambas cuerdas y la situación es la siguiente.



$$\left.\begin{array}{r} r^2 = 5^2 + (6-x)^2 \\ r^2 = 7^2 + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 25 + 36 + x^2 - 12x = 49 + x^2 \Rightarrow 12x = 12$$

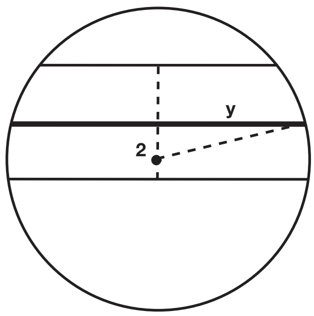
De donde se deduce que $x = 1$ y el radio .

$$r = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\,\text{cm}$$

Llamando *y* a la mitad de la cuerda buscada tenemos,

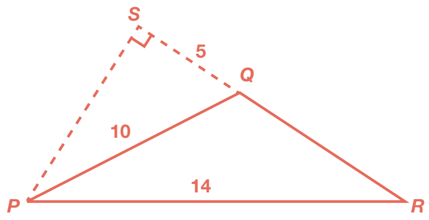
$$y^2 = r^2 - 2^2 \Rightarrow y = \sqrt{50 - 4} = \sqrt{46}\,\text{cm}$$

La longitud de a cuerda buscada es



$$l = 2y = 2\sqrt{46}\,\text{cm}$$

7. **En el triángulo *PQR*, *PR* = 14 y *PQ* = 10. Si prolongamos *RQ* hasta que corte en S a la perpendicular *PS*, resulta que *QS* = 5. ¿Cuál es el perímetro del triángulo *PQR*?**



En el triángulo rectángulo *PSQ*, al aplicar el teorema de Pitágoras se obtiene:

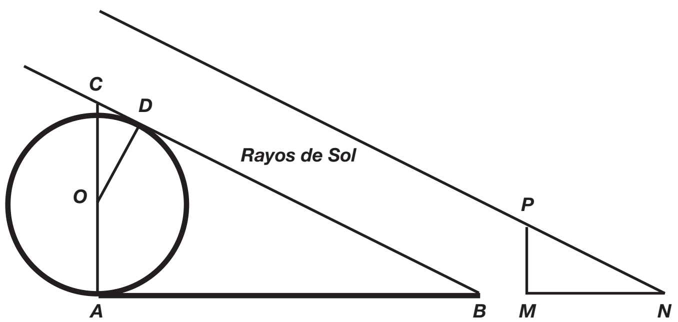
$PS^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \Rightarrow PS = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Aplicando ahora el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo *PSR*,

$SR^2 = PR^2 - PS^2 = 14^2 - \left(\sqrt{75}\right)^2 = 196 - 75 = 121 \Rightarrow SR = 11$

Como $QR = SR - SQ = 11 - 5 = 6$, el perímetro buscado es 14 + 10 + 6 = 30.

8. **En un día soleado, reposa sobre un campo horizontal una gran esfera. En cierto momento, la sombra de la esfera llega hasta una distancia de 10 m del punto donde dicha esfera toca el suelo. En el mismo instante, un bastón de 1 m, colocado verticalmente, produce una sombra de 2 m. ¿Cuál es el radio de la esfera? (Suponemos que los rayos del Sol son paralelos y que el bastón lo podemos representar por un segmento).**



Como los triángulos *ABC, MNP* y *DOC* son semejantes se verifica

$$\frac{AC}{AB} = \frac{MP}{MN} = \frac{CD}{OD}$$

es decir:

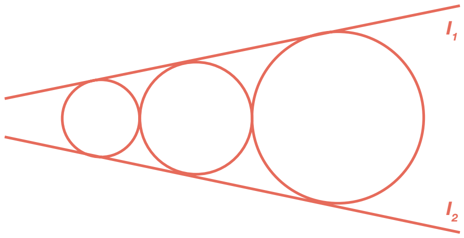
$$\frac{AC}{10} = \frac{1}{2} = \frac{CD}{r} \Rightarrow \begin{cases} AC = 5 \\ CD = \dfrac{1}{2}r \end{cases}$$

Nuevamente mediante semejanza utilizando la proporcionalidad entre las hipotenusas o utilizando el teorema de Pitágoras se determina el radio de la esfera.

$$OC^2 = CD^2 + OD^2 \Rightarrow (5-r)^2 = \left(\frac{1}{2}r\right)^2 + r^2 \Rightarrow r^2 + 40r - 100 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -10\sqrt{5} - 20 \\ r_2 = 10\sqrt{5} - 20 \end{cases}$$

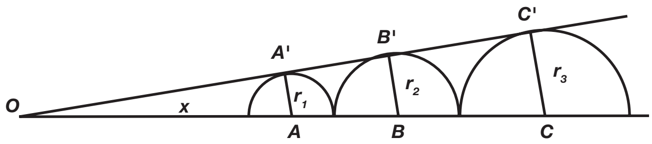
Excluyendo la solución negativa, nos queda que el radio de la esfera es $r = 10\sqrt{5} - 20$ m.

9. **Las tres circunferencias de la figura adjunta son tangentes a las rectas l_1 e l_2 y además, cada una de ellas es tangente a la anterior. Si el radio de la mayor es 9 y el de la menor 4, ¿cuál es el radio de la del medio?**



Si completamos la figura trazando la recta que pasa por los centros, prolongando una de las tangentes hasta cortar a la recta anterior y señalando los radios en el punto de tangencia, como indica la figura inferior, se obtienen tres triángulos rectángulos semejantes, *OAA´*, *OBB´*, *OCC´*, en los que se verifica:

$$\frac{r_1}{x + r_1} = \frac{r_2}{x + 2r_1 + r_2} = \frac{r_3}{x + 2r_1 + 2r_2 + r_3}$$



De la igualdad entre las dos primeras fracciones y $r_1 = 4$, se deduce:

$$4x + 32 + 4r_2 = r_2 x + 4r_2 \longrightarrow r_2 = \frac{4x + 32}{x}$$

y de la igualdad entre primera y tercera fracción y $r_3 = 9$,

$$4x + 32 + 8r_2 + 36 = 9x + 36 \longrightarrow r_2 = \frac{5x - 32}{8}.$$

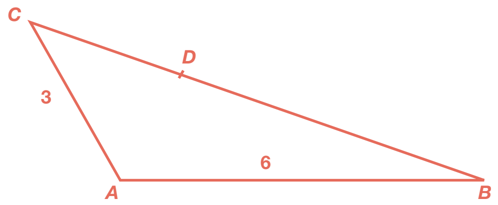
Igualando ambas expresiones se obtiene

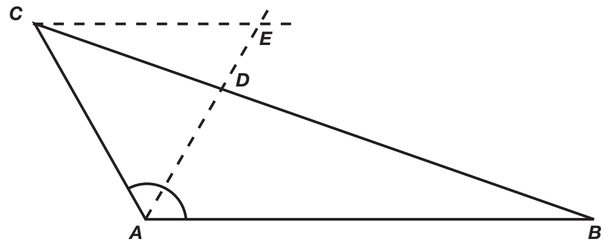
$$\frac{4x + 32}{x} = \frac{5x - 32}{8} \Leftrightarrow 5x^2 - 64x - 256 = 0 \Rightarrow x = \frac{64 \pm 96}{10} = \begin{cases} x_1 = 16 \\ x_2 = -3{,}2 \end{cases}$$

La solución negativa de x no tiene sentido geométrico, y por ello, para $x = 16$ se obtiene:

$$r_2 = \frac{4 \cdot 16 + 32}{16} = 6.$$

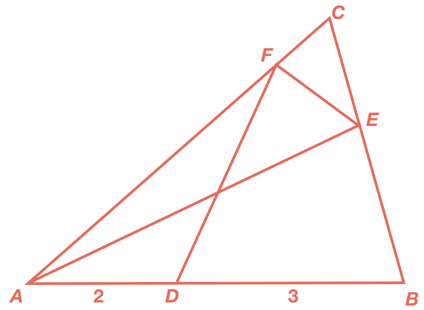
10. **Tomamos un punto D en el lado CB de un triángulo *ABC* en el que *AC* = 3 y *AB* = 6. Si ∠ *CAD* = ∠ *DAB* = 60º, calcula la longitud del segmento AD.**

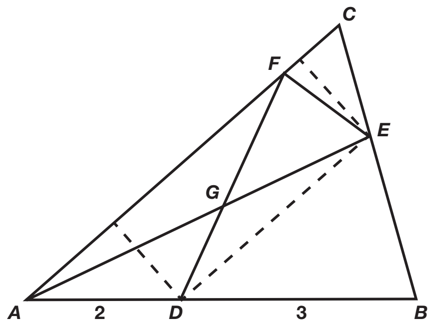




Trazamos por *C* una paralela a *AB* y prolongamos el segmento *AD* para obtener el punto E.
El triángulo *CAE* es equilátero porque ∠*CEA* = ∠*EAB* = 60° y ∠*CAE* = 60º, luego *CE* = 3.
Los triángulos *CDE* y *BDA* son semejantes por tener sus ángulos iguales y como *AB* = 2*EC* la razón de semejanza es 2, por lo que *AD* = 2*DE*. Pero como *AE* = 3, se deduce que *DE* = 1 y *AD* = 2.

11. **El área del triángulo *ABC* de la figura es 10. Los puntos *D*, *E* y F, todos distintos de *A*, *B* y *C*, están, como se observa, en los lados *AB*, *BC* y *CA* respectivamente, siendo *AD* = 2 y *DB* = 3. Si el triángulo *ABE* y el cuadrilátero *DBEF* tienen áreas iguales, ¿cuál es el valor de esta área?**





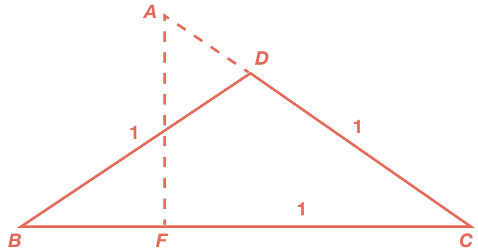
Si tenemos en cuenta que:
Área *ADG* + Área *DBEG* = Área *DBEG* + Área *GEF*,
se deduce que los triángulos *ADG* y *GEF* tienen igual área.
Análogamente observamos que:
Área *AFG*+ Área *GEF* = Área *AFG* + Área *ADG*,
de donde deducimos que los triángulos *AFE* y *AFD* tienen igual área y como tienen la misma base *AF*, su altura será la misma. Eso quiere decir que el segmento *ED* es paralelo al lado *AC*.
Los triángulos *DBE* y *ABC* son semejantes con razón de semejanza

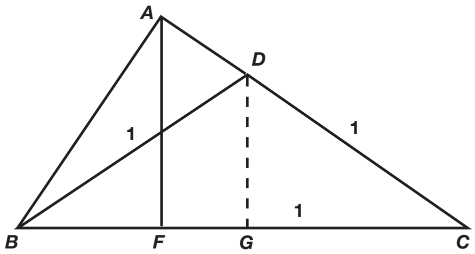
$k = \dfrac{DB}{AB} = \dfrac{3}{5}$ y razón de las áreas $k^2 = \dfrac{9}{25}$

por lo que Área *DBE* = $\dfrac{9}{25} \times 10 = \dfrac{18}{5}$.

Como los triángulos *ABE* y *DBE* tienen igual altura y sus bases respectivas miden 5 y 3, sus áreas estarán en la misma proporción $\dfrac{\text{Área } ABE}{\text{Área } DBE} = \dfrac{5}{3} \rightarrow \text{Área } ABE = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{18}{5} = 6.$

12. **En el triángulo isósceles BCD de la figura, sus lados iguales miden BD = DC = 1. Por un punto F del lado BC, situado a 1 de distancia del vértice C, se traza una perpendicular a este lado que corta a la prolongación del lado DC en un punto A de manera que el triángulo ABC es rectángulo. Calcula la longitud de AC y de BC.**





Reconstruimos la figura y trazamos la altura *DG* del triángulo isósceles *BCD* obteniendo el triángulo *DGC* semejante a *AFC* de donde

$$\frac{DC}{GC} = \frac{AC}{FC} \Rightarrow \frac{1}{GC} = \frac{AC}{1} \Rightarrow \frac{1}{2}BC = \frac{1}{AC}$$

y de aquí $BC = \dfrac{2}{AC}$

Análogamente los triángulos *AFC* y *BAC* son semejantes, por lo que se verifica que

$$\frac{AC}{FC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC \times 1 = \frac{2}{AC} \Rightarrow AC^3 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt[3]{2}$$

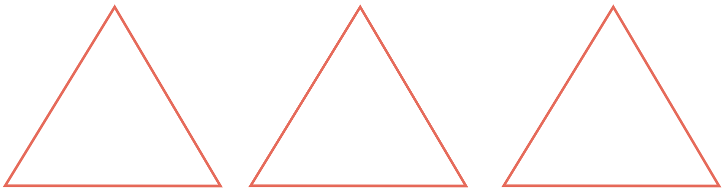
Calculamos ahora el otro lado.

$$BC = \frac{2}{AC} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{4}$$

GEO 3. Polígonos. Cuadriláteros

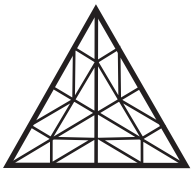
1. **Un triángulo cualquiera puede ser dividido en cuatro triángulos iguales semejantes al de partida. Un triángulo equilátero puede ser dividido en tres triángulos isósceles iguales, y un triángulo isósceles puede ser dividido en dos triángulos rectángulos iguales.**

Divide cada uno de los tres triángulos equiláteros dados en veinticuatro triángulos rectángulos iguales. Hazlo de tres formas diferentes.

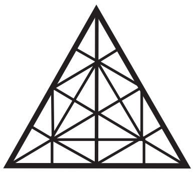


Tenemos que dividir cada triángulo equilátero en 24 triángulos iguales, sabiéndolo hacer en cuatro (para cualquier triángulo) en tres (para equiláteros) y en dos (para isósceles). Podemos descomponer 24 atendiendo a esos números de divisiones, pero además deberemos tener en cuenta el orden de los factores.

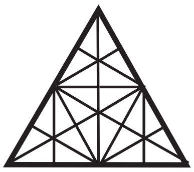
$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$, significa que primero hemos dividido en dos y por tanto pasado a triángulos rectángulos y no podemos continuar con la división en tres. Es decir el 3 no puede venir detrás del 2. Tampoco el 2 puede ir detrás del 2 y ello impide una descomposición del tipo $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ o $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$. Luego las descomposiciones posibles se limitan a:



$3 \cdot 2 \cdot 4$



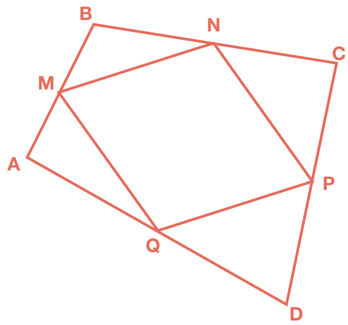
$3 \cdot 4 \cdot 2$



$4 \cdot 3 \cdot 2$

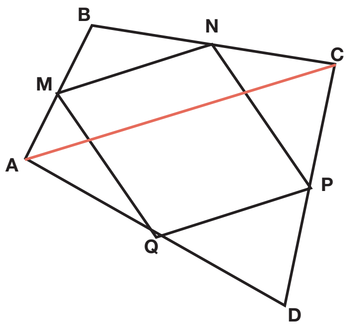
2. **Unimos en el sentido de avance de las agujas del reloj los puntos medios de un cuadrilátero convexo (según aparece en el dibujo). Prueba que el cuadrilátero obtenido es un paralelogramo.**

¿Cuál es la relación de áreas entre los dos cuadriláteros?



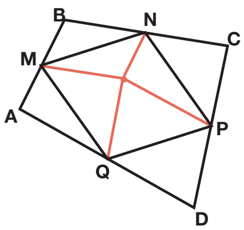
El trazado de líneas auxiliares nos ayudará a demostrar el paralelismo de los lados de MNPQ.

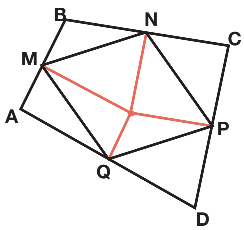
Trazando el segmento $\overline{AC}$, por el teorema de Tales, tenemos que el segmento $\overline{MN}$, que une puntos medios del triángulo ABC, es paralelo a $\overline{AC}$ y además mide la mitad del lado AC. Lo mismo ocurre en el triángulo ACD, el segmento $\overline{QP}$ es paralelo a $\overline{AC}$ y mide la mitad de éste, y por tanto MNPQ es un paralelogramo, ya que $\overline{MN}$ y $\overline{QP}$ son paralelos e iguales.



El área del paralelogramo es la mitad de la del cuadrilátero pues las partes de él contenidas en los triángulos ABC y ACD son mitades en área de los triángulos, al ser paralelogramos de altura y base mitad de las del triángulo correspondiente.

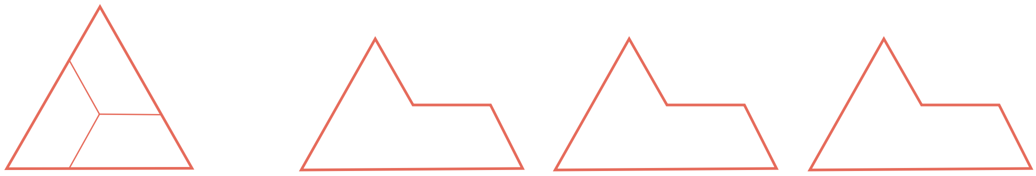
De hecho podemos recomponer el cuadrilátero MNPQ con los triángulos exteriores a él, con dos puzzles diferentes con las mismas piezas.

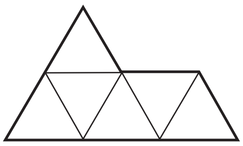




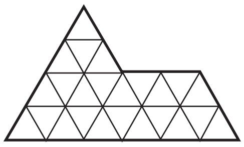
3. **Dividimos un triángulo en tres trapecios isósceles iguales. Llamamos esfinges a las figuras formadas por dos de ellos.**

Divide la primera esfinge de abajo en seis triángulos equiláteros iguales, la segunda esfinge en cuatro esfinges iguales y la tercera esfinge en ocho trapecios isósceles.

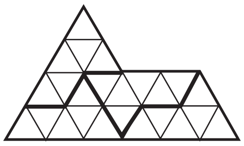




La división de la esfinge en triángulos equiláteros es bastante evidente. En todo caso es la que le corresponde como dos tercios del triángulo equilátero del cual procede y de la división de éste en nueve equiláteros.

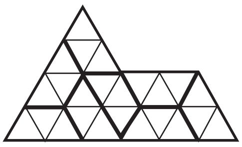


Queremos dividir la esfinge en cuatro esfinges. Podemos empezar por dividir cada uno de los triángulos equiláteros de la división anterior en cuatro y luego ver si hay suerte y los podemos agrupar de seis en seis formando esfinges.

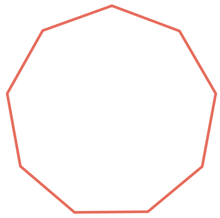


¡Ha habido suerte!

Como una esfinge se divide en dos trapecios isósceles iguales, y ya tenemos la esfinge dividida en cuatro esfinges, es inmediata la división en ocho trapecios isósceles iguales.



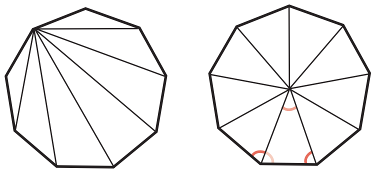
4. **Razona cómo calcular el ángulo interior de un polígono regular de *n* lados.**



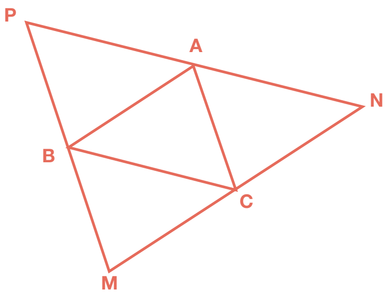
Podemos dividir desde un vértice el polígono en $n-2$ triángulos, con lo que la suma de sus ángulos interiores es $(n - 2) \cdot 180^\circ$, y como todos son iguales, uno de ellos mide $\dfrac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.

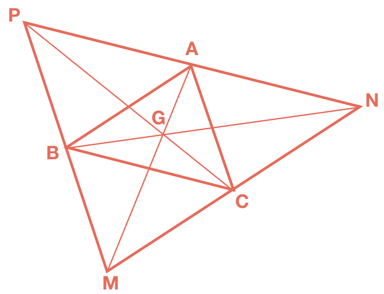
También podemos de partida usar que el polígono es regular, que por ello tiene centro y permite su división en n triángulos isósceles, en los cuales el ángulo distinto es el de reparto: $\dfrac{360^\circ}{n}$.

Los otros dos son iguales a la mitad del ángulo interior y por tanto suman igual que éste, pero su suma es el suplementario del de reparto: $180^\circ - \dfrac{360^\circ}{n}$



5. **Ya sabes, y ahora queremos que demuestres, que las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto G (baricentro) y que la distancia de un vértice a G es dos tercios de la longitud de la mediana correspondiente. Si el corte de dos medianas tiene esa propiedad de distancia, la tercera tendrá que pasar también por ese punto. Para probar esa proporción de medidas te proponemos usar un triángulo MNP y el que se obtiene uniendo sus puntos medios.**

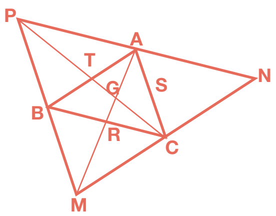




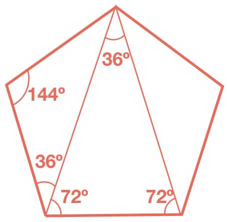
Al ser A, B y C los puntos medios del triángulo MNP, ambos triángulos son semejantes de razón 1 : 2. Las medianas $\overline{PC}$ y $\overline{MA}$ del triángulo MNP se cortan en el mismo punto G que las medianas correspondientes $\overline{CT}$ y $\overline{AR}$ del triángulo ABC, pero la semejanza implica que

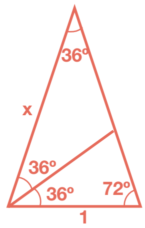
$\overline{PG} = 2\,\overline{GC}$ y como $\overline{PG} + \overline{GC} = \overline{PC}$, y P, G y C están alineados, se tiene que $\overline{PG} = \dfrac{2}{3}\,\overline{PC}$.

Esta colocación de G en la mediana obliga a que la tercera mediana también pase por G, y así las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto y ese punto de intersección G (baricentro) divide a las medianas en proporción 2 : 1 .



6. **A los triángulos isósceles con un ángulo de 36º los llamamos áureos. Los vemos aparecer en el pentágono regular. Se llama número de oro (y se denota por la letra griega ϕ) a la razón entre el lado grande y el pequeño. A partir de la descomposición del triángulo áureo de la derecha en dos triángulos áureos, calcula el valor de ϕ .**

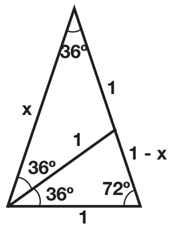




Bastará con que acabemos de medir el resto de los lados de los triángulos del dibujo, para que haciendo uso de la semejanza, y por tanto la proporcionalidad de los lados de los triángulos agudos isósceles del dibujo, podamos calcular x (o $\frac{x}{1} = \phi$).

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1};\ x\cdot(x-1) = 1;\ x^2 - x = 1;\ x^2 - x - 1 = 0;\ = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como x es mayor que 1, la solución buscada es $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$.



7. **a) Iguales por lados perpendiculares**

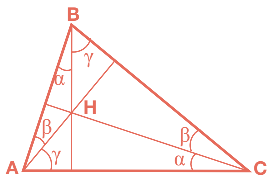
En un triángulo acutángulo dibujamos su ortocentro H y lo unimos con segmentos a los vértices. Prueba que se da la relación de ángulos del dibujo.

b) Iguales por relación cíclica algebraica

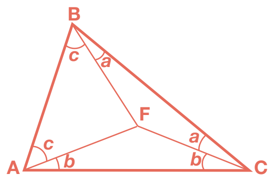
En el mismo triángulo dibujamos su circuncentro F y lo unimos también con los vértices, obteniéndose la relación de ángulos del dibujo.

Demuestra algebraicamente que: $\alpha = a$, $\beta = b$ y $\gamma = c$.

a)



b)



a)

Para probar que el ángulo ABH es igual que ACH, basta con razonar que son agudos y que los lados correspondientes son perpendiculares. En efecto $\overline{BH}$ es perpendicular a $\overline{AC}$, pues $\overline{BH}$ es parte de la altura sobre $\overline{AC}$, y de forma análoga $\overline{CH}$ es perpendicular a $\overline{AB}$.

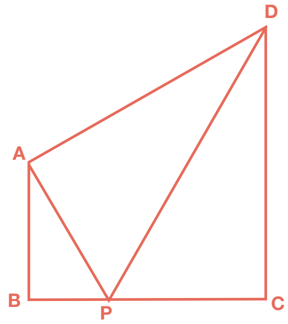
b)

Relacionemos ahora los ángulos de los dos dibujos sobre ABC.

Tenemos que: $\begin{cases} \alpha + \gamma = c + a \\ \gamma + \beta = b + c \\ \beta + \alpha = a + b \end{cases}$

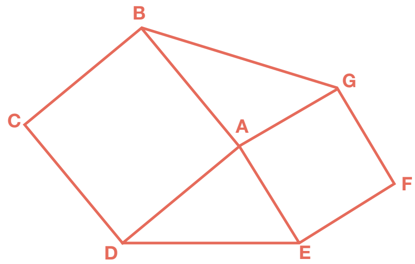
Así, sumando las dos primeras ecuaciones tenemos: $\alpha + 2\gamma + \beta = 2c + a + b$, pero como $\alpha + \beta + \gamma = c + a + b = 90^o$, tenemos que $\gamma = c$. Análogamente sumando otras dos ecuaciones llegamos a la conclusión deseada: $\alpha = a$, $\beta = b$ y $\gamma = c$.

8. **Los tres triángulos de la figura son rectángulos y semejantes. Si el triángulo ABP tiene de área 12 cm² ¿cuál es el área del trapecio *ABCD*?**

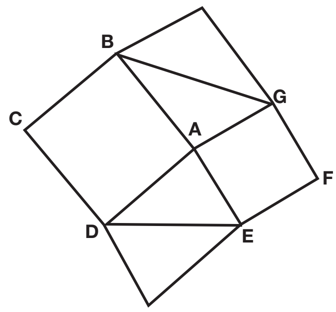


Si los tres triángulos son rectángulos y semejantes, los dos grandes son iguales ya que comparten hipotenusa, y también son iguales sus ángulos en el vértice común P. Como los tres ángulos en P suman 180º y por la semejanza son iguales, cada uno de ellos mide 60º, luego estamos hablando de triángulos cartabones, mitades de equiláteros, y por tanto el lado BP es la mitad de AP, siendo el área de APD cuatro veces el área de ABP, con lo que el área del trapecio es (4 + 4 + 1) veces el área de ABP, es decir $9 \cdot 12$ cm².

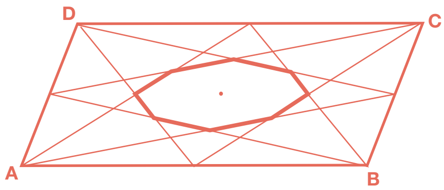
9. **El dibujo de la derecha está formado por dos cuadrados y dos triángulos. Razona que los dos triángulos tienen igual área.**

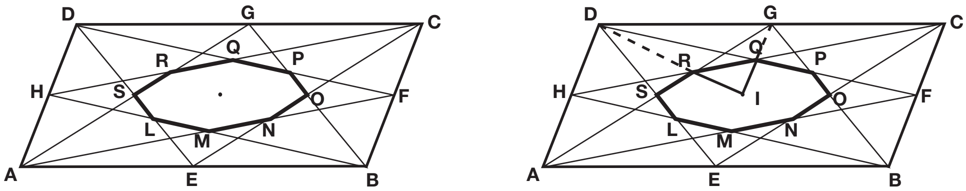


Es fácil darse cuenta que BAG y DAE son ángulos suplementarios, pues junto a dos ángulos rectos suman 360º. Eso nos hace pensar en paralelogramos donde los ángulos contiguos suman 180º. Si completamos el dibujo vemos aparecer dos paralelogramos de lados y ángulos iguales, por tanto iguales. Así sus mitades, los triángulos ABG y ADE (que no son iguales) tienen la misma área.



10. **En un paralelogramo se une cada vértice con los puntos medios de los lados no contiguos envolviendo dichos segmentos un octógono. Dividiendo este octógono en quesitos, calcula su razón de área con el paralelogramo**

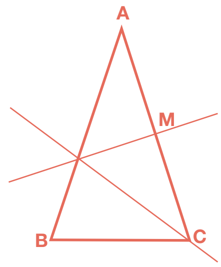




Nos fijamos en un quesito del octógono.

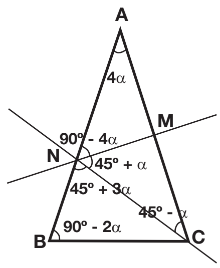
$\overline{IQ} = \frac{1}{2}\,\overline{IG}$, ya que Q es el centro del paralelogramo DHFC; $\overline{IR} = \frac{1}{3}\,\overline{ID}$, ya que R es el baricentro del triángulo DEG; por tanto el área del quesito IRQ es la sexta parte del área del triángulo IDG, y así cambiando de quesito llegamos a que el área del octógono es la sexta parte del área del paralelogramo ABCD.

11. **En un triángulo isósceles ABC, donde $\overline{AB} = \overline{AC}$, se verifica que la mediatriz del lado AC y la bisectriz de $\hat{C}$ se cortan en el lado AB. Halla sus ángulos.**

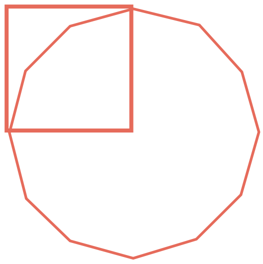


a) Empecemos poniendo nombre a los distintos ángulos que aparecen en el dibujo. Se verá más adelante que, por comodidad, conviene llamar 4α al ángulo $\hat{A}$.

b) Los triángulos AMN y CMN son iguales, ya que ambos son rectángulos y sus catetos son respectivamente iguales. Así ocurre que $4\alpha = 45º-\alpha$, y por tanto α=9º, con lo que los ángulos pedidos son 36º, 72º y 72º. Es decir, esa propiedad de intersección en un triángulo isósceles es una característica del triángulo áureo acutángulo.

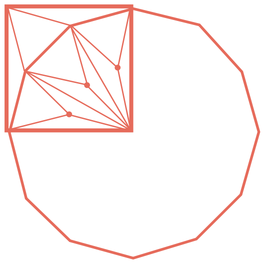


12. **Razona a partir del dibujo, la relación entre las áreas del dodecágono regular y el cuadrado de lado igual al radio de la circunferencia circunscrita.**



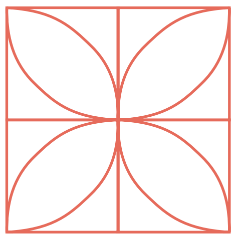
La demostración es visual si obtenemos figuras que sean divisores comunes.

El cuadrado está formado por cuatro triángulos equiláteros y ocho triángulos isósceles de ángulos 150º, 15º y 15º. La cuarta parte del dodecágono contiene tres de esos equiláteros y seis de esos isósceles, luego el área del dodecágono es $4 \cdot \frac{3}{4} r^2 = 3r^2$.

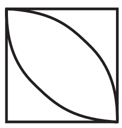


GEO 4. La circunferencia

1. **En el dibujo, trazando semicircunferencias con centro los puntos medios de un cuadrado de lado 2 dm, hemos dibujado una flor de cuatro pétalos. ¿Cuál es su área?**



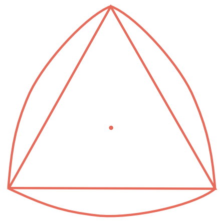
Centrémonos en un pétalo. Es fácil calcular el área de uno de los triángulos curvilíneos cóncavos, ya que mide la del cuadrado menos la del cuarto de círculo, es decir: $2^2 - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = 4 - \pi$.



El área de un pétalo es la del cuadrado menos la de los dos triángulos curvilíneos cóncavos:

$4 - 2 \cdot (4 - \pi) = (2\pi - 4)$ dm². El área de la flor será $(8\pi - 16)$ dm².

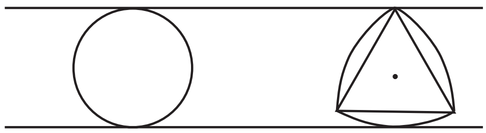
2. **Haciendo centro en los vértices de un triángulo equilátero de lado 2 dm hemos dibujado arcos de vértice a vértice. La curva así obtenida es de anchura constante. ¿Qué área encierra?**



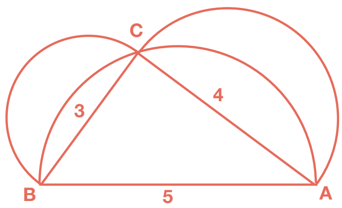
La figura de anchura constante puede ser vista como un sector circular, de radio 2 dm y ángulo 60º, al cual se le han añadido otros dos segmentos circulares iguales al suyo. El área de un segmento circular puede ser calculada como la del sector menos el triángulo equilátero correspondiente. Así el área pedida es:

$$A = A_{Sector} + 2 \cdot (A_{Sector} - A_{TE}) = 3\,A_{SC} - 2 \cdot A_{TE} = 3 \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{6} - 2\frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2\left(\pi - \sqrt{3}\right)\ dm^2$$

La circunferencia tiene la propiedad de que puede ir girando entre dos rectas paralelas manteniéndose siempre tangente a dichas rectas. A las curvas que tienen esta propiedad se les llama **curvas de anchura constante.**



3. **En el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, trazamos semicircunferencias con centro en los puntos medios de los lados como se ve en el dibujo. Las dos lunas formadas son conocidas como lúnulas de Hipócrates. ¿Cuál es la suma de sus áreas?**

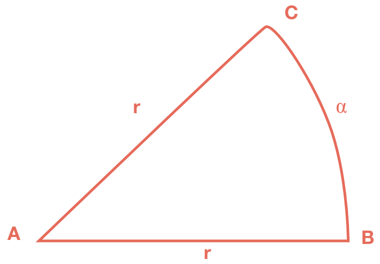


El área pedida puede obtenerse como la diferencia entre el área total de la figura y el área de la semicircunferencia sobre la hipotenusa:

$$S_L = A_{Total} - A_{Semi5} = A_{Semi3} + A_{Semi4} + A_{T345} - A_{Semi5} = \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 6dm^2$$

La sorpresa es que desaparece π en el cálculo y las lúnulas tienen igual área que el triángulo que las genera.
(No hay que confundir al matemático Hipócrates de Chíos, s.V a.C, con Hipócrates, s. IV a.C., el más famoso médico de la antigüedad y creador del juramento hipocrático).

4. **Llamamos radián al ángulo de un sector circular cuyo arco mide lo mismo que el radio. Así la circunferencia mide 2π radianes (es decir, en una circunferencia caben un poco más de 6,28 radios). Sea un sector circular de radio r, ángulo a radianes y perímetro 4 m. Expresa su área en función de r. Razona que el área es máxima cuando $r = 1$.**



Cuando se da el ángulo a de un sector circular en radianes, es inmediato el cálculo de la longitud de su arco. Éste mide por definición $a \cdot r$, pero también es rápido el cálculo del área, ya que ésta se establece por proporcionalidad:

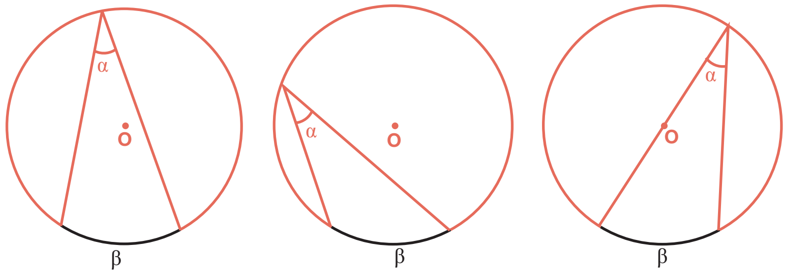
2π radianes .... $\pi \cdot r^2$

a radianes .... $\frac{a}{2} \cdot r^2$

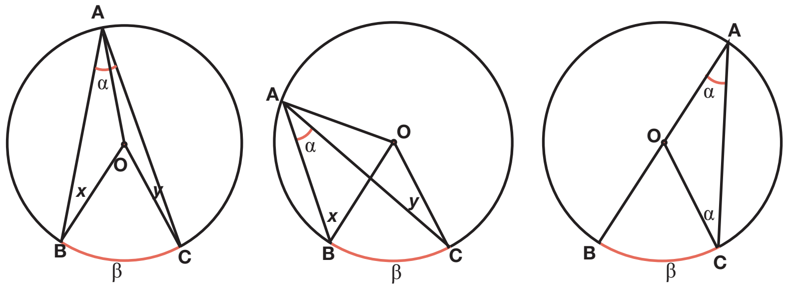
Así, el perímetro del sector circular dado es $2r + ar = 4$, y por tanto $a = \frac{4 - 2r}{r}$, de donde, su área en función del radio es $\frac{a}{2} \cdot r^2 = \frac{4 - 2r}{2r} \cdot r^2 = (2 - r) \cdot r$

Esta área es el producto de dos números, r y $2 - r$, que suman 2, y por tanto el producto es máximo cuando son iguales. En ese caso $r = 1$ y $a = 2$. Es decir el área máxima se obtiene cuando el arco mide lo mismo que los dos radios del sector.

5. **En los tres dibujos podemos ver las diferentes posiciones del centro O de una circunferencia respecto a un ángulo inscrito (dentro, fuera y en un rayo del ángulo). Demuestra en los tres casos que el ángulo inscrito mide la mitad en grados del arco que abarca.**



Trabajemos en las tres pistas a la vez, añadiendo radios en puntos estratégicos que hacen aparecer triángulos isósceles claves en la demostración.

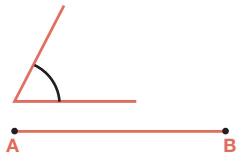


En la circunferencia de la izquierda el ángulo BAC, por el radio dibujado en A, aparece como suma de dos ángulos, x e y, que vemos aparecer de nuevo en los triángulos isósceles ABO y ACO, teniéndose en O que $180° - 2x + 180° - 2y + \beta = 360°$, de donde $\beta = 2x + 2y = 2(x + y) = 2\alpha$.

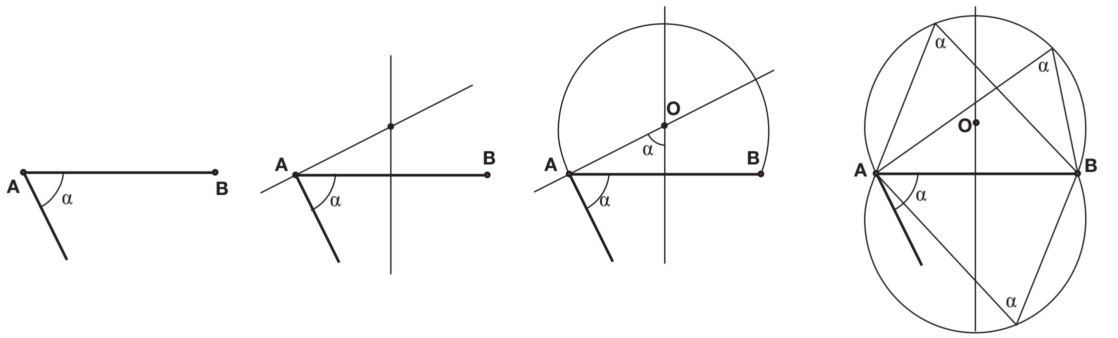
En la circunferencia del medio el ángulo BAC se obtiene como diferencia de dos ángulos x e y, que vemos aparecer de nuevo en los triángulos isósceles ABO y ACO, teniéndose en O que $180° - 2x + \beta = 180° - 2y$, y así $\beta = 2x - 2y = 2(x - y) = 2\alpha$.

Por último, en la circunferencia de la derecha intervienen menos ángulos. Tenemos por dibujo que $180° - 2\alpha + \beta = 180°$, y por tanto $\beta = 2\alpha$.

6. **Construcción del arco capaz**
Halla el lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ve el segmento AB bajo un ángulo α.

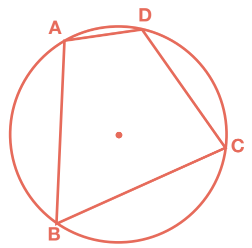


Por la relación entre ángulos inscritos y centrales, trataremos de ver el segmento bajo un ángulo central de valor 2α. El centro O de la circunferencia estará en la mediatriz del segmento y el triángulo isósceles AOB tendrá por ángulos 2α, $90^\circ - \alpha$ y $90^\circ - \alpha$.
Para construir ese triángulo bastará con apoyar el ángulo α hacia abajo en el segmento AB con origen en A y después trazar la perpendicular desde A al lado no apoyado. La intersección de esta perpendicular con la mediatriz de AB será el centro O buscado.

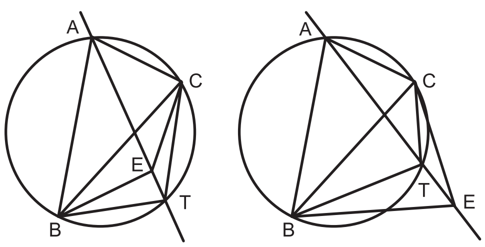


Trazando la circunferencia de centro O y que pasa por A, el arco de ésta, de extremos A y B y que está por encima del segmento AB, reúne a los puntos por encima del segmento que ven a éste con ángulo α. Los otros puntos están en el arco simétrico con respecto a AB.
Desde los puntos de los arcos que completan las circunferencias se ve el segmento AB con ángulo suplementario $180^\circ - \alpha$.

7. **Probar que los cuadriláteros convexos inscritos en una circunferencia, son aquellos cuyos ángulos opuestos suman 180º.**



Si el cuadrilátero convexo ABCD está inscrito, los arcos disjuntos ABC y CDA completan la circunferencia, es decir suman 360º, con lo cual los ángulos inscritos correspondientes ABC y CDA suman 180º.

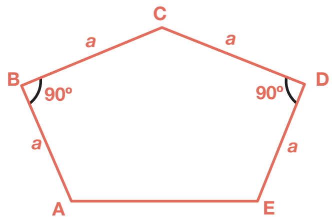


Por otro lado, veamos que para que los ángulos opuestos sumen 180º, D debe estar en la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Dentro del ángulo BAC dibujamos un punto E, y trazamos la recta que pasa por A y por E. Esta recta corta a la circunferencia en un punto T.
Por la primera parte, BAC + CTB =180º, y ahora comparamos los ángulos CEB y CTB. Si E está dentro de la circunferencia,
CEB > CTB y si está fuera CEB < CTB.

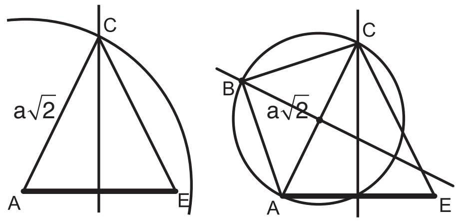
(La segunda parte de esta demostración es realmente la que asegura que no hay puntos fuera del arco capaz que miren al segmento con el ángulo dado.

8. **Dibuja un pentágono convexo ABCDE de forma que**

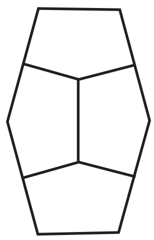
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = a$, y que $\hat{B} = \hat{D} = 90º$.



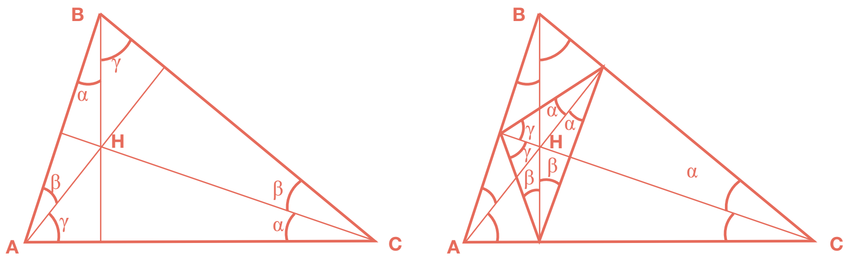
Supongamos el pentágono dibujado.
Un primer boceto nos sugiere que la figura tiene eje de simetría. Demostrar que esto es así conduce rápidamente a la construcción. Partimos de la construcción del triángulo ACE que es claramente isósceles, ya que $\overline{AC} = \overline{EC} = a\sqrt{2}$. Los cortes de la semicircunferencias de centros los puntos medios de estos lados con su mediatrices nos proporcionan los vértices anhelados.



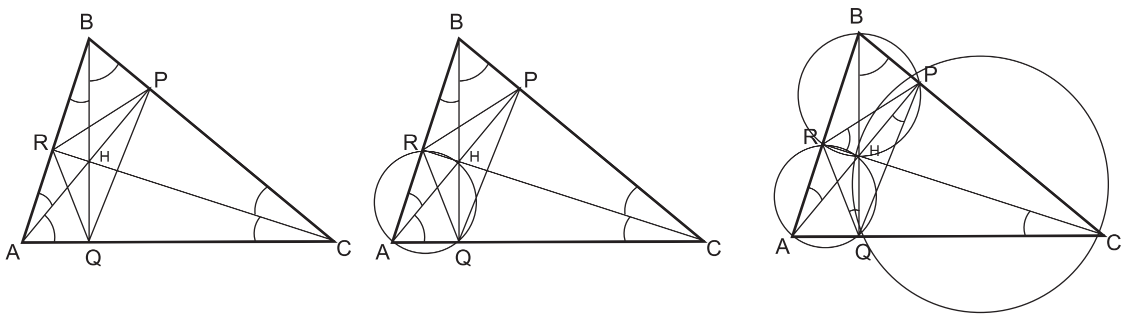
Estos pentágonos convexos (para ello $a > \frac{\overline{AE}}{2}$) son interesantes ya que, independiente de los valores de a y $\overline{AE}$, teselan el plano, pues podemos pegar cuatro de ellos formando un paralelohexágono.



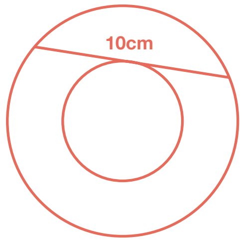
9. **En un triángulo acutángulo trazamos las alturas, y marcamos el ortocentro H y los ángulos que forman las alturas con los lados. Con los pies de las alturas construimos el llamado triángulo órtico. Prueba que H es el incentro de este nuevo triángulo (incluso se da la relación de ángulos expresada por los dos dibujos)**



El cuadrilátero AQHR tiene dos ángulos opuestos que son rectos, y por tanto está inscrito en una circunferencia. En esa circunferencia los ángulos inscritos RAH y RQH abarcan el mismo arco, luego son iguales.

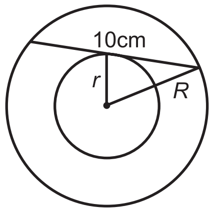


10. **En una corona circular, la cuerda de la circunferencia exterior que es tangente a la circunferencia interior mide 10 cm. ¿Cuánto mide el área de la corona circular?**

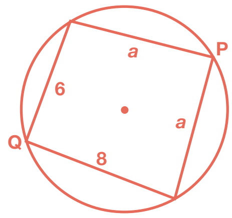


La aparente falta de datos nos permite aventurar una rápida respuesta. Si el área pedida sólo depende de la longitud de la cuerda, podemos suponer el caso de que la circunferencia interior se reduce a un punto, y así la cuerda es el diámetro de la circunferencia mayor, y ésta es a su vez "la corona circular", luego el área debe ser $\pi\left(\frac{10}{2}\right)^2$.

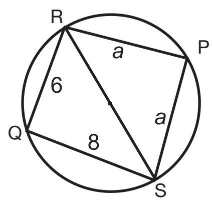
Una demostración no basada en la intuición es también fácil. El área de la corona circular es $\pi\,(R^2 - r^2)$, pero esta diferencia de cuadrados nos remite a un triángulo rectángulo que enseguida se nos hace patente:



11. **El cuadrilátero de la figura está inscrito en una circunferencia y tiene ángulos rectos en P y en Q. Tiene dos lados iguales y los otros dos miden 6 y 8 cm. ¿Cuál es, en cm², su área?**



Basta con darse cuenta de que los ángulos inscritos de 90º abarcan semicircunferencias, y por tanto los triángulos rectángulos QRS y RPS tienen como hipotenusa el diámetro RS de la circunferencia. Éste puede ser calculado como hipotenusa del triángulo QRS: $\overline{RS} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, y a partir de él podemos calcular *a* en el triángulo RPS ($a^2 + a^2 = 10^2$). El área del cuadrilátero, como unión de triángulos rectángulos, es $\frac{6 \cdot 8}{2} + \frac{a^2}{2} = 24 + 25 = 49$ cm².



12. **Potencia de un punto respecto a una circunferencia**

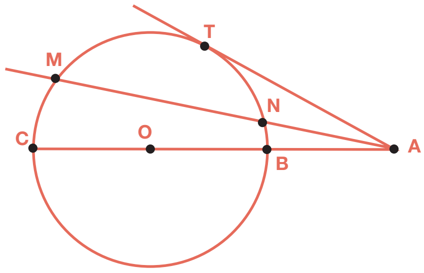
Desde un punto A exterior a una circunferencia *C*, trazamos una secante que la corta en *M* y *N*, y una tangente en *T* a dicha circunferencia.

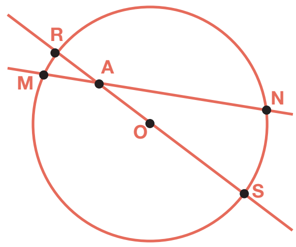
Prueba que se tiene la igualdad de producto de distancias: d(*A, N*) · d(*A, M*) = d(*A, T*)^2.

Este invariante métrico se conoce como "la potencia de un punto respecto a una circunferencia". Exprésalo en función del radio y la distancia del centro al punto.

El concepto de potencia de un punto respecto a una circunferencia *C* puede ser generalizado para puntos interiores y para puntos de la circunferencia (en estos últimos es natural definir la potencia como 0)

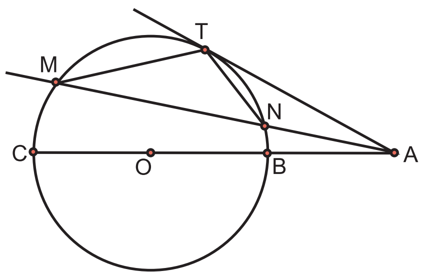
No costará mucho probar que los triángulos *AMR* y *ANS* son semejantes y que por ello $\overline{AM} \cdot \overline{AN} = \overline{AR} \cdot \overline{AS}$. Este producto con signo menos es igual a $\overline{OA}^2$ - *R*^{2}, y es la potencia de A con respecto a la circunferencia C. Su carácter negativo es interpretado como debido a la distinta orientación de los segmentos AM y AN.





La igualdad a probar, d(A, N) · d(A, M) = d(A, T)^2, puede ser escrita en forma de cociente:

$\frac{\overline{AN}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AM}}$ y así ser relacionada con una proporción entre figuras semejantes que comparten el segmento AT. Descubramos dichas figuras dibujando nuevos segmentos.



Los triángulos MTA y NTA son semejantes ya que tienen dos ángulos iguales:

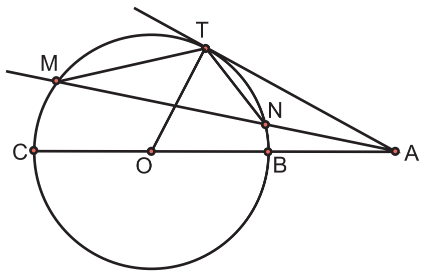
i) los ángulos MAT y NAT son el mismo.

ii) los ángulos TMA y NTA (inscrito y semiinscrito) abarcan el mismo arco y son por tanto iguales.

Así podemos establecer la proporción anunciada.

Para relacionar esos productos con el radio bastará con trazar el radio en el punto T de tangencia.

En el triángulo rectángulo OAT se tiene que:
d(A,T)^2 = *d*(A,O)^2 - *r*^{2}, y es a esa cantidad a la que se llama potencia de A respecto de la circunferencia *C*.



GEO 5. Cuerpos Geométricos

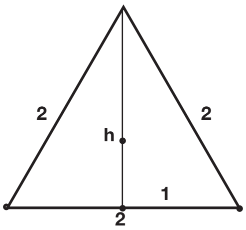
1. **Área del triángulo equilátero de lado *l*. Área del hexágono regular de lado *l*.**

Partimos de un triángulo equilátero de lado 2. Al dividir el triángulo por medio de una altura h, obtenemos dos triángulos rectángulos de forma que $h^2 = 2^2 - 1^2$; $h = \sqrt{3}$. Así, el área es igual a $\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, y por tanto para el área del triángulo equilátero de lado l, habrá que multiplicar por $\left(\frac{l}{2}\right)^2$. Así:

Área del triángulo equilátero de lado $l = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Área del hexágono regular de lado $l = \frac{6 \cdot l^2\sqrt{3}}{4}$

Conviene recordar que $\sqrt{3}$ es la medida de la altura de un triángulo equilátero de lado 2, o bien la diagonal mayor de un rombo de lado 1 y un ángulo de 60º.



2. **Área del octógono regular de lado *l*.**

Partiremos de un octógono regular de lado 2.

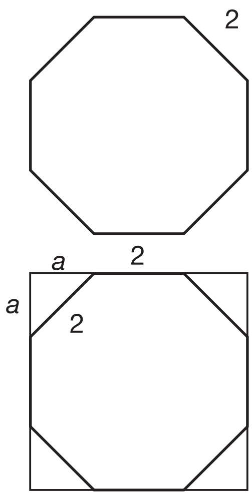
Resulta práctico para el cálculo del área considerar el octógono regular como truncamiento de un cuadrado.

Fijándonos en los triángulos rectángulos isósceles cortados podemos calcular el valor de *a*:
$a: a^2 + a^2 = 4;\ a = \sqrt{2}$.

Luego, el área buscada será la del cuadrado de lado $2 + 2\sqrt{2}$, menos la de los cuatro triángulos (o un cuadrado de lado 2) es decir: $\left(2 + 2\sqrt{2}\right)^2 - 4 = 8 + 8\sqrt{2}$.

Para calcular el área del octógono de lado *l*, bastará con tener en cuenta la razón de proporción lineal $\frac{l}{2}$ elevada al cuadrado.

Área del octógono regular de lado $l = \left(2 + 2\sqrt{2}\right) l^2$



3. Área del dodecágono regular de lado *l*.

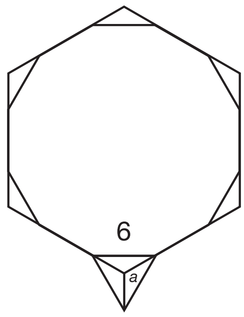
También un dodecágono regular puede ser considerado como un hexágono regular truncado convenientemente.

Partiremos ahora de que el lado del dodecágono mide 6. Los seis triángulos recortados forman dos triángulos equiláteros de lado 6. El hexágono regular tiene de lado 6 + 2*a* , donde a es la distancia del centro de esos equiláteros a un vértice, es decir dos tercios de la mediana (o de la altura). Como la altura de un equilátero de lado 2 mide $\sqrt{3}$, los dos tercios de la altura de uno de lado 6 serán $2\sqrt{3}$.

Así, rebobinando, el área pedida será la de un hexágono de lado $6 + 4\sqrt{3}$, menos las áreas de dos triángulos equiláteros de lado 6. Llevemos los datos a las fórmulas de área ya conocidas:

$$\frac{6\cdot\left(6+4\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}-2\cdot\frac{6^2\sqrt{3}}{4}=6\cdot\left(3+2\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}-18\sqrt{3}=\left(54+72-18\right)\sqrt{3}+216=108\sqrt{3}+216$$

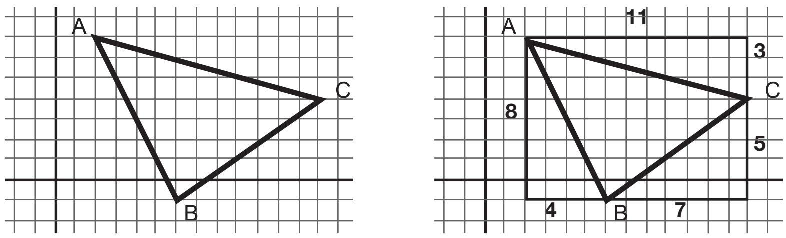
Multiplicando por $\left(\frac{l}{6}\right)^2$, obtenemos el área del dodecágono de lado *l*.



Área del dodecágono regular de lado $l = \left(3\sqrt{3}+6\right)l^2$

4. Área del triángulo de vértices A(2, 7), B(6, –1) y C(13, 4)

El área de un triángulo dado por las coordenadas de sus vértices se resuelve fácilmente enmarcando el triángulo en un ajustado rectángulo de lados paralelos a los ejes. Se obtiene el área como diferencia de la del rectángulo con las de los triángulos complementarios al pedido (fáciles de calcular, pues son triángulos rectángulos de catetos paralelos a los ejes)



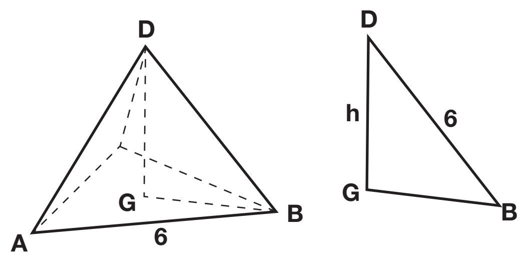
Así, el área del triángulo es:

$$11\cdot 8-\frac{4\cdot 8+7\cdot 5+3\cdot 11}{2}=88-\frac{32+35+33}{2}=38$$

5. **Volumen del tetraedro regular de lado *l*.**

Como pirámide, el volumen del tetraedro regular es $\frac{1}{3}$ (Área de la base x altura).

La base es un triángulo equilátero de lado *l*, y el pie de la altura es el centro *G* de ese triángulo.

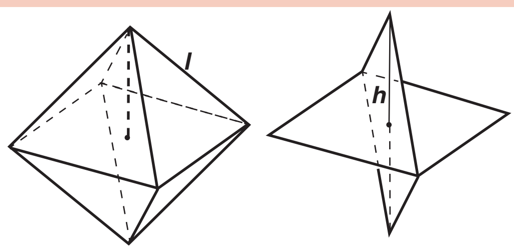


Si tomamos *l* = 6, los lados del triángulo rectángulo GBD son 6, *h* y $\overline{GB}$ (dos tercios de la me diana de un triángulo equilátero de lado 6). Así $\overline{GB} = \frac{2}{3} \cdot 6 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ y $h^2 = 36 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 24$.
Por lo tanto el volumen es $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{24} = \frac{6^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$, con lo que multiplicando por $\left(\frac{l}{6}\right)^3$,
obtendremos el volumen del tetraedro regular de lado *l*:

Volumen del tetraedro regular de lado l = $\frac{\sqrt{2}}{12} l^3$

6. **Volumen del octaedro regular de lado *l*.**

Un octaedro puede ser considerado como una bipirámide cuadrada y así su volumen será $2 \cdot \frac{1}{3}$ (Área de la base x altura), donde la base es un cuadrado y la altura *h* tiene su pie en el centro de ese cuadrado, y por tanto, bien mirada, mide la mitad de la diagonal de ese cuadrado. No queda más que recoger velas.

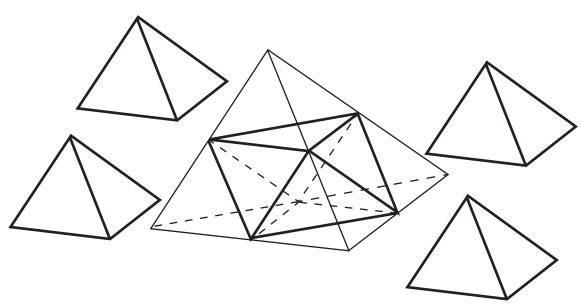


Directamente, el volumen de un octaedro regular de lado *l* es: $\frac{2}{3} l^2 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot l}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} l^3$.

Volumen del tetraedro regular de lado *l* = $\frac{\sqrt{2}}{12} l^3$

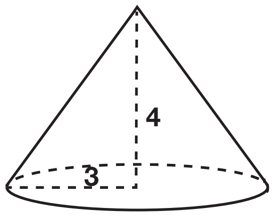
Tenemos pues que con lados iguales, el octaedro regular tiene un volumen cuatro veces mayor que el tetraedro. Ello puede ser también razonado si vemos al octaedro como un truncamiento por la mitad de los lados del tetraedro.

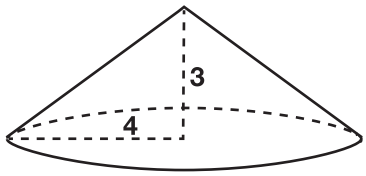
En la figura podemos ver cómo de un tetraedro de lado 2*l* surgen cuatro tetraedros de lado *l* y un octaedro de lado *l*. Como el tetraedro de lado 2*l*, tiene un volumen 8 veces mayor que el de lado *l*, tenemos que el octaedro regular equivale en volumen a cuatro tetraedros regulares de igual lado.



7. **Volúmenes de los sólidos obtenidos al girar el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 alrededor de uno de sus lados.**

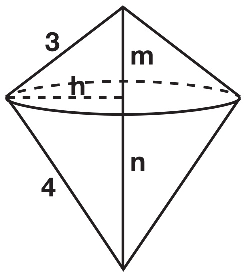
No hay mucho que decir cuando el giro se hace alrededor de un cateto:





$V_4=\frac{1}{3}\pi\cdot 3^2\cdot 4=12\pi$ $\quad$ $V_3=\frac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 3=16\pi$

Un poco más de gracia tiene el giro alrededor de la hipotenusa:



El volumen del bicono formado al girar alrededor de la hipotenusa se obtiene como suma: $V_5=\frac{1}{3}\pi\cdot h^2\cdot m+\frac{1}{3}\pi\cdot h^2\cdot n=\frac{1}{3}\pi\cdot h^2(m+n)$, donde h es la altura sobre la hipotenusa, y $m+n$ es la hipotenusa.

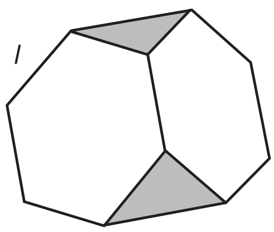
La hipotenusa es 5, e igualando áreas, $\frac{3\cdot 4}{2}=\frac{5\cdot h}{2}$, luego $h=\frac{3\cdot 4}{5}$ y

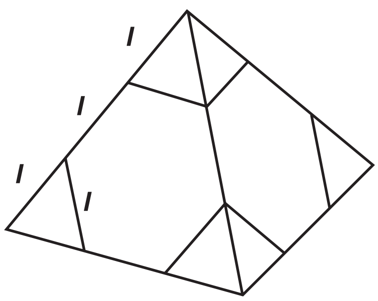
$$V_5=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3^2\cdot 4^2}{\sqrt{3^2+4^2}}=9{,}6\pi$$

Vemos que el volumen generado alrededor de la hipotenusa es sensiblemente menor que el generado alrededor de los catetos. ¿Será así en todos los triángulos rectángulos? Antes del cálculo final hemos expresado los volúmenes con relación sólo a los catetos, lo cual te permitirá hacer conjeturas.

8. **Volumen del tetraedro regular truncado de lado *l*.**

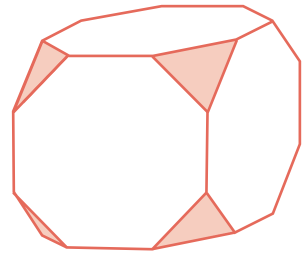
Nuestro tetraedro truncado de lado *l* procede de un tetraedro regular de lado 3l, al cual se le han rebanado cuatro tetraedros de lado *l*. Como un tetraedro de lado 3*l* equivale en volumen a 27 tetraedros de lado *l* (no confundir con que se pueda dividir en 27 tetraedros) el volumen buscado será 23 veces el del tetraedro regular de lado *l*.





Volumen del tetraedro truncado de lado l = $23\frac{l^3\sqrt{2}}{12}$.

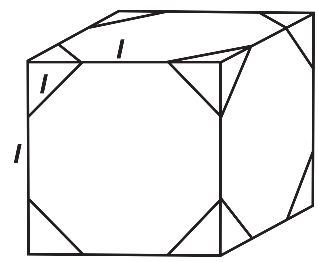
9. **Volumen del cubo truncado de lado *l*.**



El cubo truncado de lado l procede de un cubo de lado $l + l\frac{\sqrt{2}}{2} + l\frac{\sqrt{2}}{2}$, al que se le han quitado 8 esquinas tetraédricas, que juntas forman un octaedro de lado l. Así, el volumen del cubo truncado es:

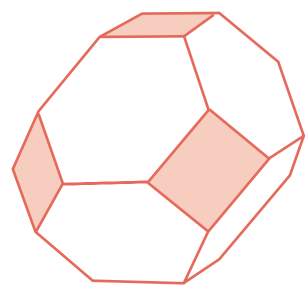
$$\left[l\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^3 - \frac{l^3\sqrt{2}}{3} = \frac{3\cdot\left(1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}}{3}l^3 = \frac{21+14\sqrt{2}}{3}l^3$$

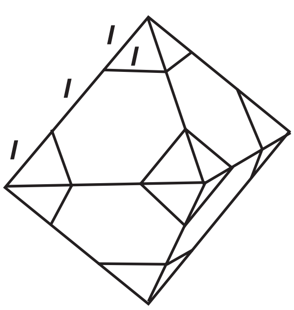
Volumen del cubo truncado de lado l = $\frac{21+14\sqrt{2}}{3}l^3$.



Bloque I
Bloque II
Bloque III
Bloque IV

10. **Volumen del octaedro regular truncado de lado *l*.**

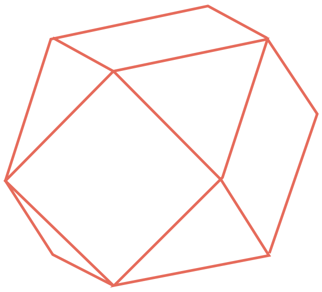




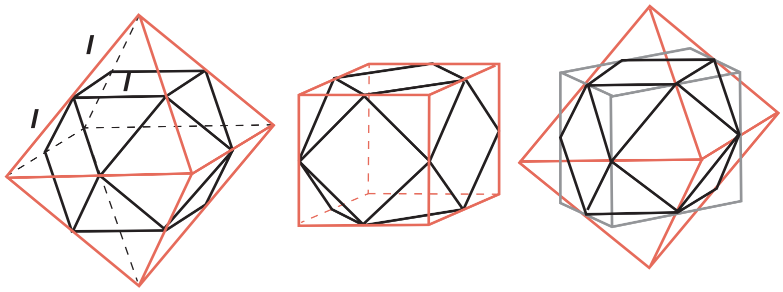
El octaedro truncado de lado l procede de un octaedro regular de lado $3l$ al que se le han quitado seis pirámides cuadrangulares equivalentes a tres octaedros regulares de lado l. Como un octaedro de lado $3l$ equivale en volumen a 27 octaedros de lado l, el volumen del octaedro regular truncado de lado l es 24 veces el del octaedro regular de lado l.

Volumen del octaedro truncado de lado l = $24\frac{l^3\sqrt{2}}{3} = 8l^3\sqrt{2}$.

11. Volumen del cuboctaedro de lado *l*.



Tenemos varias maneras de definir el cuboctaedro. Una como truncamiento por la mitad de las aristas de un octaedro. O como truncamiento del cubo por la mitad de sus aristas. E incluso como intersección de un cubo y un octaedro cuyas aristas se encuentran en sus puntos medios.



Para el cálculo del volumen quizás la visión más rápida sea la primera.

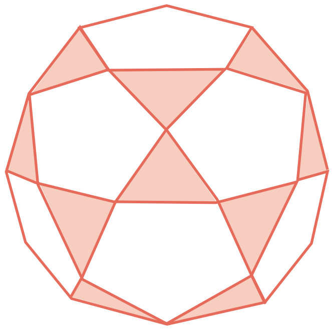
Visto el cuboctaedro de lado *l* como un octaedro regular de lado 2*l* al que le quitamos seis pirámides cuadrangulares que equivalen a tres octaedros regulares de lado *l*, su volumen será (8 – 3) veces el del octaedro regular de lado *l*.

$$\textit{Volumen del cuboctaedro de lado } l = 5\frac{l^3\sqrt{2}}{3}$$

La segunda visión nos daría el cuboctaedro como un cubo de lado $2\frac{l\sqrt{2}}{2}$ menos ocho pirámides triangulares equivalentes a un octaedro de lado *l*, y así el volumen podría ser calculado como:

$$\left(l\sqrt{2}\right)^3 - \frac{l^3\sqrt{2}}{3} = 2l^3\sqrt{2} - \frac{l^3\sqrt{2}}{3} = 5\frac{l^3\sqrt{2}}{3}$$

12. **Usando la fórmula de Euler y la uniformidad de los vértices, calcula el número de caras (triángulos y pentágonos) el número de vértices y el de aristas del icosidodecaedro.**



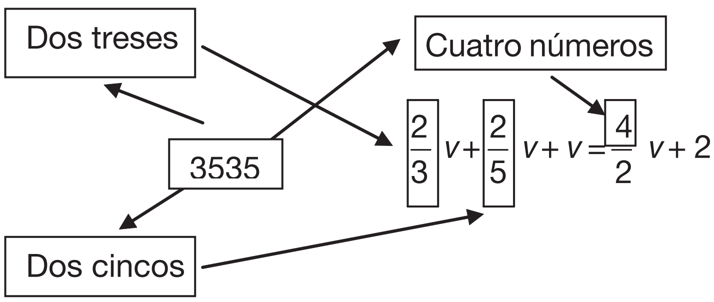
Si bien, viendo el dibujo uno puede deducir la respuesta, nosotros vamos a construir ésta de forma que sea válida para los poliedros de iguales características, es decir, que sean convexos y sus vértices homogéneos. En el caso de caras regulares, estaremos hablando de los poliedros semirregulares. Que los vértices sean homogéneos quiere decir que todos los vértices son iguales en cuanto a la afluencia y forma de los elementos. Eso permite, en el caso de regularidad de caras, que puedan ser nombrados con el número de afluencia en el vértice. Así el icosidodecaedro, poliedro obtenido tanto por el truncamiento por la mitad de las aristas de un icosaedro como de un dodecaedro, es llamado 3535, indicando que en un vértice se encuentran de forma alternada dos equiláteros y dos pentágonos regulares. El 3535 (ó 5353) es, como todos los semirregulares, convexo y le podemos aplicar la fórmula de Euler:

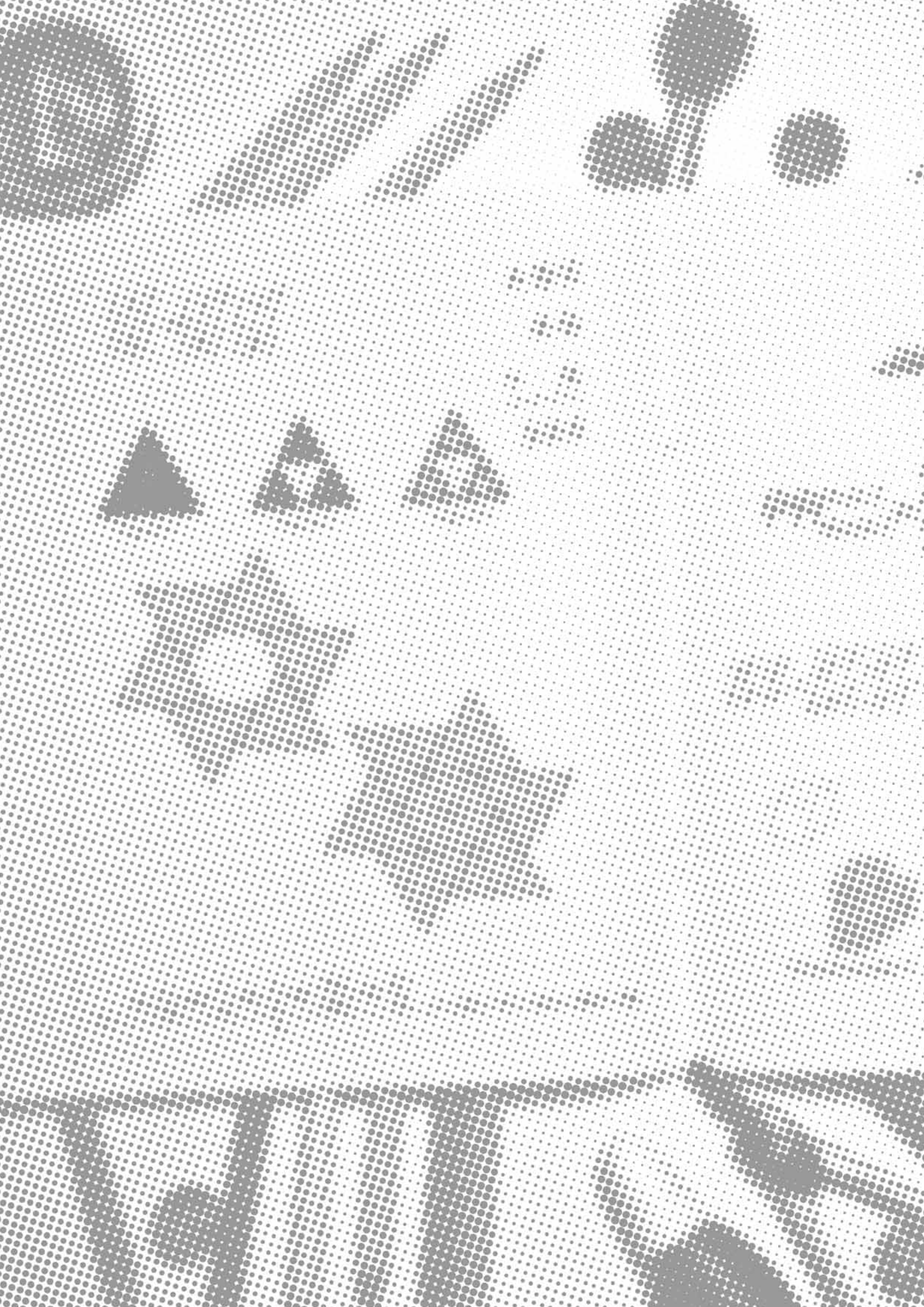
$V + C = A + 2.$

Escribamos los términos de la ecuación en función sólo de v = nº de vértices.

Un triángulo tiene tres vértices y un vértice (del 3535) tiene dos triángulos. Luego la homogeneidad dice que habrá más vértices que triángulos y además en razón de 3 a 2, es decir, $t = \frac{2}{3}v$. Por el mismo motivo, $p = \frac{2}{5}v$, siendo p el número de pentágonos. También una arista tiene siempre 2 vértices, y un vértice (del 3535) tiene 4 aristas (tantas como caras hay en el vértice) luego $a = \frac{4}{2}v$, siendo a = nº de aristas. Llevando estas relaciones a la fórmula de Euler, nos queda: $\frac{2}{3}v + \frac{2}{5}v + v = \frac{4}{2}v + 2$, ecuación que resuelta nos da:

$v = 30$; $t = \frac{2}{3}\cdot 30 = 20$; $p = \frac{2}{5}\cdot 30 = 12$; $a = \frac{4}{2}\cdot 30 = 60$. Es decir, 32 caras, 30 vértices y 60 aristas.
Resuelto el problema, no se acabó la gracia, sino que debemos darnos cuenta cómo la ecuación verticial de Euler es una inmediata traducción del nombre numérico:





Bloque III. Probabilidad y Estadística

Bloque III. Probabilidad y Estadística

Introducción

Este bloque está dividido en los siguientes epígrafes:

PRO 1. Técnicas de recuento. Combinatoria.
PRO 2. Estadística.
PRO 3. Probabilidad.

Técnicas de recuento. Combinatoria

Entendemos que en una asignatura de las características de ésta, cuyo foco es la resolución de problemas, no podía faltar un apartado de problemas de recuento. Aunque en los programas oficiales se relega esta materia a 4º de ESO, creemos que por su carácter de obligar al estudiante a hacer un pequeño razonamiento en cada momento y, sobre todo, al ser sobre cuestiones muy manejables teóricamente, es decir, que no necesitan ningún arsenal elevado de conocimientos, debería figurar en los primeros años de Secundaria y, sin ninguna duda, en la asignatura de Ampliación de Matemáticas de 3º de ESO.

Como se puede observar a lo largo del desarrollo de los problemas planteados, hemos decidido introducir la notación estándar de estos conceptos. Por ello, creemos que sería adecuado que, antes de comenzar este apartado, se dediquen algunas clases a que el estudiante se familiarice con estos conceptos y esta notación.

Por otra parte, merece la pena señalar que el método utilizado en la nota que acompaña a la solución del problema 6 de este epígrafe, pone en puertas, al profesor que lo desee, de la justificación sin ninguna dificultad de la fórmula de las combinaciones con repetición.

Estadística

Proponemos en este apartado una colección de 12 problemas sobre algunas medidas de centralización y dispersión en un conjunto de datos. Las herramientas necesarias para su resolución son, simplemente, conocer la definición de estos parámetros y algún manejo de ecuaciones y sistemas lineales y, en algún caso, de segundo grado.

Hemos dejado de lado, conscientemente, cuestiones análogas sobre la desviación típica por entender que, o bien no aportaban nada interesante, o complicaban bastante la resolución del problema para un estudiante de 3º de ESO.

Probabilidad

Una vez que los estudiantes manejan ciertas técnicas de combinatoria, la resolución de muchos problemas de probabilidad se reduce, previa observación de que los sucesos elementales son equiprobables, a la aplicación de la regla de Laplace:

$$p\,(A) = \frac{\text{nº de casos favorables a A}}{\text{nº de casos posibles}}$$

Sea como fuere, ello no debería ser óbice para que el estudiante de esta asignatura no conociera, entendiera y aplicara la fórmula de la probabilidad de la intersección de dos sucesos puesto que, como todos los profesores sabemos, la utilización de dicha fórmula facilita extraordinariamente la resolución de algunos problemas frente al, a veces, muy complejo cálculo del número de casos favorables. En este sentido, creemos que la mejor manera de introducir la fórmula de la probabilidad de la intersección, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$, es pedir a los estudiantes que en un cierto experimento aleatorio, dados los sucesos A y B, previa introducción del suceso B/A, calculen las frecuencias relativas de los sucesos A, B, $A \cap B$ y B/A y observen la relación que existe entre ellas.

Bloque III

PRO 1. Técnicas de recuento. Combinatoria

1. **En Julio de 2008 se celebró en Madrid la XLIX Olimpiada Matemática Internacional en la que participaron chicos y chicas de entre 15 y 18 años de 101 países. Si el delegado de cada país da un apretón de manos a los demás delegados, ¿cuántos apretones en total se dieron en la inauguración?**

2. **Con las letras de la palabra *NADIE* podemos formar 120 palabras (o agrupaciones de cinco letras) utilizando todas sus letras. Si se ordenan alfabéticamente las 120, ¿qué lugar ocupa la palabra *NADIE* en esa relación?**

3. **Los números combinatorios son los números del triángulo de Pascal. Ello es consecuencia de que el triángulo de números combinatorios de la derecha cumple las dos reglas de formación del triángulo de Pascal:**

a) Los extremos de una fila son unos: $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

b) Los números del interior se obtienen como suma de los dos inmediatamente superiores:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1} \text{, siendo } 0\leq k<n.$$

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0}\\
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}\\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}\\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}\\
\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}\\
\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}
\end{array}$$

Queremos que demuestres esta última igualdad partiendo de la definición de:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

4. **Con los números 1, 2, 3 y 4 formo todos los números posibles de 4 cifras cada uno, por ejemplo, 3214, 1111, 2234 serían algunos. ¿Cuánto vale la suma de todos ellos?**

5. **Las fórmulas de combinaciones de n elementos tomados de k en k coinciden con las de permutaciones con repetición de n elementos con índices de repetición k y $n-k$. Te pedimos que lo compruebes estableciendo una correspondencia término a término entre las parejas de números diferentes elegidos del 1 al 6 y las claves formadas con dos a´s y cuatro b´s.**

6. **¿De cuántas formas puedo repartir 12 caramelos iguales entre Alicia, Beatriz y Carlos si a cada uno de ellos le tengo que dar por lo menos tres?**

7. **Un restaurante ofrece en cada cena tres postres y doble número de primeros platos que de segundos. Cada cena consiste en un primero, un segundo y un postre. ¿Cuál es el menor número de segundos platos que tiene que ofrecer para que un cliente pueda tomar cenas diferentes durante los 365 días de un año?**

8. **El código de cierta caja de seguridad consiste en cuatro dígitos, no necesariamente distintos, y dos letras que tampoco tienen por qué ser distintas. Estos seis caracteres pueden aparecer en cualquier lugar, con la condición de que las letras deben ir siempre juntas. Si podemos elegir entre 26 letras, ¿cuántos códigos válidos hay?**

9. **¿Cuántos números de cuatro cifras tienen al menos una que sea 2 ó 3?**

10. **De los 6300 primeros enteros positivos, ¿cuántos no son múltiplos ni de 2, ni de 3, ni de 5, ni de 7?**

11. **En una cuadrícula 5 x 5 seleccionamos tres de los 25 cuadraditos, de forma que no haya dos de ellos que estén en una misma fila o columna. ¿Cuántas elecciones son posibles?**

12. **En una excursión hay seis turistas y dos guías. Cada turista debe elegir un guía pero cada guía debe tener al menos un turista. ¿Cuántos posibles grupos guía-turista pueden hacerse?**

PRO 2. Estadística

1. **En un grupo de hombres y mujeres la edad media es 31 años. Si la media de la edad de los hombres es 35 años y la de las mujeres es 25, calcula el cociente entre el número de hombres y el de mujeres.**

2. **Se consideran los números p, q, r, s y t. La media de p, q y r es 8 y la media de p, q, r, s y t es 7. ¿Cuál es la media de s y t?**

3. **La edad media de los integrantes de un grupo de *boy-scouts* aumentaría en un año si abandonaran el grupo cinco chicos de 9 años de edad cada uno o si se unieran al grupo cinco chicos de 17 años cada uno. ¿Cuántos chicos componen dicho grupo?**

4. La media aritmética de los nueve números del conjunto {9, 99, 999, …, 999999999} es un número *M* de nueve cifras, todas distintas. ¿Cuál es la cifra que no está en *M*?

5. Dados cuatro números, elegimos tres, calculamos su media y a la media de estos tres le sumamos el cuarto número. Como ves, esto lo podemos hacer de cuatro formas, dejando cada vez uno de los números sin elegir. Si obtenemos como resultados 17, 21, 23 y 29, ¿cuál es el mayor de los cuatro números que teníamos?

6. En una reunión hay un cierto número de personas. Curiosamente, la media de las edades de esas personas coincide con el número de personas que hay. Entra entonces en la reunión una persona de 29 años y vuelve a coincidir la edad media de las que hay con el número de personas. ¿Cuántas personas había en la reunión al principio?

7. El peso medio de las patatas que había en una bolsa subió al doble cuando a las cuatro patatas que había añadimos una patata inmensa. ¿Cuál es el cociente entre el peso de este patatón y la suma de los pesos de las cuatro patatas que había?

8. En un centro se hizo la misma prueba del Concurso de Primavera a un pequeño grupo de alumnos de ESO y a todos los de Bachillerato. La media global fue de 84 puntos. Los de ESO, que eran solamente el 10%, obtuvieron todos la misma puntuación y la media de los de Bachillerato fue de 83 puntos. ¿Cuál fue la puntuación de cada estudiante de ESO?

9. De una lista de nueve números, sabemos que seis de ellos son 7, 8, 3, 5, 9 y 5. ¿Cuál es el mayor valor posible para la mediana de los nueve?

10. La media, mediana, moda (única) y recorrido de un conjunto de ocho enteros son todos iguales a 8. ¿Cuál es el mayor entero que puede aparecer en este conjunto?

11. En un cierto concurso de problemas de matemáticas, el 10% de los participantes obtuvo 70 puntos, el 25%, 80 puntos, el 20% obtuvo 85 puntos, el 15% obtuvo 90 puntos y el resto de los participantes, obtuvo 95 puntos. ¿Cuál fue la diferencia entre la media y la mediana de las puntuaciones de ese examen?

12. Añadimos un número *n* al conjunto {3, 6, 9, 10} formando así un conjunto de cinco elementos. Si la media del conjunto resultante es igual a su mediana, ¿cuál es la suma de todos los posibles valores de *n*?

PRO 3. Probabilidad

1. **Beatriz escoge al azar dos números distintos del conjunto {8, 9, 10} y los suma. Carlos escoge también al azar otros dos números distintos del conjunto {3, 5, 6} y los multiplica. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado obtenido por Beatriz sea mayor que el obtenido por Carlos?**

2. **Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números aparecidos en dos de ellos coincida con el del otro dado?**

3. **Pedro elige al azar dos números distintos del conjunto {1, 2, 3, 4, 5} y Quino elige uno del conjunto {1, 2, 3, 4, …, 10}. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de Quino sea mayor que la suma de los dos que eligió Pedro?**

4. **¿Cuál es la probabilidad de que un entero del conjunto {1, 2, 3, …, 100} sea divisible por 2 pero que no sea divisible por 3?**

5. **Al lanzar una moneda 4 veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras sea mayor que el de cruces?**

6. **Al tirar dos dados usuales de seis caras, ¿cuál es la probabilidad de que haya una diferencia de tres puntos entre los resultados de las dos caras superiores?**

7. **Tenemos dos dados con las caras numeradas de la siguiente forma: 1, 1, 2, 2, 3, 3, en uno de ellos y 4, 4, 5, 5, 6, 6, en el otro. Los lanzamos y sumamos los números obtenidos en la cara superior. ¿Cuál es la probabilidad de que esta suma sea impar?**

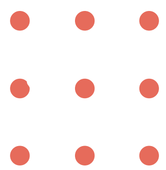
8. **Se tira una moneda tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos y sólo dos caras seguidas?**

9. **En una bolsa hay dos bolas rojas y dos azules. Se sacan a la vez dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?**

10. Tiramos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos números obtenidos sean los dígitos de un cuadrado perfecto?

11. Tiramos un dado tres veces. Halla la probabilidad de suma 8 y la probabilidad de suma 12. Busca un razonamiento, que no sea simplemente contando, que nos permita conocer las probabilidades de las distintas sumas.

12. Elegimos al azar tres puntos de los nueve del diagrama que mostramos. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres elegidos estén alineados?



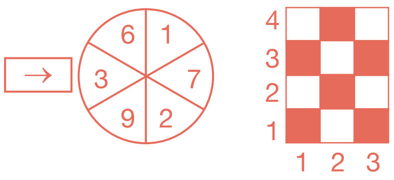
13. Nadal y Federer juegan un partido al mejor de cinco sets, es decir, quien gane tres sets ha ganado el partido. La probabilidad de ganar cada set es $\frac{1}{2}$ para cada jugador y el ganar o no un set no influye en la probabilidad de ganar el siguiente. Si Federer ganó el segundo set y Nadal ganó el partido, ¿cuál es la probabilidad de que Federer ganara también el primer set?

14. Hacemos girar dos veces la ruleta de la figura y apuntamos el número que marca la flecha. Dividimos el primer número entre 4 y el segundo entre 5.

Los restos obtenidos designan, respectivamente, una columna y una fila del tablero de la figura.

¿Cuál es la probabilidad de que el par de restos

designe un cuadrado de color blanco?



15. Elegimos al azar cuatro números, *a*, *b*, *c*, *d*, entre los enteros 1, 2, …, 2010. ¿Cuál es la probabilidad de que *ad* - *bc* sea un número par?

16. Un jugador paga 5 € por participar en el siguiente juego:

Lanza un dado. Si aparece un número impar, ha perdido. Si aparece un número par, vuelve a lanzar el dado. En el caso de que aparezca el mismo número que antes, ha ganado; en cualquier otro caso, ha perdido. ¿Qué probabilidad tiene de ganar? ¿Cuánto debería ganar si el juego es justo?

Bloque III

PRO 1. Técnicas de recuento. Combinatoria

1. **En Julio de 2008 se celebró en Madrid la XLIX Olimpiada Matemática Internacional en la que participaron chicos y chicas de entre 15 y 18 años de 101 países. Si el delegado de cada país da un apretón de manos a los demás delegados, ¿cuántos apretones en total se dieron en la inauguración?**

Hay 101 delegados y cada apretón de manos se corresponde con una pareja de delegados.

¿Cuántas parejas, pues, habrá? $C_{101,2} = \dfrac{101 \cdot 100}{2} = 5050$.

Sin acudir a la fórmula de las combinaciones también puede alcanzarse la solución: el primero da un apretón a todos los demás, es decir, a 100 delegados; el segundo a 99; etc… En total se dan $100 + 99 + \ldots + 1 = \dfrac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050$ apretones de manos.

2. **Con las letras de la palabra *NADIE* podemos formar 120 palabras (o agrupaciones de cinco letras) utilizando todas sus letras. Si se ordenan alfabéticamente las 120, ¿qué lugar ocupa la palabra *NADIE* en esa relación?**

En la relación alfabética, estarán -entre otras- delante de *NADIE*, todas las palabras que empiecen por *A, D, I* o *E*, es decir: $4 \cdot P_4 = 4 \cdot 4! = 4 \cdot 24 = 96$.

Además, las que empiezan por *N A D E*, es decir, una, *N A D E I*. Así pues, habrá 97 palabras delante de *N A D I E*, por lo que ella ocupará el lugar 98.

3. **Los números combinatorios son los números del triángulo de Pascal. Ello es consecuencia de que el triángulo de números combinatorios de la derecha cumple las dos reglas de formación del triángulo de Pascal:**

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0}\\
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}\\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}\\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}\\
\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}\\
\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}
\end{array}$$

a) Los extremos de una fila son unos: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

b) Los números del interior se obtienen como suma de los dos inmediatamente superiores:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \text{ siendo } 0 \le k < n.$$

Queremos que demuestres esta última igualdad partiendo de la definición de:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Sumemos con tino:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-(k+1))!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}=\frac{(k+1)n!+(n-k)\cdot n!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\frac{(n+1)n!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\binom{n+1}{k+1}$$

También podemos demostrar la igualdad partiendo de la definición de número combinatorio como número de combinaciones. En efecto, las combinaciones de, por ejemplo, 12 elementos tomados de ocho en ocho, $\binom{12}{8}$, se pueden separar en las que entra un elemento determinado, y por tanto sólo hay que elegir otros siete de once, $\binom{11}{7}$, y en las que no entra ese elemento, es decir elegir ocho de once, $\binom{11}{8}$. Es decir $\binom{12}{8} = \binom{11}{7} + \binom{11}{8}$.

4. **Con los números 1, 2, 3 y 4 formo todos los números posibles de 4 cifras cada uno, por ejemplo, 3214, 1111, 2234 serían algunos. ¿Cuánto vale la suma de todos ellos?**

En primer lugar, calculemos cuántos números podemos escribir: serán las variaciones con repetición de 4 elementos tomados de 4 en 4, es decir $VR_{4,4} = 4^4 = 256$. En ellos, la cifra de las unidades la ocupará cada uno de los dígitos, 1, 2, 3, 4, el mismo número de veces, es decir: $\frac{4^4}{4} = 4^3$

Análogamente, las cifras de cualquier orden (decenas, centenas y unidades de millar). Así pues, la suma de todos los números escritos será:

$S = (1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^3)$ unidades + $(1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^3)$ decenas +

+ $(1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^3)$ centenas + $(1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^3)$ unidades de millar =

$= 4^3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) \cdot (1 + 10 + 100 + 1000) = 4^3 \cdot 10 \cdot 1111 = 711040.$

5. **Las fórmulas de combinaciones de *n* elementos tomados de *k* en *k* coinciden con las de permutaciones con repetición de *n* elementos con índices de repetición *k* y *n – k*. Te pedimos que lo compruebes estableciendo una correspondencia término a término entre las parejas de números diferentes elegidos del 1 al 6 y las claves formadas con dos *a´s* y cuatro *b´s*.**

{1, 2}	{1, 3}	{1, 4}	{1, 5}	{1, 6}	{2, 3}	{2, 4}	{2, 5}	{2, 6}	{3, 4}	{3, 5}	{3, 6}	{4, 5}	{4, 6}	{5, 6}
aabbbb	*ababbb*	*abbabb*	*abbbab*	*abbbba*	*baabbb*	*bababb*	*babbab*	*babbba*	*bbaabb*	*bbabab*	*bbabba*	*bbbaab*	*bbbaba*	*bbbbaa*

Asignamos a cada permutación los lugares que ocupan en ella las *a´s*. Observamos que en esta correspondencia la ordenación creciente de las parejas se corresponde con la ordenación alfabética de las claves.

Es decir, $C_{6,2} = PR_6^{2,4}$ y de modo general: $C_{n,k} = PR_n^{k,n-k}$.

6. **¿De cuántas formas puedo repartir 12 caramelos iguales entre Alicia, Beatriz y Carlos si a cada uno de ellos le tengo que dar por lo menos tres?**

Repartamos, en primer lugar, 3 caramelos a cada uno, quedándonos, pues, 3 caramelos a repartir entre los tres.

Al tratarse de números pequeños (3 caramelos, 3 personas) podemos escribir todas las formas:

a) los 3 caramelos a una sola persona ⟶ 3 casos: 300 – 030 – 003

b) 2 caramelos a una persona y 1 a otra ⟶ 3 · 2 = 6 casos: 210 – 201 – 120 – 021 – 102 – 012

c) 1 caramelo a cada persona ⟶ 1 caso: 111

En total, pues, 3 + 6 + 1 = 10 formas de hacer el reparto.

Tratemos de generalizar el problema. Queremos repartir 10 caramelos entre 3 personas. La simple enumeración de los casos resulta ahora una tarea poco elegante, y la representación empleada puede ser mejorada. Ahora 361 va a ser representado por 111/111111/1 donde las barras de separación nos indican el cambio de receptor, pero con la afortunada idea de que no se anota el no llevarse ningún caramelo. Así, 307 ⟷ 111//1111111, 046 ⟷ /1111/111111, 0010 ⟷ //1111111111. De esta manera se observa que hay tantos repartos como permutaciones de 12 elementos con índices de repetición 10 (los unos) y 2 (las barras). Por tanto, no sólo sabemos repartir muchos caramelos entre una muchedumbre, sino que conocemos el número de soluciones formadas por enteros no negativos de la ecuación $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$. Este número es:

$$PR_{m+n-1}^{m,n-1} = \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-1}{n-1}$$

7. **Un restaurante ofrece en cada cena tres postres y doble número de primeros platos que de segundos. Cada cena consiste en un primero, un segundo y un postre. ¿Cuál es el menor número de segundos platos que tiene que ofrecer para que un cliente pueda tomar cenas diferentes durante los 365 días de un año?**

El restaurante tiene $2n$ primeros, n segundos y 3 postres, por lo que el número de cenas distintas que puede ofrecer es $2n \cdot n \cdot 3 = 6n^2$.

Para que $6n^2 \geq 365$, $n^2 > 60$, es decir $n \geq 8$, por lo que el restaurante deberá ofrecer, al menos, 8 segundos platos para cumplir lo pedido.

8. **El código de cierta caja de seguridad consiste en cuatro dígitos, no necesariamente distintos, y dos letras que tampoco tienen por qué ser distintas. Estos seis caracteres pueden aparecer en cualquier lugar, con la condición de que las letras deben ir siempre juntas. Si podemos elegir entre 26 letras, ¿cuántos códigos válidos hay?**

Calculemos, en primer lugar, los grupos de dos letras que puede haber, que son $VR_{26,2} = 26^2$ y los grupos de cuatro dígitos, que son $VR_{10,4} = 10^4$. Por otra parte las letras pueden aparecer seguidas en los lugares 1-2, 2-3, 3-4, 4-5 y 5-6 de cada código. En total el número de códigos será: $26^2 \cdot 10^4 \cdot 5 = 33800000$.

9. **¿Cuántos números de cuatro cifras tienen al menos una que sea 2 ó 3?**

La cantidad de números de cuatro cifras es 9000 (desde 1000 a 9999).

De ellos, calculemos aquellos que no tienen ni 2 ni 3, es decir, los formados por 0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (excluyendo los que comienzan por 0). En la primera posición podemos poner 7 cifras (todas menos 0, 2 y 3) y en las otras posiciones 8 (todas menos 2 y 3) en cada una de ellas, es decir $7 \cdot 8^3 = 3584$.

Así pues, la cantidad pedida será 9000 - 3584 = 5416.

10. **De los 6300 primeros enteros positivos, ¿cuántos no son múltiplos ni de 2, ni de 3, ni de 5, ni de 7?**

Calcularemos cuántos de esos números son divisibles por alguno de los factores dados, es decir, el cardinal del conjunto "múltiplos de 2 o múltiplos de 3 o múltiplos de 5 o múltiplos de 7, menores que 6301". El cardinal (o cualquier medida) del conjunto unión viene dado por la fórmula card $(A \cup B)$ = card(A) + card(B) - card$(A \cap B)$, que generalizada a la unión de cuatro conjuntos dice:

card$(A \cup B \cup C \cup D)$ = card (A) + card(B) + card(C) + card(D) - card$(A \cap B)$ - card$(A \cap C)$-...

...+ card $(A \cap B \cap C)$ + card $(A \cap B \cap D)$ +...- card$(A \cap B \cap C \cap D)$

Es decir, tenemos que calcular los múltiplos de 2, los múltiplos de 3, ..., los múltiplos de 2 y 3, los de 2 y 5, ..., los de 2, 3 y 5, ... y los de 2,3, 5 y 7. Organicemos resultados y sumas parciales en una tabla:

Múltiplos de	Cantidad	Múltiplos de	Cantidad	Múltiplos de	Cantidad	Múltiplos de	Cantidad
2	3150	6 (2 y 3)	1050	30 (2, 3 y 5)	210	210 (2, 3, 5 y 7)	30
3	2100	10 (2 y 5)	630	42 (2, 3 y 7)	150		
5	1260	14 (2 y 7)	450	70 (2, 5 y 7)	90		
7	900	15 (3 y 5)	420	105 (3,5 y 7)	60		
		21 (3 y 7)	300				
		35 (5 y 7)	180				
	Σ= 7410		Σ= 3030		Σ= 510		Σ= 30

Introduzcamos los cálculos en la fórmula: 7410 – 3030 + 510 –30 = 4860.

Lo que nosotros queríamos eran los otros, los que no eran múltiplos, es decir, 6300 – 4860 =1440

11. **En una cuadrícula 5 x 5 seleccionamos tres de los 25 cuadraditos, de forma que no haya dos de ellos que estén en una misma fila o columna. ¿Cuántas elecciones son posibles?**

Elegimos uno de los cuadraditos, *a*. Hay 25 opciones para hacerlo. Si tachamos su fila y su columna nos quedan 16 cuadraditos que no están en su fila ni en su columna. Elegimos uno de ellos, *b*, y tachamos su fila y su columna. Quedan, entonces, 9 cuadraditos que no están ni en la fila ni en la columna de *a* ni de *b*. Elegimos uno de ellos, *c*.

Así pues, la elección (*a b c*) puede hacerse de 25 · 16 · 9 formas. Como esta elección es igual que, por ejemplo, la (*bca*), el número total de elecciones posibles es $\frac{25 \cdot 16 \cdot 9}{3 \cdot 2} = 600$ formas posibles.

12. **En una excursión hay seis turistas y dos guías. Cada turista debe elegir un guía pero cada guía debe tener al menos un turista. ¿Cuántos posibles grupos guía-turista pueden hacerse?**

Representemos por (*a*, *b*) la elección de *a* turistas para el guía *A* y *b* para el guía *B*. Así que podrían presentarse (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2) y (5, 1) elecciones posibles. Pero en cada una de ellas, por ejemplo, la (2, 4) habrá $C_{6,2}$ formas de elegir dos turistas para el guía *A*. Así pues, el número total de elecciones será $\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}= 62$. La solución del problema nos invita a pensar de otra manera. Casi hemos sumado todas las posibles combinaciones de seis elementos. Nos han faltado dos, $\binom{6}{0}$ y $\binom{6}{6}$. De haberlo hecho hubiéramos conseguido 64 que son las variaciones con repetición de 2 elementos tomados de seis en seis. Efectivamente, si ordenamos a los turistas, cada elección puede ser representada por un número de seis cifras formadas con unos y doses, no contando ni 111111, ni 222222, e interpretando los puestos de los unos con los turistas que van con el primero de los guías y los puestos de los doses los que van con el segundo guía.

PRO 2. Estadística

1. **En un grupo de hombres y mujeres la edad media es 31 años. Si la media de la edad de los hombres es 35 años y la de las mujeres es 25, calcula el cociente entre el número de hombres y el de mujeres.**

Llamando *m* el número de mujeres y *h* al número de hombres, podemos escribir que $35h + 25m = 31\,(h + m)$.

Así pues, $4h = 6m$, con lo que el cociente pedido es $\frac{h}{m} = \frac{3}{2}$.

2. **Se consideran los números *p*, *q*, *r*, *s* y *t*. La media de *p*, *q* y *r* es 8 y la media de *p*, *q*, *r*, *s* y *t* es 7. ¿Cuál es la media de *s* y *t*?**

Nos piden $\frac{s+t}{2}$ y sabemos que $\frac{p+q+r}{3} = 8$ y que $\frac{p+q+r+s+t}{5} = 7$.
Así pues, $p + q + r = 24$ y $p + q + r + s + t = 35$, de donde $s + t = 11$ y $\frac{s+t}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$.

3. **La edad media de los integrantes de un grupo de *boy-scouts* aumentaría en un año si abandonaran el grupo cinco chicos de 9 años de edad cada uno o si se unieran al grupo cinco chicos de 17 años cada uno. ¿Cuántos chicos componen dicho grupo?**

Llamemos n al número de chicos del grupo y S a la suma de sus edades.

Así pues, $\frac{S-45}{n-5}=\frac{S}{n}+1$ y $\frac{S+85}{n+5}=\frac{S}{n}+1$.

Haciendo cálculos, podemos escribir:

$nS - 45n = nS - 5S + n^2 - 5n$ (*) y $nS + 85n = nS + 5S + n^2 + 5n$.

Restando a la segunda ecuación la primera obtenemos que $130n = 10S + 10n$, es decir, $S = 12n$ y sustituyendo, por ejemplo, en (*) nos lleva a $-45n = -60n + n^2 - 5n$, es decir

$n^2 - 20n = 0$, con lo que $n = 20$.

Hay 20 chicos en el grupo.

4. **La media aritmética de los nueve números del conjunto {9, 99, 999, ..., 999999999} es un número *M* de nueve cifras, todas distintas. ¿Cuál es la cifra que no está en *M*?**

La media pedida es $M = 1 + 11 + 111 + \ldots + 111111111$, es decir 123456789, número de nueve cifras, ninguna de ellas 0. Es, por tanto, 0 la cifra que no está en dicho número.

5. **Dados cuatro números, elegimos tres, calculamos su media y a la media de estos tres le sumamos el cuarto número. Como ves, esto lo podemos hacer de cuatro formas, dejando cada vez uno de los números sin elegir. Si obtenemos como resultados 17, 21, 23 y 29, ¿cuál es el mayor de los cuatro números que teníamos?**

Llamando a, b, c y d a los números, podemos escribir:

$$\frac{a+b+c}{3}+d=17;\ \frac{a+b+d}{3}+c=21;\ \frac{a+c+d}{3}+b=23;\ \frac{b+c+d}{3}+a=29;$$

Estas cuatro ecuaciones las podemos escribir como $\begin{cases} a+b+c+3d=51 \\ a+b+d+3c=63 \\ a+c+d+3b=69 \\ b+c+d+3a=87 \end{cases}$ que, sumadas, nos

conducen a $6a + 6b + 6c + 6d = 270$, es decir, $a + b + c + d = 45$.

De las cuatro ecuaciones anteriores, observamos que el mayor de los cuatro números es a y de la 4ª ecuación y esta última, restando, obtenemos $2a = 42$, por lo que el mayor de esos cuatro números es $a = 21$.

6. **En una reunión hay un cierto número de personas. Curiosamente, la media de las edades de esas personas coincide con el número de personas que hay. Entra entonces en la reunión una persona de 29 años y vuelve a coincidir la edad media de las que hay con el número de personas. ¿Cuántas personas había en la reunión al principio?**

Si hay n personas, de media n, la suma de las edades es n^2.
Así pues, $\frac{n^2 + 29}{n + 1} = n + 1$, con lo que $n^2 + 29 = (n + 1)^2$ y de ahí, $29 = 2n + 1$ y $n = 14$.
Había 14 personas en la reunión.

7. **El peso medio de las patatas que había en bolsa subió al doble cuando a las cuatro patatas que había añadimos una patata inmensa. ¿Cuál es el cociente entre el peso de este patatón y la suma de los pesos de las cuatro patatas que había?**

Llamando $\overline{x}$ a la media del peso de las cuatro patatas e y al peso de la patata grande, tenemos que $\frac{4\overline{x} + y}{5} = 2\overline{x}$, con lo que $y = 6\overline{x}$, por lo que el cociente pedido, $\frac{y}{4\overline{x}}$, será $\frac{3}{2}$.

8. **En un centro se hizo la misma prueba del Concurso de Primavera a un pequeño grupo de alumnos de ESO y a todos los de Bachillerato. La media global fue de 84 puntos. Los de ESO, que eran solamente el 10%, obtuvieron todos la misma puntuación y la media de los de Bachillerato fue de 83 puntos. ¿Cuál fue la puntuación de cada estudiante de ESO?**

Llamando n al número de estudiantes de ESO, habría $9n$ estudiantes de Bachillerato. Si x es la puntuación de cada estudiante de ESO, tenemos que $\frac{nx + 9n \cdot 83}{n + 9n} = 84$, es decir, $x + 747 = 840$, con lo que $x = 93$ puntos.

9. **De una lista de nueve números, sabemos que seis de ellos son 7, 8, 3, 5, 9 y 5. ¿Cuál es el mayor valor posible para la mediana de los nueve?**

El mayor valor para la mediana aparecerá cuando los tres números que faltan sean mayores o iguales que 9. En ese caso, ordenados de menor a mayor, serían: 3, 5, 5, 7, 8, 9, x, y, z y la mediana sería 8.

10. **La media, mediana, moda (única) y recorrido de un conjunto de ocho enteros son todos iguales a 8. ¿Cuál es el mayor entero que puede aparecer en este conjunto?**

Si el recorrido es 8 y la moda 8, los demás enteros deben ser menores que 17.

Si el entero mayor fuera 16, el recorrido 8 y la moda 8, todo ello obligaría a que los otros seis enteros fueran mayores o iguales que 8, y la media daría más de 8.

Si el entero mayor fuera 15, el menor sería 7. La situación con menos media sería la de tres sietes, cuatro ochos y el 15, que tiene media superior a 8.

Analizando lo anterior podemos pensar en un conjunto en que el mayor sea 14. Sus seis puntos de diferencia con la media pueden ser compensados con tres seises. Con cuatro ochos conseguimos que la moda y la media sean 8 y hemos resuelto el problema. El mayor entero que puede haber es 14.

11. **En un cierto concurso de problemas de matemáticas, el 10% de los participantes obtuvo 70 puntos, el 25%, 80 puntos, el 20% obtuvo 85 puntos, el 15% obtuvo 90 puntos y el resto de los participantes, obtuvo 95 puntos. ¿Cuál fue la diferencia entre la media y la mediana de las puntuaciones de ese examen?**

A la vista del enunciado, observamos que el 35% obtuvo una nota menor o igual que 80 puntos y que el 55% obtuvo una nota menor o igual que 85 puntos, así que la mediana es 85.

Por otra parte, llamando n al número de estudiantes, la media

$\bar{x} = \dfrac{70\cdot\frac{n}{10}+80\cdot\frac{n}{4}+85\cdot\frac{n}{5}+90\cdot\frac{15n}{100}+95\cdot\frac{3n}{10}}{n} = 7+20+17+13{,}5+28{,}5 = 86$ puntos, por lo que la diferencia pedida será de un punto.

12. **Añadimos un número n al conjunto {3, 6, 9, 10} formando así un conjunto de cinco elementos. Si la media del conjunto resultante es igual a su mediana, ¿cuál es la suma de todos los posibles valores de n?**

Distingamos los posibles casos:

a) $n \geq 9$. Entonces la mediana será 9.

b) $6 \leq n < 9$. Entonces, el conjunto, ordenado, sería 3, 6, n, 9, 10 y la mediana es n.

c) $n < 6$, por lo que la mediana sería 6.

La media, en cualquier caso, será $\dfrac{28+n}{5}$.

Así pues, en a) $\dfrac{28+n}{5} = 9$, $n = 17$; en b) $\dfrac{28+n}{5} = n$, $n = 7$, y en c) $\dfrac{28+n}{5} = 6$, $n = 2$, con lo que la suma pedida será 17+ 7 + 2 = 26.

PRO 3. Probabilidad

1. **Beatriz escoge al azar dos números distintos del conjunto {8, 9, 10} y los suma. Carlos escoge también al azar otros dos números distintos del conjunto {3, 5, 6} y los multiplica. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado obtenido por Beatriz sea mayor que el obtenido por Carlos?**

Beatriz tiene tres opciones de elegir, cuyas sumas son 17, 18 y 19. Carlos tiene otras tres opciones, cuyos productos son 15, 18 y 30. De las nueve posibles elecciones conjuntas, Beatriz obtiene número mayor que Carlos, si Carlos elige el producto 15 –lo que suponen 3– o si Carlos elige el producto 18 y Beatriz la suma 19, es decir, una más.

Como todas las elecciones son igualmente probables, la probabilidad pedida será $p = \frac{4}{9}$.

2. **Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números aparecidos en dos de ellos coincida con el del otro dado?**

Sabemos que hay 6^3 resultados equiprobables representados por las ternas ordenadas de los valores de los tres dados. Separamos el suceso pedido en sucesos disjuntos según el dato suma: "Dos unos y un dos", " Un uno, un dos y un tres", "Dos doses y un cuatro", "Un uno, un tres y un cuatro", "Un dos, un tres y un cinco", "Un uno, un cuatro y un cinco", "Dos treses y un seis", "Un dos, un cuatro y un seis", "Un uno, un cinco y un seis" Estos sucesos se corresponden con seis resultados si los tres valores de los dados son distintos (seis de ellos) y con tres si hay dos iguales (los otros tres).

Por tanto tenemos $6 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 45$ resultados favorables y la probabilidad pedida es $p = \frac{45}{216} = \frac{5}{24}$.

3. **Pedro elige al azar dos números distintos del conjunto {1, 2, 3, 4, 5} y Quino elige uno del conjunto {1, 2, 3, 4, …, 10}. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de Quino sea mayor que la suma de los dos que eligió Pedro?**

Si Quino elige 1, 2 ó 3 pierde, pues los dos números de Pedro al menos suman 3. Veamos con cualesquiera de las otras opciones de Quino, en cuántas gana.

Quino elige	Gana, si Pedro elige	
4	(1, 2)	1
5	(1, 2) y (1, 3)	2
6	(1, 2), (1, 3), (1, 4) y (2, 3)	4
7	(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3) y (2, 4)	6
8	(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4)	8
9	(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)	9
10	En todas las ocasiones: $\binom{5}{2} = 10$	10

Como Pedro tiene 10 opciones para elegir, $\binom{5}{2}$, y Quino otras 10, en total hay 100 resultados posibles de los que $1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 9 + 10 = 40$ son favorables a que gane Quino.

Su probabilidad es $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$.

4. **¿Cuál es la probabilidad de que un entero del conjunto {1, 2, 3, ..., 100} sea divisible por 2 pero que no sea divisible por 3?**

Un número es divisible por 2 pero no por 3 si es divisible por 2 y no es divisible por 6. El número de enteros divisibles por 2 es 50 y divisibles por 6 hay 16, luego tenemos 50 - 16 = 34 enteros divisibles por 2 y no divisibles por 3, por lo que la probabilidad pedida será $p = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$.

5. **Al lanzar una moneda 4 veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras sea mayor que el de cruces?**

El número de caras será mayor que el de cruces si aparecen 3 ó 4 caras. La probabilidad de que aparezcan 3 caras es $p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \binom{4}{3} = \frac{4}{16}$ y la de que aparezcan 4 caras es $p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$, por lo que la probabilidad pedida será $p = p_1 + p_2 = \frac{5}{16}$.

Otra forma de enfocar el problema es calcular la probabilidad de que aparezca el mismo número de caras que de cruces, es decir 2 y 2, que sería $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \binom{4}{2} = \frac{6}{16}$, por lo que la probabilidad de que aparezca un número distinto de caras que de cruces sería $1 - \frac{6}{16} = \frac{10}{16}$ y, al suponer las monedas equilibradas, la probabilidad de que aparezcan más caras que cruces sería igual que la de que aparezcan más cruces que caras, es decir, la mitad de $\frac{10}{16}$, o sea, $\frac{5}{16}$.

Este problema también puede resolverse mediante la regla de Laplace. Para ello, basta con escribir cuáles son todos los casos posibles y estudiar en cuántos de ellos el número de caras es mayor que el número de cruces.

6. **Al tirar dos dados usuales de seis caras, ¿cuál es la probabilidad de que haya una diferencia de tres puntos entre los resultados de las dos caras superiores?**

Al tirar dos dados hay 36 casos posibles y la diferencia de 3 puntos se dará en (1, 4), (4, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 6) y (6, 3), por lo que la probabilidad pedida es $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

7. **Tenemos dos dados con las caras numeradas de la siguiente forma: 1, 1, 2, 2, 3, 3, en uno de ellos y 4, 4, 5, 5, 6, 6, en el otro. Los lanzamos y sumamos los números obtenidos en la cara superior. ¿Cuál es la probabilidad de que esta suma sea impar?**

La suma será impar si obtenemos par en el 1er dado e impar en el 2º o viceversa.
Así pues, la probabilidad pedida es $p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.
Este problema también puede resolverse mediante la regla de Laplace.

8. **Se tira una moneda tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos y sólo dos caras seguidas?**

Saldrá lo pedido si obtenemos $c\ c +$ ó $+ c\ c$ cuya probabilidad es $p = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.
Este problema también puede resolverse mediante la regla de Laplace.

9. **En una bolsa hay dos bolas rojas y dos azules. Se sacan a la vez dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?**

Las bolas serán de distinto color si hacemos la extracción Roja-Azul o la Azul-Roja.

La probabilidad de ambas extracciones es la misma y por tanto $p = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.
Este problema también puede resolverse mediante la regla de Laplace.

10. **Tiramos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos números obtenidos sean los dígitos de un cuadrado perfecto?**

Los cuadrados perfectos de dos cifras que podemos obtener con dos dados son: 16, 25, 36, 64. Como no se tiene en cuenta el orden en que salen las cifras, hay dos resultados favorables a cada uno de ellos, y por tanto ocho para nuestro suceso. Así pues, la probabilidad pedida es $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

11. **Tiramos un dado tres veces. Halla la probabilidad de suma 8 y la probabilidad de suma 12. Busca un razonamiento, que no sea simplemente contando, que nos permita conocer las probabilidades de las distintas sumas.**

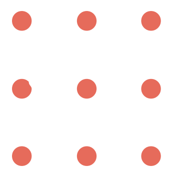
Como tiramos dados, el menor número que puede aparecer en ellos es el 1. Vamos a interpretar suma 8 como repartir (8 – 3) caramelos entre tres personas. Este problema ya lo estudiamos en el problema 6 de PRO 1, y vimos que era equivalente a buscar la soluciones con enteros no negativos de $x + y + z = 5$, y su respuesta: $\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$

Esta fórmula funciona hasta suma 9 de dados, ya que en este caso la ecuación asociada $x + y + z = 6$, tiene soluciones con un sumando igual a seis, y no son traducibles a sacar 7 con un dado. De todas formas, modificando la fórmula tendríamos que suma 9 tiene $\binom{8}{2} - 3 = 25$ resultados favorables (descontado las soluciones (6, 0, 0), (0, 6, 0) y (0, 0, 6)). De igual manera para suma 10 hay $\binom{9}{2} - 3 - 6 = 27$ resultados (habiendo descontado las tres soluciones con una coordenada 7, y las seis con coordenadas 6 , 1 y 0).

A partir de aquí ya no hacen falta cuentas nuevas pues el proceso es simétrico, "suma k" y "suma $21-k$" tienen resultados "complementarios" ($413 \longleftrightarrow 364$) para $k \geq 3$.

Es decir, si $3 \leq k \leq 8$, se tiene que $p(\text{suma } k) = p(\text{suma } 21-k) = \dfrac{\binom{k-1}{2}}{216}$; si $k=9$ es $p(9) = p(12) = \frac{25}{216}$
y si $k=10$ es $p(10) = p(11) = \frac{27}{216}$.
Las probabilidades pedidas son $p(8) = \frac{21}{216}$ y $p(12) = \frac{25}{216}$.

12. **Elegimos al azar tres puntos de los nueve del diagrama que mostramos. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres elegidos estén alineados?**



Hay $\binom{9}{3}$ posibles elecciones de tres puntos y sólo estarán alineados si elegimos los puntos de las diagonales, los de las filas o los de las columnas.

Así pues, la probabilidad es $p = \dfrac{8}{\binom{9}{3}} = \dfrac{8}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!}} = \dfrac{\cancel{8} \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot \cancel{8} \cdot 7} = \dfrac{2}{21}$

13. **Nadal y Federer juegan un partido al mejor de cinco sets, es decir, quien gane tres sets ha ganado el partido. La probabilidad de ganar cada set es $\frac{1}{2}$ para cada jugador y el ganar o no un set no influye en la probabilidad de ganar el siguiente. Si Federer ganó el segundo set y Nadal ganó el partido, ¿cuál es la probabilidad de que Federer ganara también el primer set?**

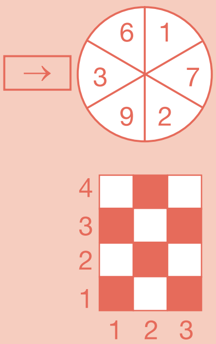
Se sugiere realizar un diagrama de árbol. Las únicas posibilidades de ganar Federer el 2º set y Nadal el partido se dan según el esquema siguiente: *NFNN*, *NFFNN*, *NFNFN*, *FFNNN* donde *NFFNN*, por ejemplo, significaría que Nadal ganó los sets 1º, 4º y 5º y Federer el 2º y el 3º. De estos 4 casos, en uno solo ganó Federer el 1er set, en *FFNNN*, pero resulta que no son equiprobables pues $p(NFNN) = \frac{1}{2^4}$ y $p(NFFNN) = \frac{1}{2^5}$.

Para salvar ese escollo, llamemos p a la probabilidad de cualquiera de los tres últimos, por lo que $p(NFNN) = 2p$, con lo que $2p + p + p + p = 1$ y $p = \frac{1}{5}$.

14. **Hacemos girar dos veces la ruleta de la figura y apuntamos el número que marca la flecha. Dividimos el primer número entre 4 y el segundo entre 5.**

Los restos obtenidos designan, respectivamente, una columna y una fila del tablero de la figura.

¿Cuál es la probabilidad de que el par de restos designe un cuadrado de color blanco?



Los restos posibles que pueden aparecer al dividir esos números entre 4 son: 3, 2, 1, 3, 2, 1 y al dividirlos entre 5 son: 3, 1, 1, 2, 2, 4.

Los cuadrados blancos responden a los restos (columna y fila) (2, 1), (1, 2), (3, 2), (2, 3), (1, 4) y (3, 4). Calculemos, entonces, la probabilidad de que aparezca cada uno de ellos:

$p\,(2, 1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}$; $p\,(1, 2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}$; $p\,(3, 2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}$; $p\,(2, 3) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}$; $p\,(1, 4) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}$ y $p\,(3, 4) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}$

Así pues la probabilidad de que el par de restos designe un cuadrado blanco será la suma de estas probabilidades, es decir $p = \dfrac{4+4+4+2+2+2}{36} = \dfrac{1}{2}$.

Una forma algo más corta de resolver el problema es observar que los cuadrados sombreados responden a restos que son ambos pares o ambos impares.

La probabilidad de obtener resto impar al dividir el primer número entre 4 es $\frac{2}{3}$, por lo que la de obtener resto par es $\frac{1}{3}$. Al dividir entre 5, obtendríamos resto impar con probabilidad $\frac{1}{2}$ (si la flecha apunta 1, 3, ó 6) y $\frac{1}{2}$ de probabilidad resto par. Así pues la probabilidad pedida sería $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

15. **Elegimos al azar cuatro números, *a*, *b*, *c*, *d*, entre los enteros 1, 2, …, 2010. ¿Cuál es la probabilidad de que *ad* - *bc* sea un número par?**

La probabilidad de elegir par o impar entre los números 1, 2, …, 2010 es $\frac{1}{2}$ en cada caso.
Por otra parte, la paridad del número *ad* - *bc* viene dada por la paridad de *a*, *b*, *c* y *d*, resultando impar solamente cuando solo uno de los dos sumandos es impar, y cada sumando es impar sólo si ambos factores son impares.

Calculemos, pues, *p* (*ad* - *bc*) sea impar.

$p((a \cdot d) \text{ sea impar}) = \frac{1}{4}$. Así pues $p((ad - bc) \text{ sea impar}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{8}$,
con lo que $p((ad - bc) \text{ sea par}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

16. **Un jugador paga 5 € por participar en el siguiente juego:**

Lanza un dado. Si aparece un número impar, ha perdido. Si aparece un número par, vuelve a lanzar el dado. En el caso de que aparezca el mismo número que antes, ha ganado; en cualquier otro caso, ha perdido. ¿Qué probabilidad tiene de ganar? ¿Cuánto debería ganar si el juego es justo?

Calculemos la probabilidad de ganar, *p*.
$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ (Gana si obtiene par y luego el mismo número). Así pues, si la probabilidad

de ganar es $\frac{1}{12}$ y paga 5 € por jugar, el premio debe ser 5 · 12 = 60 € para que el juego sea justo.

Bloque IV. A proponer por el departamento

Bloque IV. A proponer por el departamento

Introducción

Este bloque está dividido en los siguientes epígrafes:

DEP 1. Paridad.
DEP 2. Principio del palomar.
DEP 3. Problemas de generalización.
DEP 4. Sistemas de numeración.

La inclusión de estos epígrafes en el bloque a determinar por el departamento pretende únicamente servir como modelo de lo que se puede trabajar en él. Por supuesto, no es más que una elección, y hay otras muchas posibles e igualmente válidas.

Los problemas están agrupados alrededor de ideas muy sencillas y fáciles de entender, y sin embargo muy profundas, como suelen serlo las buenas ideas en matemáticas. Al resolverlos, los estudiantes se aproximarán a lo que significa demostrar, y encontrarán herramientas adecuadas y convincentes para argumentar con solidez y precisión la validez o no de resultados que en muchas ocasiones son capaces de intuir fácilmente.

Los requisitos previos para enfrentarse a estos problemas son escasos y naturales: para abordar los problemas que tienen que ver con la idea de paridad, bastará con que se den cuenta de que la suma o diferencia de dos números de igual paridad siempre es par, mientras que en caso contrario esta suma o diferencia será impar.

El principio del palomar, o de los casilleros viene a decir que si hay que guardar objetos (cartas, o palomas) en lugares (casillas de un casillero, agujeros de un palomar), y hay más objetos que lugares en los que guardarlos, en alguno de esos lugares habrá que poner más de un objeto. Así, no es casualidad que en un grupo de ocho personas dos al menos hayan nacido el mismo día de la semana: se trataría de “guardar” las ocho personas (las cartas o las palomas) en siete casillas, los siete días de la semana. ¿Qué significa guardar? Sencillamente, asignar a cada persona el día de la semana en que nació. Pero como hay más personas que días, es seguro que en alguno de ellos habrá más de una persona. El principio del palomar no dice en cuál de los días, ni cuántas personas habrá en él: puede ocurrir que las ocho personas hayan nacido en lunes, por ejemplo. Pero garantiza la existencia de algo. Identificar, en cada situación, (y pueden ser muy variadas), las cartas y las casillas es esencial para atar bien las ideas.

En el tercer epígrafe de este bloque se plantean situaciones en las que hay que buscar pautas, relacionar, conjeturar y generalizar. Números de Fibonacci, poligonales, triángulos de Sierpinski, o algún que otro juego servirán también de excusa para que los estudiantes puedan realizar pequeños trabajos de investigación y descubrir otras ideas bellas y fundamentales en matemáticas.

El último epígrafe se centra en los sistemas de numeración, comenzando con el griego y el romano, y proponiendo después algunos problemas muy curiosos que van a servir para entender cómo funcionan los sistemas de numeración posicionales.

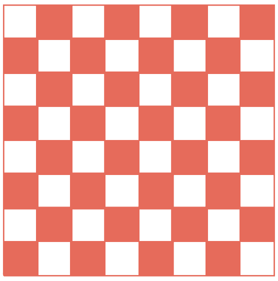
Bloque IV. Enunciados

DEP 1. Paridad

1. a) ¿Es posible cubrir completamente un tablero de ajedrez de 8 x 8 con piezas de dominó de 1 x 2? ¿Cuántas fichas necesitas?

b) ¿Y si quitamos las esquinas de una diagonal?

c) Un juego de dos jugadores consiste en ir colocando fichas de dominó sobre el tablero de ajedrez. El primero que no pueda colocar, pierde. En este juego el segundo jugador siempre puede ganar. ¿Cuál es la estrategia ganadora?



2. a) Un caballo de ajedrez parte de la esquina superior izquierda del tablero de ajedrez (posición a1) y retorna allí después de unos cuantos movimientos. ¿Cómo debe ser el número de movimientos que realiza: par o impar?

b) ¿Puede un caballo salir de la posición a1 y llegar a la posición h8 (esquina inferior derecha) pasando por todas las casillas exactamente una vez?

3. a) Colocamos todas las fichas de dominó en fila haciendo coincidir el número de puntos de fichas contiguas. Si en un extremo hay un 5, ¿qué número hay en el otro extremo? ¿Puedes hacerlo colocando fichas dobles en los extremos? ¿Y sólo en un extremo?

b) De un dominó quitamos la ficha 1-2, ¿es posible formar una cadena con las fichas restantes? ¿Es posible formar una cadena con las fichas restantes de modo que uno de los extremos acabe en 6?

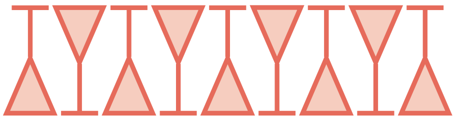
c) De un dominó quitamos las siete fichas que tienen alguna de sus partes blancas. ¿Puedes colocar el resto formando una única cadena?

4. Tenemos sobre la mesa una hilera de copas.

Hay 4 boca arriba alternándose con 5 que están boca abajo.

Se trata de ir dando vuelta a las copas, siempre de dos en dos, hasta conseguir que queden 5 boca arriba y 4 boca abajo.

¿Cómo debes hacerlo?



5. **a) Completa con los signos + y – para que el resultado sea cero.**

b) Un saltamontes está dando saltos, todos sobre una línea recta pero indistintamente hacia la derecha o hacia la izquierda, como le viene en gana. El primer salto es de 1 cm, el segundo de 2, el tercero de 3 y así sucesivamente. ¿Puede llegar al sitio del que partió después de 265 saltos?

a) 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 = 0

6. **Busca seis números impares *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f* que verifiquen** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$

7. **Carmen y sus amigos están sentados alrededor de una mesa redonda. Observan que cada uno tiene a su izquierda y a su derecha dos amigos del mismo sexo. Si hay cinco chicos, ¿cuántas chicas hay?**

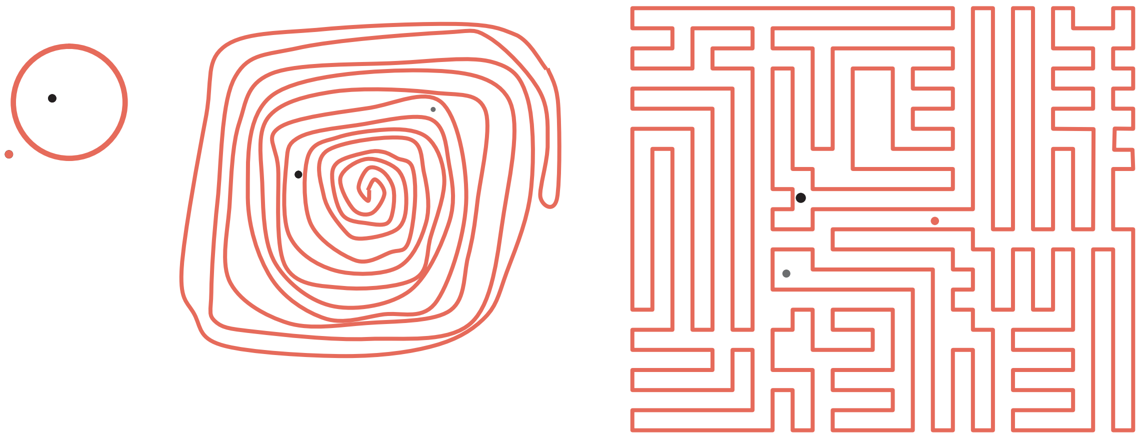
8. **Julián tiene 125 monedas de las cuales 62 son falsas y pesan un gramo menos que las auténticas. El peso de cada moneda es un número entero. Julián dispone de una balanza de platillos que indica con total precisión la diferencia de pesos entre los dos platillos. Julián desea saber si una moneda en concreto es verdadera o falsa. ¿Cuál es el mínimo número de pesadas que debe realizar para conseguirlo?**

9. **Escribimos en la pizarra los números del 1 al 185. Cada alumno sale a la pizarra, borra dos números y escribe en su lugar la diferencia entre el mayor y el menor de los números borrados. Se sigue jugando hasta que solo quede un número en la pizarra. ¿Puede ser ese número el cero?**

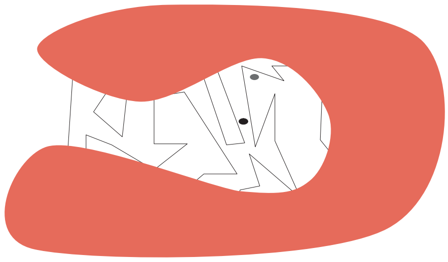
10.

Dentro o fuera

Teorema de Jordan: Una curva cerrada que no se corta a sí misma divide al plano en dentro y fuera. Aunque a veces no es tan fácil saber qué es dentro y qué es fuera. ¿Podrías decir si estos puntos están dentro o fuera de las curvas?



Para terminar de complicar las cosas, mientras estudiaba esta curva se me derramó el café. Ayúdame a decidir si los puntos están dentro o fuera.



11.

El juego de las piedras

Dos jugadores juegan a ir cogiendo alternativamente una o dos piedras de un montón de *N* piedras. Gana el jugador que, cuando ya no queden piedras en la mesa, tenga en su poder un número par de piedras.

Analiza el juego para distintos valores de *N*. ¿Pueden darse empates? ¿En qué casos habrá siempre un único ganador?

Para los casos en que no haya empates, ¿qué jugador ganará y cómo debe jugar?

DEP 2. Principio del palomar

1. En un cajón hay 3 calcetines blancos, 2 negros y 5 rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el mínimo número de calcetines que hay que sacar para estar seguros de que hay dos calcetines del mismo color?

2. En un club deportivo se practica fútbol, hockey o baloncesto. Hay 13 equipos en total. Demuestra que hay al menos cinco equipos del mismo deporte.

3. Escribimos doce enteros distintos de dos cifras. Demuestra que siempre podremos elegir dos de ellos cuya diferencia sea un número del tipo *aa*.

4. Dividimos un cuadrado en nueve cuadraditos iguales. En cada uno de ellos escribimos 1, –1 ó 0. Después sumamos los tres números que hay en cada fila, los tres de cada columna, y los tres de cada una de las dos diagonales. Demuestra que entre estas ocho sumas hay dos que tienen el mismo valor.

5. Pintamos 51 puntos en un cuadrado de 1 metro de lado. Demuestra que hay al menos tres puntos que pueden taparse con una ficha cuadrada de 20 cm de lado.

6. En un grupo de cinco personas, al menos dos tienen el mismo número de amigos en el grupo. ¿Es cierto? Justifica tu repuesta.

7. Varios equipos de fútbol participan en un torneo, en el cual cada uno de ellos debe jugar con cada uno de los restantes exactamente un partido. Demuestra que en cualquier momento del torneo hay dos equipos que han jugado el mismo número de partidos.

8. A un congreso asisten 201 científicos de cinco nacionalidades distintas. Se sabe que en cada grupo de seis, al menos dos tienen la misma edad. Demuestra que habrá un grupo de cinco personas de la misma edad, nacionalidad y sexo.

9. **Se colocan 33 torres sobre un tablero de ajedrez. Demuestra que siempre habrá al menos cinco que no se ataquen mutuamente.**

10. **Consideramos seis puntos sobre una circunferencia. Trazamos todos los segmentos que unen dos de los puntos, coloreándolos en rojo o en azul.**

Demuestra que cualquiera que sea la coloración, siempre se formará un triángulo cuyos lados son los tres del mismo color.

(Este problema se puede enunciar en otros términos: seis personas asisten a una fiesta. Seguro que hay al menos tres que se conocen de antes, o tres que no se conocen).

11. **Matematilandia tiene sólo un aeropuerto, pero tiene quince equipos de fútbol, con 11 jugadores cada uno. Todos ellos tienen que viajar hoy a Madrid, donde se celebra un campeonato, y no han reservado billete. Salen diez vuelos de Matematilandia a Madrid, y cada uno de ellos tiene 15 plazas libres. El jugador Messiov decide viajar en su avioneta particular. Demuestra que al menos un equipo llegará completo a Madrid.**

12. **Demuestra que si elegimos 51 números entre los números 1, 2, 3 ,…, 100 siempre habrá dos al menos que sean primos entre sí.**

DEP 3. Problemas de generalización

1. **Observa la siguiente tabla en la que hemos ido colocando los números siguiendo una espiral: ¿En qué fila quedará colocado el número 400?**

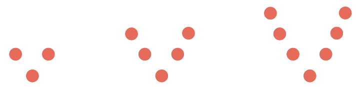
FILA 3	37	38	39	40	41	42	43
FILA 2	36	17	18	19	20	21	44
FILA 1	35	16	5	6	7	22	45
FILA 0	34	15	4	1	8	23	46
FILA –1	33	14	3	2	9	24	47
FILA –2	32	13	12	11	10	25	48
FILA –3	31	30	29	28	27	26	49
FILA –4						51	50

2. **Las siguientes figuras muestran letras (V, W, L y Z) de distinto tamaño construidas siguiendo ciertas pautas con un número entero de puntos. Podemos hablar así de números V, W, L y Z: por ejemplo, 3, 5 y 7 son números V y 5, 9 y 13 son números W.**

Para cada construcción contesta:

Números V

V_1 V_2 V_3



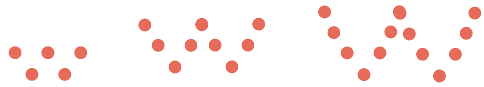
¿Hay números V con 54 puntos?

¿Y con 23?

Calcula cuántos puntos tiene V_n.

Números W

W_1 W_2 W_3



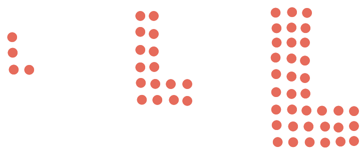
¿Hay números W con 29 puntos?

¿Y con 55?

Calcula cuántos puntos tiene W_n.

Números L

L_1 L_2 L_3



¿Hay números L con 192 puntos?

¿Y con 256?

Calcula cuántos puntos tiene L_n.

Números Z

Z_1 Z_2 Z_3

¿Hay números Z con 33 puntos?

¿Y con 46?

Calcula cuántos puntos tiene Z_n.

3. **a) ¿Cuánto suman los diez primeros números naturales? ¿Y los diez mil primeros números naturales? Encuentra una fórmula para la suma de los *n* primeros números naturales.**

b) ¿Cuánto suman los veinte primeros números impares? ¿Y los cinco mil primeros números impares? Encuentra una fórmula para la suma de los *n* primeros números impares.

4. **El 23 de agosto de 2009 fue hallado por un equipo de la Universidad de los Ángeles, California (UCLA) el mayor número primo conocido hasta la fecha: $2^{43112609} - 1$.**

Es un primo de Mersenne, esto es, de la forma $2^n - 1$ y tiene 12.978.189 dígitos. ¿En qué cifra acaba?

Dos números primos que son impares consecutivos se denominan *primos gemelos*. Por ejemplo, 11 y 13, 29 y 31 son primos gemelos. La mayor pareja de primos gemelos conocida hasta el momento es

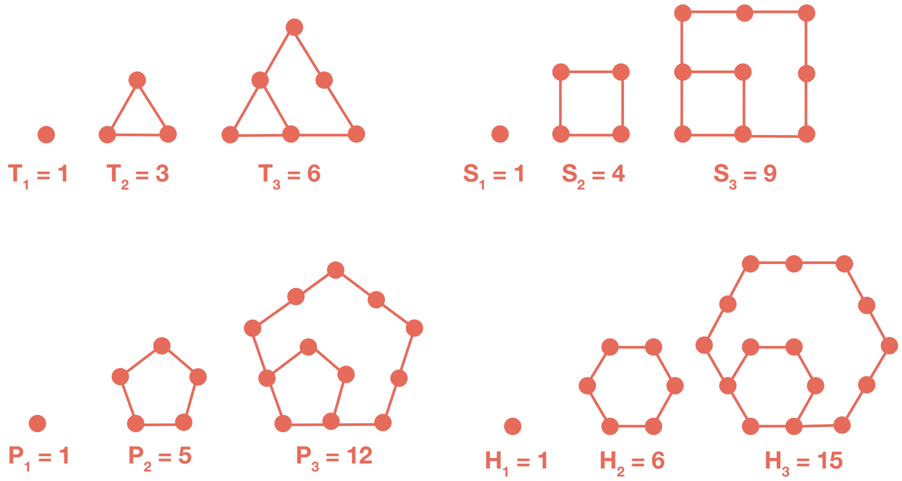
$(65516468355 \cdot 2^{333333} - 1,\ 65516468355 \cdot 2^{333333} + 1)$

¿Puedes decirnos en qué cifra acaban?

5. **Números poligonales**

Algunos números están asociados a polígonos y tienen nombres geométricos:

Aquí tienes representados los números triangulares y los números cuadrados, los pentagonales y los hexagonales.



a) Encuentra una fórmula para S_n.

b) Dibuja una estructura que represente el número cuadrado S_7 como suma de dos números triangulares consecutivos. ¿Cuáles? ¿A qué número cuadrado es igual $T_9 + T_{10}$?, ¿y $T_n + T_{n+1}$?

c) Encuentra una fórmula para T_n.

d) Busca una relación entre los números pentagonales y los triangulares. ¿Sabrías encontrar una fórmula que nos dé un número pentagonal cualquiera?

e) Busca una relación entre los números hexagonales y los triangulares. ¿Sabrías encontrar una fórmula que nos dé un número hexagonal cualquiera?

6. **En un bar hay mesitas cuadradas de cuatro plazas. Uniendo tres de ellas en fila pueden sentarse ocho personas. ¿Cuántas personas pueden sentarse si unimos 20 mesas? ¿Cuántas mesas debemos unir para sentar a 19 personas? ¿Y para sentar a 233? Da una fórmula que indique el número de mesas necesarias para que se sienten *N* personas.**

7. **Los triángulos de Sierpinski.**

Observa las cuatro figuras que te damos: en la primera, hay un triángulo equilátero rojo. Cada una de las siguientes se obtiene de la anterior repitiendo cierto proceso.

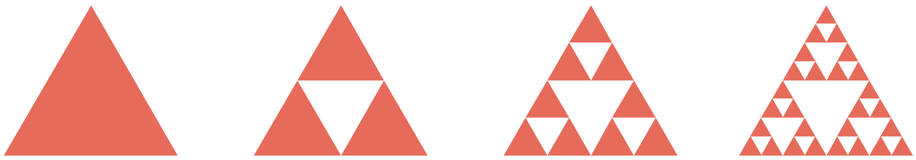
a) ¿Cómo se forma la siguiente figura?

b) Si el área de la parte coloreada en el primer triángulo es 1 u^2, ¿cuál es el área de la parte coloreada en el cuarto triángulo? ¿Y en el decimoprimero?

c) ¿Y el área de la parte blanca?

d) ¿Cuántos triángulos de cada color habrá en la figura 1200?

e) Si el perímetro del triángulo grande es 1 u, ¿cuál será el perímetro de la zona roja en la enésima figura?



8. **Números de Fibonacci y patrones con ladrillos**

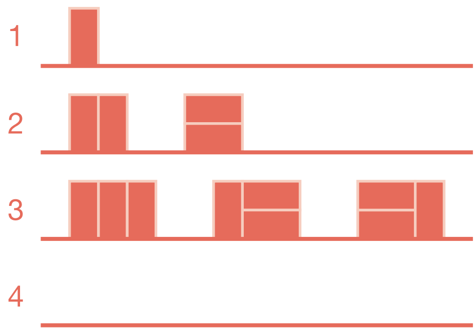
Si queremos construir una pared de dos unidades de alto con ladrillos que miden 2 X 1 unidades, podemos hacerlo de distintas formas según el largo de la pared. Observa la figura:

Si queremos que sea de longitud 1, solo podemos hacerlo de una forma, si la queremos hacer de longitud 2, tenemos dos opciones, …

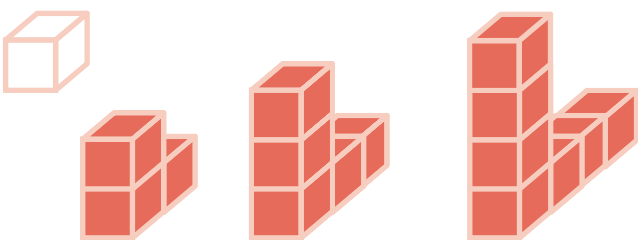
¿Cuántas formas hay de hacer un muro de longitud 4? ¿Y 5?

Halla las formas que hay de construirlo para longitudes de 1 a 10.

Observa los números que obtienes, ¿cómo se forma la sucesión?



9. **Con cubos blancos hacemos construcciones en forma de L y una vez armadas, pintamos de rojo las caras visibles (las que apoyan en el suelo no son visibles). En la construcción 500, ¿cuántas caras pintaré?**



Construcción 1 Construcción 2 Construcción 3

10. **El triángulo de Pascal**

Observa la siguiente pirámide.

a) Escribe las dos filas siguientes

b) ¿Cuánto suman los números de la fila *n*?

1 — Fila 0
1 1 — Fila 1
1 2 1 — Fila 2
1 3 3 1 — Fila 3
1 4 6 4 1 — Fila 4
1 5 10 10 5 1 — Fila 5
1 6 15 20 15 6 1 — Fila 6

11. **Las torres de Hanoi**

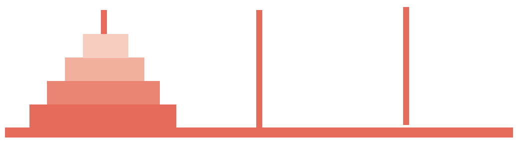
(Puedes jugar online en http://www.aulademate.com/contentid-99.html)

Objetivo: llevar los discos de la varilla izquierda a la varilla derecha.

Reglas del juego:

- **No se puede desplazar más de un disco en cada movimiento.**
- **Un disco sólo se puede apoyar sobre otro de diámetro mayor.**

Encuentra una regla que relacione el número de movimientos necesarios para resolver una torre de *n* discos habiendo ya resuelto una torre de *n* – 1 discos. Para ello comienza estudiando las torres más sencillas.



12. **Las ranas saltarinas**

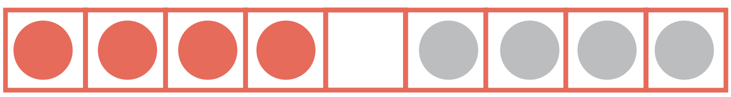
(Puedes jugar online en http://www.albinoblacksheep.com/flash/frog)

Objetivo: intercambiar la posición de las ranas.

Reglas del juego:

- **Una rana puede saltar al cuadrado contiguo o saltar por encima de otra rana al cuadrado siguiente si está libre.**
- **No se puede saltar por encima de más de una rana.**
- **Las ranas sólo pueden avanzar, nunca retroceder.**

¿Cuántos movimientos son necesarios con 4 ranas de cada color? ¿Y con 100?



DEP 4. Sistemas de numeración

A lo largo de la historia el ser humano ha tenido necesidad de contar y de representar de alguna forma las cantidades que contaba. Para pequeñas cantidades podía utilizar marcas en un bastón, nudos en una cuerda, etcétera, pero para cantidades grandes era preciso utilizar otros métodos más sofisticados: los sistemas de numeración.

Todos los sistemas de numeración utilizan símbolos (puntos, rayas, letras, dibujos, guarismos,...) con distintos valores para representar diferentes cantidades. La diferencia entre unos sistemas y otros es la forma en la que se utilizan esos símbolos.

Los sistemas de numeración suelen clasificarse en tres grupos:

Aditivos. Se suman los valores de los símbolos utilizados.
Híbridos. Se combinan el principio aditivo con el multiplicativo.
Posicionales. El valor de los símbolos o cifras depende de su posición.

Como ejemplos de sistemas aditivos tenemos los sistemas de numeración egipcio, azteca, romano y los alfabéticos de los griegos. El chino clásico es un ejemplo de sistema híbrido.

Los babilonios y mayas utilizaron sistemas de numeración posicionales, pero fue la cultura india, antes del siglo VII, la que desarrolló el sistema de numeración tal y como hoy lo conocemos.

En los sistemas de numeración posicional se utilizan diferentes bases, siendo la base 10 la que se utiliza habitualmente. En este sistema decimal se precisan 10 cifras o guarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

En el sistema binario, de base 2, se utilizan dos cifras: 0 y 1. En el octal, de base 8, se utilizan 8 cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. En el hexadecimal, de base 16, se utilizan 16 cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E y F.

En los sistemas digitales se emplea el sistema binario debido a su sencillez.
Cualquier número natural escrito en una base k, se puede representar mediante la siguiente expresión polinómica:

$$N = a\cdot k^{n} + b\cdot k^{n-1} + \ldots + f\cdot k^{2} + g\cdot k^{1} + h\cdot k^{0} = (ab\ldots fgh)_{(k}$$

Así, por ejemplo, el número 32058 escrito en base 10 es:

$$32058_{(10} = 3\cdot 10^{4} + 2\cdot 10^{3} + 0\cdot 10^{2} + 5\cdot 10 + 8 = 30000 + 2000 + 50 + 8$$

El número $31014_{(5}$ que está escrito en base 5, es igual a:

$$31\,014_{(5} = 3\cdot 5^{4} + 1\cdot 5^{3} + 0\cdot 5^{2} + 1\cdot 5^{1} + 4$$

que escrito en base 10 (nuestra base habitual) sería:

$$3\cdot 625 + 1\cdot 125 + 0\cdot 25 + 1\cdot 5 + 4 = 1875 + 125 + 5 + 4 = 2009$$

Siendo *k* la base del sistema de numeración, se cumplirá que k >1, y las cifras *a*, *b*,…, *f*, *g*, *h* corresponden a los números naturales 0, 1, 2,… menores que *k*.

1. **El sistema de numeración griego**

El primer sistema de numeración griego se desarrolló hacia el 600 A.C. Era un sistema de base decimal que usaba los símbolos de la figura siguiente para representar esas cantidades. Se utilizaban tantas de ellas como fuera necesario según el principio de las numeraciones aditivas.

1 5 10 50 100 500 1000 5000 10000

Para representar la unidad y los números hasta el 4 se usaban trazos verticales. Para el 5, 10, 100 y 1.000 las letras correspondientes a la inicial de la palabra cinco (*pente*), diez (*deka*), cien (*hekaton*) y mil (*khiloi*). Por este motivo se llama a este sistema acrofónico. Los símbolos de 50, 500 y 5000 se obtienen añadiendo el signo de 10, 100 y 1000 al de 5, usando un principio multiplicativo.

Por ejemplo, el número 3737 en el sistema de numeración griego es:

3000 + 500 + 200 + 30 + 5 + 2 = 3737

a) Escribe las siguientes cantidades en el sistema de numeración griego: 973, 2011, 27 548.

b) Expresa en este sistema de numeración los años de los siguientes acontecimientos históricos y el tiempo que transcurrió entre ambos:

El descubrimiento de América y la Revolución francesa.

2. **El sistema de numeración romano**

Es un sistema aditivo pero que también utiliza una notación substractiva. Para efectuar sumas y restas en este sistema es preciso eliminar la notación substractiva, para agregar (en el caso de la suma) o suprimir (en el caso de la resta) los símbolos de los operandos. Posteriormente se reducen los símbolos necesarios y si es preciso se vuelve a utilizar la notación substractiva.

Así por ejemplo para efectuar la suma 119 + 44 + 83, es decir, CXIX + XLIV + LXXXIII se procede de la siguiente manera:

Paso	Descripción	Ejemplo
1	**Eliminar la notación substractiva.**	CXIX + XLIV + LXXXIII ⟶ CXVIIII + XXXXIIII + LXXXIII
2	Concatenar los términos.	CXVIIIIXXXXIIIILXXXIII
3	Ordenar los numerales de mayor a menor.	CLXXXXXXXXVIIIIIIIIIII
4	Simplificar el resultado reduciendo símbolos.	CLLXXXVVVI ⟶ CCXXXXVI
5	Añadir notación substractiva	CCXXXXVI ⟶ CCXLVI
6	Solución.	CCXLVI

Y para efectuar la resta 116 – 24, es decir, CXVI – XXIV, se procede así:

Paso	Descripción	Ejemplo
1	Eliminar la notación substractiva.	CXVI – XXIV ⟶ CXVI - XXIIII
2	Eliminar los numerales comunes entre los términos.	CXVI – XXIIII ⟶ CV – XIII
3	Expandir los numerales del primer término hasta que aparezcan elementos del segundo.	CV – XIII ⟶ LLIIIII – XIII ⟶ LXXXXXIIIII – XIII
4	Repetir los pasos 2 y 3 hasta que el segundo término quede vacío.	LXXXXXIIIII – XIII ⟶ LXXXXII
5	Añadir notación substractiva.	LXXXXII ⟶ XCII
6	Solución.	XCII

Efectúa las siguientes operaciones con números romanos y comprueba después el resultado utilizando nuestro sistema de numeración decimal.

a) CDLXXIV + CCCXLVII + CCXCIX

b) CXLIV – LXXXIV

3. **Problemas aparentemente absurdos.**

a) La mitad de doce es siete.

b) El doble de 3 es 11.

c) Si 4 + 4 = 12 entonces 3 x 5 es igual a…

d) Si 8 x 8 = 54 entonces 4 x 5 es igual a…

e) Estas dos multiplicaciones son feas:

6 x 2 A 7 = F E A y 7 F 5 x 2 = F E A

Estos problemas no son tan absurdos como parecen: resulta que utilizan distintos sistemas de numeración en los que son perfectamente lógicos.

Averigua en cada uno de ellos el sistema en el que la respuesta tiene sentido.

4. Una pareja de novios escribe sus edades una a continuación de la otra, formando un número de 4 cifras que resulta ser un cuadrado perfecto, k^2. Once años más tarde repiten la operación, en el mismo orden, y ahora les vuelve a resultar otro número de 4 cifras, cuadrado de otro entero once unidades mayor que el entero k de la vez anterior. ¿Qué edad tenía cada uno de ellos cuando formaron el número k^2?

5. El número secreto de la nueva tarjeta de crédito de Javier tiene 4 dígitos, y está formado por dos números de dos cifras, ordenados de mayor a menor.

Estos son los dos únicos números de dos cifras que son iguales a la suma del cuadrado de la cifra de las decenas y el cubo de la cifra de las unidades.

¿Cuál es el número secreto de la tarjeta de Javier?

6. La expresión $abc_{(4}$ representa a un número de tres cifras escrito en base 4. Si se verifica que $abc_{(4}$ es el doble de $bca_{(4}$, calcula todas las posibilidades de los dígitos a, b y c y expresa esos números en la base decimal.

7. Los primeros 2010 enteros se han escrito en base 3. ¿Cuántos de ellos son capicúas?

8. El número 1089 es tal que si lo multiplicamos por 9 se obtiene el número 9801. Observa que ambos números tienen los mismos dígitos pero su orden está invertido. Averigua qué número de cinco cifras tiene esta misma propiedad, es decir, que al multiplicarlo por 9 se obtiene un número que contiene las mismas cifras en orden inverso.

9. Los números de la siguiente suma están escritos en un sistema de numeración de base n) y cada letra representa un dígito. Letras distintas representan dígitos distintos. Determina a qué digito corresponde cada letra. ¿Existe alguna base para la que no tenga solución?

$$\begin{array}{r} A\,B\,C \\ A\,B \\ +\quad A \\ \hline 3\;0\;0 \end{array}$$

10. Un grupo de alumnos no tiene profesor y, aprovechando el momento, uno de los alumnos escribe en la pizarra un número de 6 cifras. Cuando llega el profesor de guardia, borra la primera cifra de la izquierda y la escribe al final del número, quedando así un número que es el triple del que había escrito el alumno.

¿Qué número había escrito el alumno en la pizarra?

Si hubiera más de una posibilidad calcúlalas todas.

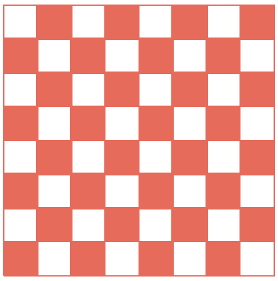
Bloque IV. Soluciones

DEP 1. Paridad

1. **a) ¿Es posible cubrir completamente un tablero de ajedrez de 8 x 8 con piezas de dominó de 1 x 2? ¿Cuántas fichas necesitas?**

b) ¿Y si quitamos las esquinas de una diagonal?

c) Un juego de dos jugadores consiste en ir colocando fichas de dominó sobre el tablero de ajedrez. El primero que no pueda colocar, pierde. En este juego el segundo jugador siempre puede ganar. ¿Cuál es la estrategia ganadora?



a) Sí, se necesitan 32 fichas de dominó.

b) Si quitamos las dos esquinas de una diagonal quedarán 32 escaques de un color y 30 de otro. Como cada pieza de dominó cubre un escaque de cada color, será imposible cubrir el tablero.

c) Para averiguar la estrategia ganadora es conveniente comenzar con tableros más pequeños de $2n$x$2n$. En un tablero de 2x2 es fácil, después se prueba con tableros de 4x4, 6x6, etc.

Para ganar, el segundo jugador debe colocar su ficha simétrica a la del primer jugador respecto del centro del tablero. Esto se puede hacer siempre que el tablero sea de $2n$x$2n$.

2. **a) Un caballo de ajedrez parte de la esquina superior izquierda del tablero de ajedrez (posición a1) y retorna allí después de unos cuantos movimientos. ¿Cómo debe ser el número de movimientos que realiza: par o impar?**

b) ¿Puede un caballo salir de la posición a1 y llegar a la posición h8 (esquina inferior derecha) pasando por todas las casillas exactamente una vez?

a) Debe ser par, pues en cada movimiento el caballo pasa de un color a otro.

b) No, pues tendría que hacer 63 movimientos y por lo tanto acabaría en un escaque de distinto color, pero dos casillas diagonalmente opuestas son del mismo color.

3. **a) Colocamos todas las fichas de dominó en fila haciendo coincidir el número de puntos de fichas contiguas. Si en un extremo hay un 5, ¿qué número hay en el otro extremo? ¿Puedes hacerlo colocando fichas dobles en los extremos? ¿Y sólo en un extremo?**

b) De un dominó quitamos la ficha 1-2, ¿es posible formar una cadena con las fichas restantes? ¿Es posible formar una cadena con las fichas restantes de modo que uno de los extremos acabe en 6?

c) De un dominó quitamos las siete fichas que tienen alguna de sus partes blancas. ¿Puedes colocar el resto formando una única cadena?

a) En un juego completo de dominó hay 28 fichas y en cada una de ellas hay dos números del 0 a 6 (pueden ser iguales en las dobles), así que cada número aparece 8 veces. Al formar una cadena todos los valores van a pares salvo los extremos. Si he colocado todas las fichas y un extremo acaba en 5, en el interior de la cadena habrá 3 parejas de cincos y con el cinco del extremo van 7 fichas; por tanto el otro extremo debe acabar también en 5 para tener los 8 cincos colocados. Ambos extremos no pueden acabar en fichas dobles pues, como hemos visto antes, los extremos deben acabar en el mismo número. Un extremo sí puede acabar en ficha doble (el otro extremo acabará con el mismo número).

b) Podremos formar una cadena siempre que los extremos sean el 1 y el 2 pues esos números solo aparecen 7 veces y, por tanto, uno de ellos quedará sin emparejar.

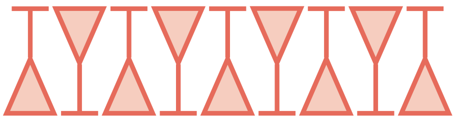
c) Si quitamos todas la blancas, los números del 1 al 6 aparecerán 7 veces y los valores que no sean comienzo ni final deben ir aparejados en el interior, quedando al menos cuatro valores (al menos dos fichas) que no entran en la cadena.

4. **Tenemos sobre la mesa una hilera de copas.**

Hay 4 boca arriba alternándose con 5 que están boca abajo.

Se trata de ir dando vuelta a las copas, siempre de dos en dos, hasta conseguir que queden 5 boca arriba y 4 boca abajo.

¿Cómo debes hacerlo?



Al dar la vuelta a dos copas, podemos cambiar el número de copas que están boca arriba pero no su paridad. Si, como es el caso, partimos de un número par de copas boca arriba, podemos: a) dar la vuelta a dos que están boca arriba quedando un número par de copas boca arriba (dos menos); b) dar la vuelta a dos que están boca abajo quedando un número par de copas boca arriba (dos más); c) dar la vuelta a una copa boca arriba y a una boca abajo reproduciendo el mismo número de copas boca arriba que teníamos. Por tanto, con ese sistema siempre habrá un número par de copas boca arriba.

5. **a) Completa con los signos + y – para que el resultado sea cero.**

b) Un saltamontes está dando saltos, todos sobre una línea recta pero indistintamente hacia la derecha o hacia la izquierda, como le viene en gana. El primer salto es de 1 cm, el segundo de 2, el tercero de 3 y así sucesivamente. ¿Puede llegar al sitio del que partió después de 265 saltos?

a) 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 = 0

¡Es imposible! La suma de una cantidad impar de números impares siempre es impar. Cualquiera que sea el signo que coloquemos en cada casilla, en la operación resultante estaremos sumando cinco números impares: +/– 1, +/– 3, +/– 5, +/– 7 y +/– 9. Por lo tanto el resultado siempre será impar. ¡Pero 0 es un número par!

b)

La idea es la misma que en el apartado anterior: queremos sumar o restar los números del 1 al 265 para obtener 0. Como la suma 1 + 2 + …+ 265 es impar (ya que la cantidad de números impares es una unidad mayor que la de pares), cambiemos los signos que cambiemos, siempre obtendremos como resultado un número impar.

6. **Busca seis números impares *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f* que verifiquen** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$

¡Es imposible encontrarlos! Si sacamos común denominador y operamos, tendríamos $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=\frac{bcdef+acdef+\cdots+abcde}{abcdef}$, en la que el denominador es impar (por ser producto de impares) y el numerador es par (una suma de seis impares). Por tanto dicho cociente, par entre impar, no puede ser jamás 1.

7. **Carmen y sus amigos están sentados alrededor de una mesa redonda. Observan que cada uno tiene a su izquierda y a su derecha dos amigos del mismo sexo. Si hay cinco chicos, ¿cuántas chicas hay?**

Comencemos pensando en Carmen: si a ambos lados tuviera chicas, estas a su vez tendrían que tener chicas a sus otros lados, y así sucesivamente, y en la mesa no habría chicos. Así pues, Carmen tiene chicos a ambos lados que, a su vez tienen chicas a los otros lados y, por tanto en la mesa se colocan chico-chica-chico-chica….Como hay cinco chicos, también debe haber cinco chicas para cumplir la condición del problema.

8. **Julián tiene 125 monedas de las cuales 62 son falsas y pesan un gramo menos que las auténticas. El peso de cada moneda es un número entero. Julián dispone de una balanza de platillos que indica con total precisión la diferencia de pesos entre los dos platillos. Julián desea saber si una moneda en concreto es verdadera o falsa. ¿Cuál es el mínimo número de pesadas que debe realizar para conseguirlo?**

Se puede decidir con solo una pesada. Tras pensar un rato el problema se puede dar este dato e intentar averiguar cómo se consigue: se separa la moneda que se quiere decidir si es verdadera o falsa. Con el resto se hacen dos montones de 62 monedas cada uno y se pone cada montón en un lado de la balanza.

La cantidad de monedas falsas es un número par. Por lo tanto, si la moneda separada es verdadera, seguiremos teniendo en los platillos una cantidad par de monedas falsas, mientras que si la moneda separada es falsa, nos quedarán en los platillos 61 monedas falsas. Además, los pesos de una moneda verdadera y de una falsa tienen paridades distintas, ya que se diferencian en una unidad.

Si la diferencia de pesos entre las monedas colocadas en los platillos es par, la suma también lo es: estamos sumando 124 números, y entre ellos la cantidad de sumandos impares tiene que ser par. Así pues, la moneda examinada es verdadera.

Si la diferencia es impar, la suma también lo es: entre los 124 números que sumamos hay una cantidad impar de impares; así pues la moneda examinada es falsa.

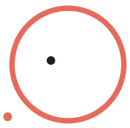
9. **Escribimos en la pizarra los números del 1 al 185. Cada alumno sale a la pizarra, borra dos números y escribe en su lugar la diferencia entre el mayor y el menor de los números borrados. Se sigue jugando hasta que solo quede un número en la pizarra. ¿Puede ser ese número el cero?**

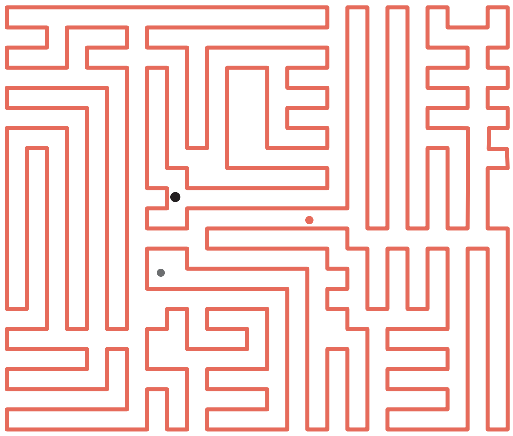
Este problema es muy similar al 5.

La diferencia de dos números de la misma paridad es par, y lo mismo ocurre con su suma. La diferencia o la suma de dos números de paridades distintas siempre es impar. Las operaciones que realizamos (sumas y restas) no cambian la paridad de la suma de todos los números escritos en la pizarra, que es impar, pues entre los 185 primeros números naturales hay 62 pares y 63 impares. Así pues, no podremos acabar nunca en cero.

10. **Dentro o fuera**

Teorema de Jordan: Una curva cerrada que no se corta a sí misma divide al plano en dentro y fuera. Aunque a veces no es tan fácil saber qué es dentro y qué es fuera. ¿Podrías decir si estos puntos están dentro o fuera de las curvas?





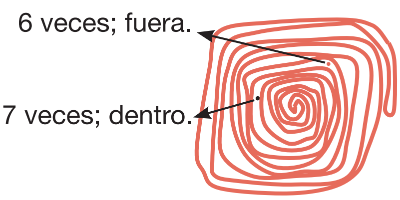
Teorema de Jordan

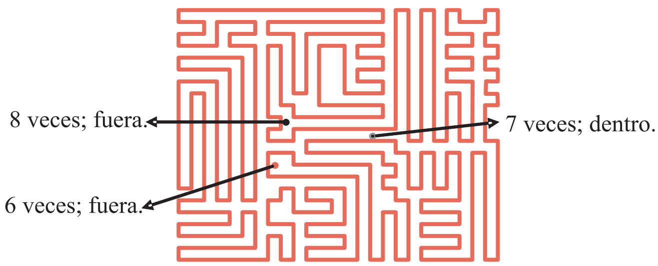
Una curva cerrada que no se corta a sí misma divide al plano en dentro y fuera. Este teorema es muy especial por tres razones: su enunciado es muy sencillo de entender, la afirmación que hace es tan obvia que parece increíble que sea un teorema que necesite justificación, su demostración es endiabladamente difícil.

En 1887, Camile Jordan presentó una demostración del teorema que lleva su nombre pero tenía un error. La primera demostración correcta del teorema la dio Oswald Veblen en 1905. Existe una demostración rigurosa del teorema realizada con ordenador que está compuesta de más de 60 000 líneas de código.

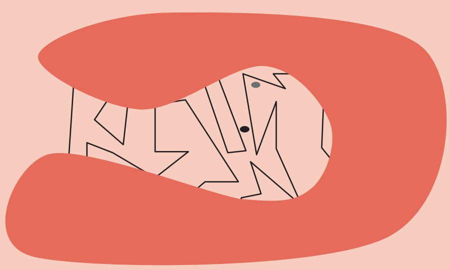
Pero lo que a nosotros nos ocupa es saber si un punto está dentro o fuera de una curva cerrada y para ello el concepto de par o impar es suficiente.

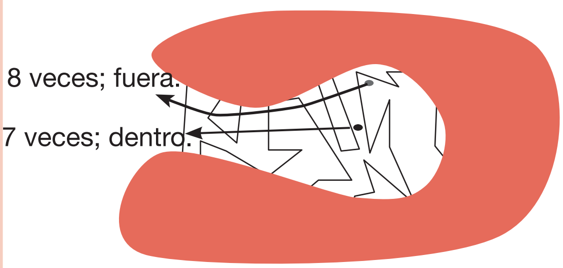
Si se está fuera de una curva, para entrar en ella se debe cortar una vez la curva. Si se corta dos veces se vuelve a salir. De manera que la paridad del número de veces que cortemos la curva para estar en el exterior nos dirá si estábamos dentro (impar) o fuera (par).





Para terminar de complicar las cosas, mientras estudiaba esta curva se me derramó el café. Ayúdame a decidir si los puntos están dentro o fuera.





11. **El juego de las piedras**

Dos jugadores juegan a ir cogiendo alternativamente una o dos piedras de un montón de *N* piedras. Gana el jugador que, cuando ya no queden piedras en la mesa, tenga en su poder un número par de piedras.

Analiza el juego para distintos valores de *N*. ¿Pueden darse empates? ¿En qué casos habrá siempre un único ganador?

Para los casos en que no haya empates, ¿qué jugador ganará y cómo debe jugar?

Si el número de piedras es par, el juego obligatoriamente acabará en empate ya que al terminar la partida ambos jugadores tendrán una cantidad de piedras de la misma paridad. Así que o bien ganan los dos o bien pierden los dos.

Si el número inicial de piedras es impar habrá a la fuerza un único ganador ya que al finalizar la partida el número de piedras que tendrán los jugadores será de diferente paridad. Si $N = 1$ es claro que el segundo gana; con 3 gana el primero tomando dos piedras; con 5 gana el segundo repitiendo las jugadas del primero mientras pueda (no lo podrá hacer si quedan tres en el turno del primer jugador y éste coge dos, o si en su turno no quedan piedras, en ambos casos el primero se lleva tres y el segundo dos); con 7 gana el primero pues quitando 2 al principio se sitúa como segundo jugador en una partida de 5 piedras; con 9 el segundo repite las jugadas del primero hasta que pueda y consigue llevarse cuatro; con 11 gana el primero cogiendo dos de partida y jugando como segundo jugador en una partida de nueve piedras, ...

Así pues, si $N = 1, 5, 9, \dots, 4n + 1$, ganará el segundo jugador repitiendo hasta que pueda las jugadas del primero y quedándose al final con 2n piedras, y si $N = 3, 7, 11, \dots, 4n + 3$, ganará el primero tomando dos piedras de comienzo y jugando como segundo jugador una “nueva “ partida de $4n+1$ piedras, logrando llevarse $2n + 2$ del montón.

DEP 2. Principio del palomar

1. **En un cajón hay 3 calcetines blancos, 2 negros y 5 rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el mínimo número de calcetines que hay que sacar para estar seguros de que hay dos calcetines del mismo color?**

En este caso, las casillas son los tres colores (blanco, negro y rojo), y las cartas son los calcetines. Como $4 = 3 \cdot 1 + 1$, sacando cuatro calcetines es seguro que al menos dos serán del mismo color.

2. **En un club deportivo se practica fútbol, hockey o baloncesto. Hay 13 equipos en total. Demuestra que hay al menos cinco equipos del mismo deporte.**

Las casillas son los tres deportes, y las cartas los 13 equipos. Como $13 = 3 \cdot 4 + 1$, en alguna de las casillas habrá al menos cinco cartas, es decir, habrá al menos 5 equipos del mismo deporte.

En caso contrario, habría a lo sumo cuatro equipos de cada deporte. Pero $4 \cdot 3 = 12$, contradicción, pues los equipos son 13.

3. **Escribimos doce enteros distintos de dos cifras. Demuestra que siempre podremos elegir dos de ellos cuya diferencia sea un número del tipo *aa*.**

Los números de dos cifras repetidas son los múltiplos de 11. Al dividir cualquier número entre 11, el resto será 0, 1, 2, 3,…, 9 ó 10. Identificamos estos posibles valores del resto con las casillas: serán 11.

Al repartir los 12 enteros de dos cifras (las cartas) en las 11 casillas, puesto que

$12 = 11 \cdot 1 + 1$, es seguro que en alguna de ellas habrá al menos dos números. Supongamos que es en la casilla k. Entonces esos dos números dan el mismo resto k en su división entre 11. Su diferencia será un múltiplo de 11, y al tener dos cifras, será un número del tipo *aa*.

4. **Dividimos un cuadrado en nueve cuadraditos iguales. En cada uno de ellos escribimos 1, –1 ó 0. Después sumamos los tres números que hay en cada fila, los tres de cada columna, y los tres de cada una de las dos diagonales. Demuestra que entre estas ocho sumas hay dos que tienen el mismo valor.**

Según la distribución de números hecha en el tablero, estas ocho sumas pueden tomar sólo siete valores diferentes: –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3. Estos siete posibles valores constituyen las casillas y cada una de las ocho sumas constituyen las cartas. Como $8 = 7 \cdot 1 + 1$, alguna de las sumas se repetirá.

5. **Pintamos 51 puntos en un cuadrado de 1 metro de lado. Demuestra que hay al menos tres puntos que pueden taparse con una ficha cuadrada de 20 cm de lado.**

Debemos construir geométricamente las casillas. La medida de la ficha cuadrada sugiere la división: el cuadrado puede descomponerse en 25 cuadraditos iguales de 20 cm de lado. Podemos asignar cada uno de los segmentos interiores a uno exactamente de los cuadraditos.

Los 51 puntos son las cartas. Como $51 = 25 \cdot 2 + 1$, es seguro que en algún cuadradito estarán al menos 3 puntos, es decir, al menos tres de los 51 puntos pueden taparse con una ficha del tamaño indicado.

6. **En un grupo de cinco personas, al menos dos tienen el mismo número de amigos en el grupo. ¿Es cierto? Justifica tu repuesta.**

Cada una de las cinco personas puede tener 0, 1, 2, 3 ó 4 amigos en el grupo. Serán las cinco casillas. ¡Pero hay cinco personas!

Pensando algo más en las casillas, observamos que dos de ellas se excluyen: si una persona no tiene ningún amigo en el grupo, entonces nadie podrá tener cuatro, y viceversa: si alguien tiene cuatro amigos, todos tendrán algún amigo.

Así que en realidad hay 4 casillas, y cinco cartas: en alguna casilla habrá al menos dos cartas, y así, habrá al menos dos personas con el mismo número de amigos en el grupo.

7. **Varios equipos de fútbol participan en un torneo, en el cual cada uno de ellos debe jugar con cada uno de los restantes exactamente un partido. Demuestra que en cualquier momento del torneo hay dos equipos que han jugado el mismo número de partidos.**

Llamemos n al número de equipos que participan en el torneo. En un momento del torneo, cada uno de ellos puede haber jugado 0, 1, 2, 3, …, $n-1$ partidos. Si algún equipo ha jugado $n-1$ partidos, habrá jugado con todos los demás, así que cada uno de los restantes habrá jugado al menos un partido. Y si algún equipo no ha jugado ningún partido, ninguno de los restantes podrá haber jugado los $n-1$ posibles.

Así que hay $n-1$ casillas (el número de partidos jugados), y n cartas: los equipos. Como $n = (n-1) \cdot 1 + 1$, en algún momento del torneo habrá al menos dos equipos que han jugado el mismo número de partidos.

8. **A un congreso asisten 201 científicos de cinco nacionalidades distintas. Se sabe que en cada grupo de seis, al menos dos tienen la misma edad. Demuestra que habrá un grupo de cinco personas de la misma edad, nacionalidad y sexo.**

El principio del palomar nos asegura que hay al menos 101 personas del mismo sexo.

Entre estas, como $101 = 20 \cdot 5 + 1$ y hay cinco nacionalidades distintas, de nuevo podemos asegurar que hay al menos 21 personas de la misma nacionalidad y del mismo sexo.

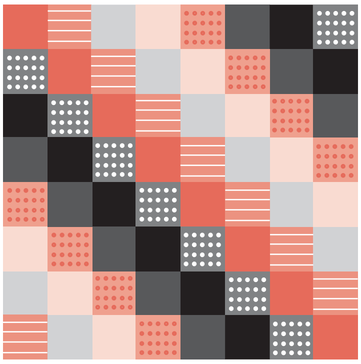
No puede haber más de cinco edades diferentes. En efecto, si así fuera, podríamos elegir un grupo de seis científicos con edades distintas.

Aplicando de nuevo el principio del palomar, como $21 = 5 \cdot 4 + 1$, podemos asegurar que hay al menos cinco personas de la misma edad, nacionalidad y sexo.

9. **Se colocan 33 torres sobre un tablero de ajedrez. Demuestra que siempre habrá al menos cinco que no se ataquen mutuamente.**

Coloreamos el tablero diagonalmente con 8 colores, como muestra la figura. Los escaques de un mismo color están siempre en distintas filas y columnas. Los colores son los casilleros; está claro que las cartas serán las torres.

Como $33 = 8 \cdot 4 + 1$, es seguro que habrá al menos cinco torres ocupando escaques del mismo color. Estas no se amenazan entre sí.



10. **Consideramos seis puntos sobre una circunferencia. Trazamos todos los segmentos que unen dos de los puntos, coloreándolos en rojo o en azul.**

Demuestra que cualquiera que sea la coloración, siempre se formará un triángulo cuyos lados son los tres del mismo color.

(Este problema se puede enunciar en otros términos: seis personas asisten a una fiesta. Seguro que hay al menos tres que se conocen de antes, o tres que no se conocen).

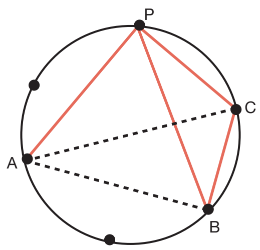
Nos fijamos en uno de los puntos, P. Desde P salen cinco segmentos.

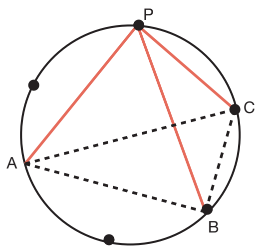
Como utilizamos dos colores, habrá al menos tres de un mismo color, por ejemplo rojo. (Si fuera azul, el razonamiento sería análogo)

Nos fijamos ahora en los tres nuevos extremos de esos segmentos rojos: serán los puntos A, B y C.

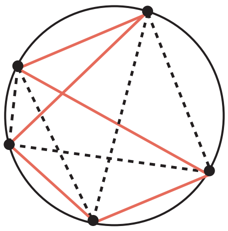
Si alguno de los segmentos AB, BC ó CA es rojo, se formará un triángulo rojo (PAB, PBC ó PCA, respectivamente).

En caso contrario, los tres segmentos AB, BC y CA son azules, y el triángulo ABC tendrá sus tres lados azules.





Con cinco puntos, pueden colorearse los segmentos de modo que no se forme ningún triángulo monocolor:



11. **Matematilandia tiene sólo un aeropuerto, pero tiene quince equipos de fútbol, con 11 jugadores cada uno. Todos ellos tienen que viajar hoy a Madrid, donde se celebra un campeonato, y no han reservado billete. Salen diez vuelos de Matematilandia a Madrid, y cada uno de ellos tiene 15 plazas libres. El jugador Messiov decide viajar en su avioneta particular. Demuestra que al menos un equipo llegará completo a Madrid.**

Tienen que viajar en total $11 \cdot 15 = 165$ jugadores, pero uno de ellos utiliza su avión particular, así que son 164 los jugadores que deben ocupar las 150 plazas de los aviones.

Los 15 equipos son las casillas. Debemos demostrar que en alguna de ellas hay al menos 11 cartas (los jugadores).

Como las plazas de los vuelos son $150 = 15 \cdot 10$, en alguna de las casillas habrá al menos 10 cartas, es decir, llegan a Madrid al menos 10 jugadores de un mismo equipo. Si este equipo es el de Messiov, llegará completo (10 jugadores más Messiov). Si no es así, de ese equipo habrán llegado como mucho 9 jugadores, luego en otra casilla (otro equipo), habrá más de 10, y ese equipo llegará completo a Madrid.

12. **Demuestra que si elegimos 51 números entre los números 1, 2, 3 ,…, 100 siempre habrá dos al menos que sean primos entre sí.**

Podemos formar 50 parejas de números consecutivos:

(1,2); (3,4); (5,6); …; (99,100). Serán las casillas.

Dos números consecutivos son siempre primos entre sí.

Las cartas son los 51 números que elegimos: como hay más que casillas, al menos en una de ellas habrá dos cartas. Es decir, es seguro que cualesquiera que sean los 51 números que elijamos, al menos dos de ellos serán consecutivos, y por lo tanto, primos entre sí.

DEP 3. Problemas de generalización

1. **Observa la siguiente tabla en la que hemos ido colocando los números siguiendo una espiral: ¿En qué fila quedará colocado el número 400?**

FILA 3	37	38	39	40	41	42	43
FILA 2	36	17	18	19	20	21	44
FILA 1	35	16	5	6	7	22	45
FILA 0	34	15	4	1	8	23	46
FILA –1	33	14	3	2	9	24	47
FILA –2	32	13	12	11	10	25	48
FILA –3	31	30	29	28	27	26	49
FILA –4						51	50

Observando la espiral vemos que todos los cuadrados están separados por paridad en dos semidiagonales paralelas. Como 400 es 20^2 ocupará una fila positiva con los cuadrados pares. 2^2 está en la fila 0, 4^2 en la 1, 6^2 en la 2. Así que 20^2 estará en la fila 9.

2. **Las siguientes figuras muestran letras (V, W, L y Z) de distinto tamaño construidas siguiendo ciertas pautas con un número entero de puntos. Podemos hablar así de números V, W, L y Z: por ejemplo, 3, 5 y 7 son números V y 5, 9 y 13 son números W.**

Para cada construcción contesta:

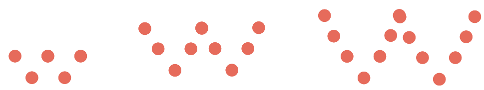
Números V

V_1 V_2 V_3

¿Hay números V con 54 puntos?
¿Y con 23?
Calcula cuántos puntos tiene V_n.

Números W

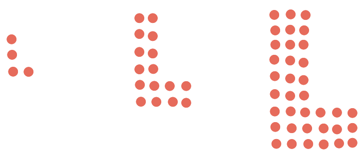
W_1 W_2 W_3



¿Hay números W con 29 puntos?
¿Y con 55?
Calcula cuántos puntos tiene W_n.

Números L

L_1 L_2 L_3



¿Hay números L con 192 puntos?
¿Y con 256?
Calcula cuántos puntos tiene L_n.

Números Z

Z_1 Z_2 Z_3

¿Hay números Z con 33 puntos?
¿Y con 46?
Calcula cuántos puntos tiene Z_n.

Números **V**: Como cada vez añadimos 2 puntos y partimos de $V_1 = 3$, $V_n = 1 + 2n$ que no puede valer nunca 54 y vale 23 para $n = 11$.

Números **W**: si observamos que W_n es $2V_n - 1$ tenemos que $W_n = 4n + 1$. También se puede comprobar que en cada paso se añaden 4 puntos a la construcción. $W_7 = 29$ y un número W nunca puede valer 55.

Números **L**: observamos que cada L_n está formada por cuatro cuadrados de n puntos de lado y, por tanto, $L_n = 4n^2$ que no puede valer 192 pues $192/4 = 48$ no es un cuadrado perfecto y vale 256 si $n = 8$.

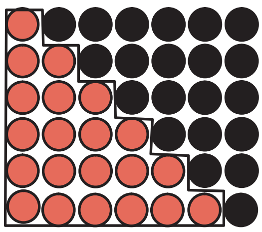
Números **Z**: en cada paso añadimos tres puntos. Así pues, $Z_n = 3n + 6$ que vale 33 si $n = 9$ y no puede valer 46.

3.

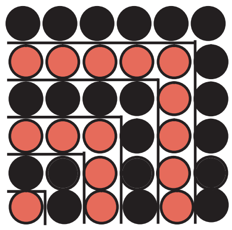
a) ¿Cuánto suman los diez primeros números naturales? ¿Y los diez mil primeros números naturales? Encuentra una fórmula para la suma de los *n* primeros números naturales.

b) ¿Cuánto suman los veinte primeros números impares? ¿Y los cinco mil primeros números impares? Encuentra una fórmula para la suma de los *n* primeros números impares.

Hay muchas formas de obtener dichas fórmulas, pero quizás las más bonitas por su sencillez y claridad sean estas demostraciones sin palabras.



$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$



$$\boxed{S'_{2n-1} = n^2}$$

Los diez primeros naturales (contando a partir de 1) suman $\frac{10 \cdot 11}{2} = 55$. Los diez mil primeros naturales a partir del 1 suman $\frac{10000 \cdot 10001}{2} = 50005000$.

Los veinte primeros impares suman $20^2 = 400$. Los cinco mil primeros impares suman $5000^2 = 25$ millones.

4.

El 23 de agosto de 2009 fue hallado por un equipo de la Universidad de los Ángeles, California (UCLA) el mayor número primo conocido hasta la fecha: $2^{43112609} - 1$.

Es un primo de Mersenne, esto es, de la forma $2^n - 1$ y tiene 12.978.189 dígitos. ¿En qué cifra acaba?

Dos números primos que son impares consecutivos se denominan *primos gemelos*. Por ejemplo, 11 y 13, 29 y 31 son primos gemelos. La mayor pareja de primos gemelos conocida hasta el momento es

$(65516468355 \cdot 2^{333333} - 1,\ 65516468355 \cdot 2^{333333} + 1)$

¿Puedes decirnos en qué cifra acaban?

Comencemos estudiando en qué cifra acaban las potencias de dos:

$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = {*}6$
$2^5 = {*}2$	$2^6 = {*}4$	$2^7 = {*}8$	$2^8 = {*}6$ …

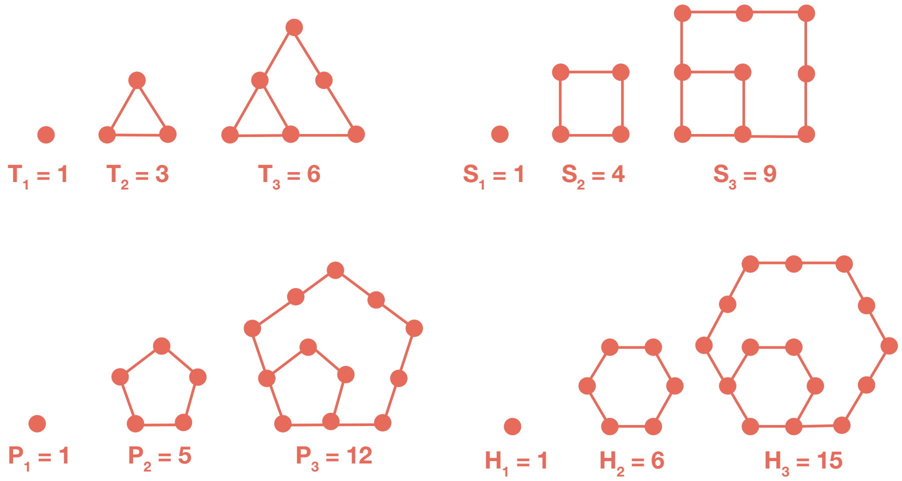
Así pues sus terminaciones se van repitiendo de cuatro en cuatro y por tanto basta ver cuál es el resto de dividir el exponente entre 4 para saber en qué numero acabará. Como 43112609 es un múltiplo de 4 más 1 (no hace falta dividir, basta con observar que el número anterior, 43112608, sí es múltiplo de 4 porque acaba en 08), la última cifra de $2^{43112609}$ es 2 y la última cifra de $2^{43112609} - 1$ es 1.

Las últimas cifras de los primos gemelos son 9 y 1, pues un número acabado en 5 multiplicado por una potencia de 2 acaba en 0.

5. **Números poligonales**

Algunos números están asociados a polígonos y tienen nombres geométricos:

Aquí tienes representados los números triangulares y los números cuadrados, los pentagonales y los hexagonales.



a) Encuentra una fórmula para S_n.

b) Dibuja una estructura que represente el número cuadrado S_7 como suma de dos números triangulares consecutivos. ¿Cuáles? ¿A qué número cuadrado es igual $T_9 + T_{10}$?, ¿y $T_n + T_{n+1}$?

c) Encuentra una fórmula para T_n.

d) Busca una relación entre los números pentagonales y los triangulares. ¿Sabrías encontrar una fórmula que nos dé un número pentagonal cualquiera?

e) Busca una relación entre los números hexagonales y los triangulares. ¿Sabrías encontrar una fórmula que nos dé un número hexagonal cualquiera?

a) $S_n = n^2$

b) $S_7 = T_6 + T_7$. $T_9 + T_{10} = S_{10}$ y $T_n + T_{n+1} = S_{n+1}$

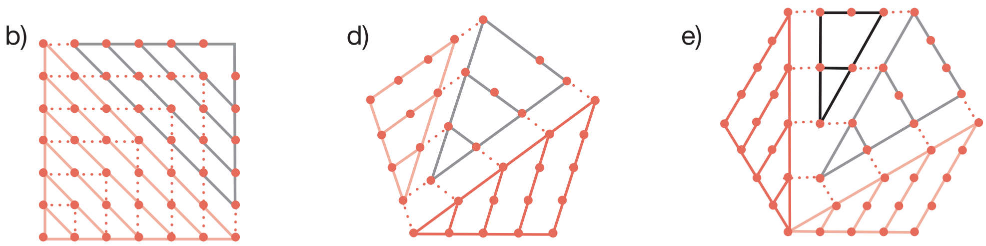
c) Como $T_{n+1} = T_n + (n+1)$ tenemos que $T_n + T_{n+1} = 2T_n + (n+1) = S_{n+1} = (n+1)^2$.

Despejando T_n de $2T_n + (n+1) = (n+1)^2$ obtenemos $T_n = \dfrac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

d) $P_n = 2\,T_{n-1} + T_n = 3\,T_{n-1} + n = 3 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} + n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$

e) Observa que en la división hemos usado un punto dos veces.

$H_n = 2\,T_n - 1 + T_{n-1} + T_{n-2} = 2 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} - 1 + \dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} = n(2n-1)$



6. **En un bar hay mesitas cuadradas de cuatro plazas. Uniendo tres de ellas en fila pueden sentarse ocho personas. ¿Cuántas personas pueden sentarse si unimos 20 mesas? ¿Cuántas mesas debemos unir para sentar a 19 personas? ¿Y para sentar a 233? Da una fórmula que indique el número de mesas necesarias para que se sienten *N* personas.**

Si unimos 20 mesas podrán sentarse 20 + 20 + 2 = 42 personas. Si queremos sentar a 19 personas necesitaremos 9 mesas y sobrará una plaza. Observa que al unir k mesas podrás sentar como mucho a $2k + 2 = 2(k + 1)$ personas. Para sentar a 233 personas necesitamos (233 – 1)/2 = 116 mesas y sobrará una plaza.
Si N es par, para sentar a N personas necesito $\frac{N-2}{2}$ mesas y si N es impar necesito $\frac{N-1}{2}$ mesas y sobrará una plaza.

7. **Los triángulos de Sierpinski.**

Observa las cuatro figuras que te damos: en la primera, hay un triángulo equilátero rojo. Cada una de las siguientes se obtiene de la anterior repitiendo cierto proceso.

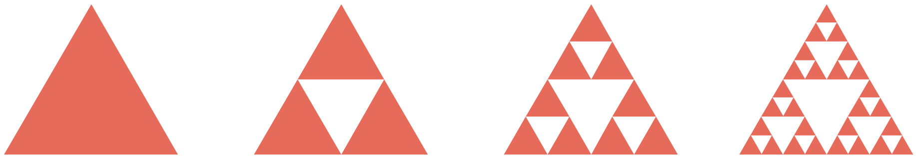
a) ¿Cómo se forma la siguiente figura?

b) Si el área de la parte coloreada en el primer triángulo es 1 u², ¿cuál es el área de la parte coloreada en el cuarto triángulo? ¿Y en el decimoprimero?

c) ¿Y el área de la parte blanca?

d) ¿Cuántos triángulos de cada color habrá en la figura 1200?

e) Si el perímetro del triángulo grande es 1 u, ¿cuál será el perímetro de la zona roja en la enésima figura?



a) Se colorea de blanco el triángulo equilátero invertido que se forma al unir los puntos medios de un triángulo equilátero rojo. Se repite el proceso indefinidamente en cada triángulo equilátero rojo.

b) En cada figura el área coloreada es $\frac{3}{4}$ del área coloreada en la anterior. En el cuarto triángulo el área coloreada es $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ y el decimoprimero es $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$. En el enésimo es $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

c) Este problema es especialmente interesante para alumnos de 3º ESO ya que permite deducir la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica (comparando la suma de las áreas de los triángulos blancos con la diferencia entre el área total y el área roja) y, posteriormente, aplicarla para resolver las otras cuestiones.
El área blanca es 1 – (área coloreada) y, por tanto, en el enésimo es $1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.
Por otro lado, si vamos sumando las áreas blancas que van apareciendo tenemos que en el segundo triángulo es $\frac{1}{4}$, en el tercero es $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}$,

y en el enésimo $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\right)$

Igualando las expresiones obtenidas para el área tenemos que: $\frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\right)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

y, por tanto $1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}=\dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{4}}$

d) Para contar los triángulos realizamos una tabla y buscamos pautas en ella. De nuevo aparecen sumas de progresiones geométricas.

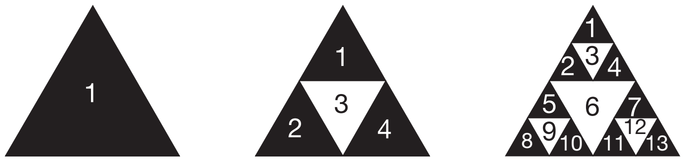


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**	***n***
Triángulos negros	1	3	9	27		3^{n-1}
Triángulos blancos	0	1	1 + 3	1 + 3 + 9		$1 + 3 + \ldots + 3^{n-2}$
Total	1	1 + 3	1 + 3 + 9	1 + 3 + 9 + 27		$1 + 3 + \ldots + 3^{n-1}$

e) Para calcular el perímetro de los triangulitos que se van formando usamos semejanza.

Figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**	***n***
Perímetro negro	1	$3 \cdot \frac{1}{2}$	$9 \cdot \frac{1}{4}$	$27 \cdot \frac{1}{8}$		$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

Observa que el área de la zona roja va siendo cada vez más pequeña mientras que su perímetro va siendo mayor.

8. **Números de Fibonacci y patrones con ladrillos**

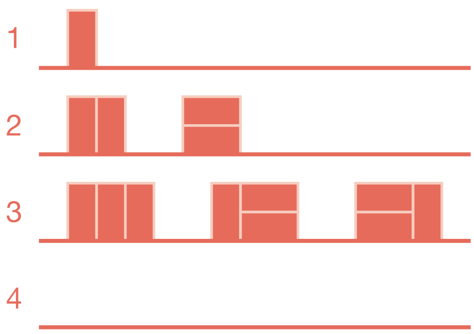
Si queremos construir una pared de dos unidades de alto con ladrillos que miden 2 X 1 unidades, podemos hacerlo de distintas formas según el largo de la pared. Observa la figura:

Si queremos que sea de longitud 1, solo podemos hacerlo de una forma, si la queremos hacer de longitud 2, tenemos dos opciones, …

¿Cuántas formas hay de hacer un muro de longitud 4? ¿Y 5?

Halla las formas que hay de construirlo para longitudes de 1 a 10.

Observa los números que obtienes, ¿cómo se forma la sucesión?



Para construir un muro de longitud 4 puedo construir uno de longitud dos y después añadir dos ladrillos horizontales o construir uno de longitud tres y añadir un ladrillo vertical. Luego habrá 2 + 3 = 5 formas de hacer un muro de longitud 4.

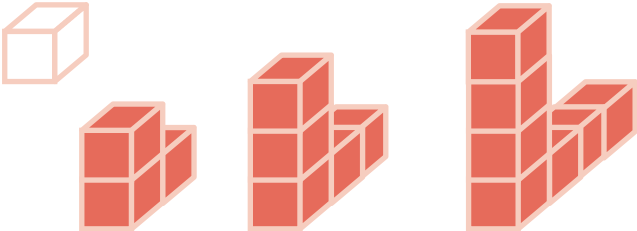
En general, un muro de longitud n viene de construir uno de longitud $n - 2$ y añadir dos ladrillos horizontales o de construir un muro de longitud $n - 1$ y añadir un ladrillo vertical.

Así pues, obtenemos una sucesión de Fibonacci: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

En particular: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$; $a_5 = 8$; $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$ y $a_{10} = 89$.

Este problema puede dar lugar a una pequeña investigación sobre quién era Fibonacci, en qué otros problemas aparece su sucesión, etc.

9. **Con cubos blancos hacemos construcciones en forma de L y una vez armadas, pintamos de rojo las caras visibles (las que apoyan en el suelo no son visibles). En la construcción 500, ¿cuántas caras pintaré?**



Construcción 1 Construcción 2 Construcción 3

Para pasar de una figura a otra se añaden 2 cubos, se "despintan" dos caras y se pintan $4 + 5 = 9$.

En total se pintan 7 caras más que en la construcción anterior. Como en la primera se pintan 12, en la enésima se pintan $12 + 7 \cdot (n - 1) = 7n + 5$.

Así pues, en la construcción 500 se pintarán $7 \cdot 500 + 5 = 3505$ caras.

10. **El triángulo de Pascal**

Observa la siguiente pirámide.

a) Escribe las dos filas siguientes

b) ¿Cuánto suman los números de la fila *n*?

1 Fila 0
1 1 Fila 1
1 2 1 Fila 2
1 3 3 1 Fila 3
1 4 6 4 1 Fila 4
1 5 10 10 5 1 Fila 5
1 6 15 20 15 6 1 Fila 6

a) 1 7 21 35 35 21 7 1 y 1 8 28 56 70 56 28 8 1

b) La suma de la fila enésima es 2^n.

Este problema puede dar lugar a una pequeña investigación sobre las propiedades de los números combinatorios.

11. **Las torres de Hanoi**

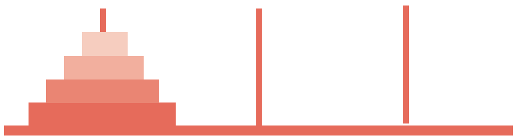
(Puedes jugar online en http://www.aulademate.com/contentid-99.html)

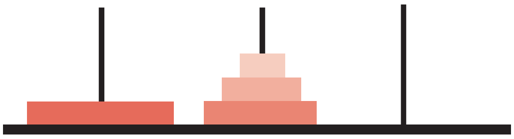
Objetivo: llevar los discos de la varilla izquierda a la varilla derecha.

Reglas del juego:

- **No se puede desplazar más de un disco en cada movimiento.**
- **Un disco sólo se puede apoyar sobre otro de diámetro mayor.**

Encuentra una regla que relacione el número de movimientos necesarios para resolver una torre de *n* discos habiendo ya resuelto una torre de *n* – 1 discos. Para ello comienza estudiando las torres más sencillas.





Si sólo hay un disco, no hay que hacer más que un movimiento para llevarlo a la varilla de la derecha. Si hay dos discos pasamos a formar una torre de un disco (el pequeño) en la varilla del medio y el grande lo pasamos a la varilla de la derecha. Poniendo encima el del medio hemos acabado en tres movimientos. Con tres discos deberemos conseguir una torre de dos discos en la varilla del medio (3 movimientos) pasar el disco grande a la varilla de la derecha (1 movimiento) y ya sin mover ese disco pasar la torre de dos discos encima de él (3 movimientos). Esta es la regla general, para la torre de cuatro, habrá que pasar por construir una torre de tres en la varilla central (7 movimientos) pasar el disco grande a la varilla de la derecha (1 movimiento) y traspasar la torre de tres encima (7 movimientos). Luego el número de movimientos para cambiar de varilla una torre de *n* discos, verifica la siguiente regla:

$T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 2T_{n-1} + 1$

Haciendo una tabla para distintos valores de n podemos encontrar la expresión de T_n en función de *n*.

Piezas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**	***n***
Movimientos	1	3	7	15	31		$2^n - 1$

Está demostrado que esta regla encontrada $T_n = 2T_{n-1} + 1 = 2^n - 1$ nos da el mínimo número de movimientos necesarios para resolver una torre de Hanoi de *n* discos. (La demostración se escapa del nivel en el que estamos trabajando)

12. **Las ranas saltarinas**

(Puedes jugar online en http://www.albinoblacksheep.com/flash/frog)

Objetivo: intercambiar la posición de las ranas.

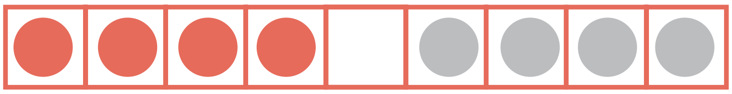
Reglas del juego:

· Una rana puede saltar al cuadrado contiguo o saltar por encima de otra rana al cuadrado siguiente si está libre.

· No se puede saltar por encima de más de una rana.

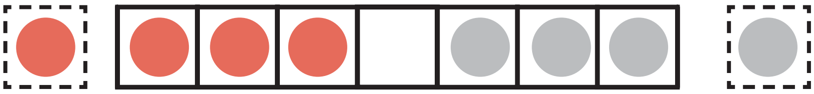
· Las ranas sólo pueden avanzar, nunca retroceder.

¿Cuántos movimientos son necesarios con 4 ranas de cada color? ¿Y con 100?

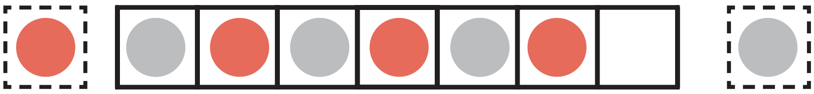


Tras jugar varias veces con 1, 2, 3, 4 y 5 ranas de cada color, es posible encontrar una pauta numérica en el número de movimientos: 3, 8, 15, 24, 35. Vemos que estos números aumentan sumando cada vez un impar consecutivo. Así 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 35, y el número de movimientos para n ranas de cada color resulta ser $(n + 1)^2 - 1$ (ver problema 3 de este epígrafe). Justifiquemos ahora esta serie numérica. En este juego, la estrategia, salvo simetría en el comienzo, es única y si queremos acabarlo es obligatorio seguir el camino mínimo. Fijémonos en la situación (1) con cuatro ranas de cada color. Necesariamente tenemos que pasar a la situación (2) sin haber tocado las ranas de los extremos. Ahora sí se empiezan a mover las ranas de los extremos, y tras $n + 1$ movimientos, se pasa a (3), y de (3) tras otros n movimientos se pasa a (4), donde nos encontramos con las 6 ranas centrales en la posición que las dejamos en (2). Ahora sólo hay que mover las fichas centrales para dejar tres grises a la izquierda y tres rojas a la derecha, sin tocar las esquinas ya fijadas. Ello quiere decir que las jugadas de (1) a (2) y de (4) en adelante solo atañen a 6 ranas y, por tanto, el número de movimientos con n ranas de cada color es igual a: $a_{n-1} + (n + 1) + n$.

(1)

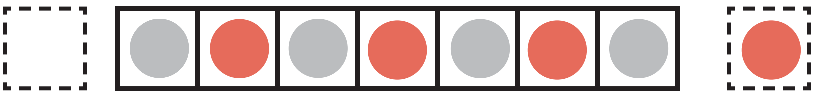


(2)



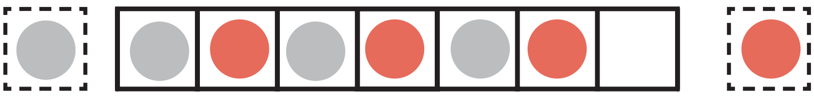
Tras $n + 1$ movimientos pasamos a (3):

(3)



Tras n movimientos llevamos una gris a la izquierda y llegamos a (4):

(4)



y nos encontramos en la posición de (2) con los extremos cambiados.

Así pues, $a_n = a_{n-1} + (2n + 1) = 3 + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) + (2 \cdot 4 + 1) + \ldots + (2n + 1) = n^2 + 2n =$
$= (n + 1)^2 - 1$.

Con cuatro ranas son necesarios 24 movimientos y 10200 para cien ranas de cada color.

DEP 4. Sistemas de numeración

1. **El sistema de numeración griego**

El primer sistema de numeración griego se desarrolló hacia el 600 A.C. Era un sistema de base decimal que usaba los símbolos de la figura siguiente para representar esas cantidades. Se utilizaban tantas de ellas como fuera necesario según el principio de las numeraciones aditivas.

Ι	𐅃	Δ	𐅄	Η	𐅅	Χ	𐅆	Μ
1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000

Para representar la unidad y los números hasta el 4 se usaban trazos verticales. Para el 5, 10, 100 y 1.000 las letras correspondientes a la inicial de la palabra cinco (*pente*), diez (*deka*), cien (*hekaton*) y mil (*khiloi*). Por este motivo se llama a este sistema acrofónico. Los símbolos de 50, 500 y 5000 se obtienen añadiendo el signo de 10, 100 y 1000 al de 5, usando un principio multiplicativo.

Por ejemplo, el número 3737 en el sistema de numeración griego es:

ΧΧΧ 𐅅 ΗΗ ΔΔΔ 𐅃ΙΙ

3000 + 500 + 200 + 30 + 5 + 2 = 3737

a) Escribe las siguientes cantidades en el sistema de numeración griego: 973, 2011, 27 548.

b) Expresa en este sistema de numeración los años de los siguientes acontecimientos históricos y el tiempo que transcurrió entre ambos:

El descubrimiento de América y la Revolución francesa.

a) 973 = 𐅅ΗΗΗΗ𐅄ΔΔΙΙΙ 2011 = ΧΧΔΙ

27 548 = ΜΜ𐅆ΧΧ𐅅ΔΔΔΔ𐅃ΙΙΙ

b) Descubrimiento de América: 1492 = ΧΗΗΗΗ𐅄ΔΔΔΔΙΙ

Revolución francesa: 1789 = Χ𐅅ΗΗ𐅄ΔΔΔ𐅃ΙΙΙΙ

1789 – 1492 = ΗΗ𐅄ΔΔΔΔ𐅃ΙΙ

2. **El sistema de numeración romano**

Es un sistema aditivo pero que también utiliza una notación substractiva. Para efectuar sumas y restas en este sistema es preciso eliminar la notación substractiva, para agregar (en el caso de la suma) o suprimir (en el caso de la resta) los símbolos de los operandos. Posteriormente se reducen los símbolos necesarios y si es preciso se vuelve a utilizar la notación substractiva.

Así por ejemplo para efectuar la suma 119 + 44 + 83, es decir, CXIX + XLIV + LXXXIII se procede de la siguiente manera:

Paso	Descripción	Ejemplo
1	**Eliminar la notación substractiva.**	CXIX + XLIV + LXXXIII ⟶ CXVIIII + XXXXIIII + LXXXIII
2	Concatenar los términos.	CXVIIIIXXXXIIIILXXXIII
3	Ordenar los numerales de mayor a menor.	CLXXXXXXXXVIIIIIIIIIII
4	Simplificar el resultado reduciendo símbolos.	CLLXXXVVVI ⟶ CCXXXXVI
5	Añadir notación substractiva	CCXXXXVI ⟶ CCXLVI
6	Solución.	CCXLVI

Y para efectuar la resta 116 – 24, es decir, CXVI – XXIV, se procede así:

Paso	Descripción	Ejemplo
1	Eliminar la notación substractiva.	CXVI – XXIV ⟶ CXVI - XXIIII
2	Eliminar los numerales comunes entre los términos.	CXVI – XXIIII ⟶ CV – XIII
3	Expandir los numerales del primer término hasta que aparezcan elementos del segundo.	CV – XIII ⟶ LLIIIII – XIII ⟶ LXXXXXIIIII – XIII
4	Repetir los pasos 2 y 3 hasta que el segundo término quede vacío.	LXXXXXIIIII – XIII ⟶ LXXXXII
5	Añadir notación substractiva.	LXXXXII ⟶ XCII
6	Solución.	XCII

Efectúa las siguientes operaciones con números romanos y comprueba después el resultado utilizando nuestro sistema de numeración decimal.

a) CDLXXIV + CCCXLVII + CCXCIX

b) CXLIV – LXXXIV

a) CDLXXIV + CCCXLVII + CCXCIX

CCCCLXXIIII + CCCXXXXVII + CCLXXXXVIIII ⟶

CCCCLXXIIIICCCXXXXVIICCLXXXXVIIII ⟶

CCCCCCCCCLLXXXXXXXXXXVVIIIIIIIIII ⟶ MCXX

b) CXLIV – LXXXIV ⟶ CXXXXIIII – LXXXIIII ⟶ LLXXXXIIII – LXXXIIII ⟶ LX

3. **Problemas aparentemente absurdos.**

a) La mitad de doce es siete.

b) El doble de 3 es 11.

c) Si 4 + 4 = 12 entonces 3 x 5 es igual a…

d) Si 8 x 8 = 54 entonces 4 x 5 es igual a…

e) Estas dos multiplicaciones son feas:

6 x 2 A 7 = F E A y 7 F 5 x 2 = F E A

Estos problemas no son tan absurdos como parecen: resulta que utilizan distintos sistemas de numeración en los que son perfectamente lógicos.

Averigua en cada uno de ellos el sistema en el que la respuesta tiene sentido.

a) $12_{(n} : 2 = 7_{(n} \leftrightarrow 12_{(n} = 2 \cdot 7_{(n} \leftrightarrow 1 \cdot n + 2 = 2 \cdot 7 \rightarrow n = 12$.

Se trata de un número escrito en base 12 y es: $12_{(12} = 14$ cuya mitad es 7.

b) $2 \cdot 3 = 11_{(n} \leftrightarrow 6 = n + 1 \rightarrow n = 5$ y efectivamente $2 \cdot 3 = 11_{(5} = 6$.

c) $4 + 4 = 12_{(n} \leftrightarrow 8 = n + 2 \leftrightarrow n = 6$. Entonces $3 \cdot 5 = 15 = 23_{(6}$.

d) Si $8 \cdot 8 = 54_{(n} \leftrightarrow 64 = 5n + 4 \leftrightarrow n = 12$. Estamos utilizando la base 12. Entonces $4 \cdot 5 = 18_{(12}$.

e) Utilizando el sistema hexadecimal tenemos que $2A7_{(16} = 2 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16 + 7 = 679$ y

$FEA_{(16} = 15 \cdot 162 + 14 \cdot 16 + 10 = 4074$ y efectivamente $6 \cdot 679 = 4074$.

Análogamente $7F5_{(16} = 7 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16 + 5 = 2037$ y efectivamente $2 \cdot 2037 = 4074$.

4. **Una pareja de novios escribe sus edades una a continuación de la otra, formando un número de 4 cifras que resulta ser un cuadrado perfecto, *k*². Once años más tarde repiten la operación, en el mismo orden, y ahora les vuelve a resultar otro número de 4 cifras, cuadrado de otro entero once unidades mayor que el entero *k* de la vez anterior. ¿Qué edad tenía cada uno de ellos cuando formaron el número *k*²?**

Sean las edades AB y CD, pues se supone que no pueden ser una de una cifra y la otra de tres. Entonces el número $ABCD = 1000A + 100B + 10C + D = k^2$ y el número que se obtiene 11 años después será:

$1000A + 100(B+11) + 10C + (D+11) = (k + 11)^2$.

Restando ambas expresiones se obtiene $1100 + 11 = 22k + 121 \rightarrow k = 45$, con lo que

$k^2 = 45^2 = 2025$ y las edades son 20 y 25 años. Al cabo de 11 años las edades serán 31 y 36 años formando el número $3136 = 56^2 = (45 + 11)^2$.

5. **El número secreto de la nueva tarjeta de crédito de Javier tiene 4 dígitos, y está formado por dos números de dos cifras, ordenados de mayor a menor.**

Estos son los dos únicos números de dos cifras que son iguales a la suma del cuadrado de la cifra de las decenas y el cubo de la cifra de las unidades.

¿Cuál es el número secreto de la tarjeta de Javier?

Sea $N = abcd$ el número que buscamos.
$10a + b = a^2 + b^3 \longrightarrow a(10 - a) = b^3 - b = b(b + 1)(b - 1)$
El máximo valor de $a(10 - a)$ se consigue para $a = 5$ y vale 25, y el mínimo (no nulo) es 9, que se obtiene para
$a = 1$ ó $a = 9$; por lo tanto, $8 < b(b + 1)(b - 1) < 26$.
El único valor de b que verifica esta condición es $b = 3$ y se obtiene $b(b + 1)(b - 1) = 24$ es decir,

$a(10 - a) = 24 \longrightarrow a = 4$ ó $a = 6$.
Los dos únicos números de dos cifras que verifican la condición pedida son: 43 y 63.

El número de tarjeta es el 6343.

6. **La expresión $abc_{(4}$ representa a un número de tres cifras escrito en base 4. Si se verifica que $abc_{(4}$ es el doble de $bca_{(4}$, calcula todas las posibilidades de los dígitos a, b y c y expresa esos números en la base decimal.**

$abc_{(4} = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 2 \cdot (b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + a) \longleftrightarrow 14a = 28b + 7c \leftrightarrow 2a = 4b + c$. Como el número es de tres cifras $a \neq 0$. La cifra b sólo puede tomar los valores 0 ó 1 ya que $a < 4$, pero para que sea de tres cifras b sólo puede ser 1.

Si $b = 1$ entonces $a = 2$ y $c = 0$ ó $a = 3$ y $c = 2$.

Las posibles respuestas son:

$210_{(4} = 36$ que verifica que es el doble de $102_{(4} = 18$

$312_{(4} = 54$ que verifica que es el doble de $123_{(4} = 27$.

7. **Los primeros 2010 enteros se han escrito en base 3. ¿Cuántos de ellos son capicúas?**

Expresamos el número 2010 en base tres.

Las potencias de tres menores que 2010 son: $3^6 = 729$, $3^5 = 243$, $3^4 = 81$, $3^3 = 27$, $3^2 = 9$, $3^1 = 3$ y $3^0 = 1$.

$2010 = 2 \cdot 729 + 2 \cdot 243 + 2 \cdot 2^7 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 = 2 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 =$
$= 2202110_{(3}$. Todos los capicúas pedidos serán menores que $2202110_{(3}$.

Capicúas de una cifra:	2	(1 y 2)
Capicúas de dos cifras:	2	(11 y 22)
Capicúas de tres cifras:	$2 \cdot 3 = 6$	(101, 111, 121, 202, 212, 222)
Capicúas de cuatro cifras:	$2 \cdot 3 = 6$	(1001, 1111, 1221, 2002, 2112, 2222)
Capicúas de cinco cifras:	$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$	(10001, 10101,…, 21212, 22222)
Capicúas de seis cifras:	$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$	(100001, 101101,…, 212212, 222222)
Capicúas de siete cifras:	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$	(hay que quitar seis: 2210122, 2211122, 2212122, 2220222, 2221222 y 2222222, que se pasan)

En total hay $2 + 2 + 6 + 6 + 18 + 18 + 48 = 100$.

8. **El número 1089 es tal que si lo multiplicamos por 9 se obtiene el número 9801. Observa que ambos números tienen los mismos dígitos pero su orden está invertido. Averigua qué número de cinco cifras tiene esta misma propiedad, es decir, que al multiplicarlo por 9 se obtiene un número que contiene las mismas cifras en orden inverso.**

Pretendemos hallar un número *abcde* tal que $9 \cdot abcde = edcba$.

Es evidente que $a = 1$ y $e = 9$, luego nos queda:

$9 \cdot (10\,000 + 1000 \cdot b + 100 \cdot c + 10 \cdot d + 9) = 90\,000 + 1000 \cdot d + 100 \cdot c + 10 \cdot b + 1 \longrightarrow$

$8990 \cdot b + 800 \cdot c + 80 = 910 \cdot d$. Necesariamente $b = 0$ y nos queda $80c + 8 = 91d \leftrightarrow$

$8(10c + 1) = 91d$, y como 8 y 91 son primos entre sí, $d = 8$ y $10c + 1 = 91 \longrightarrow c = 9$.

El número buscado es (10989) y se verifica que $9 \cdot (10989) = (98901)$.

9. **Los números de la siguiente suma están escritos en un sistema de numeración de base n) y cada letra representa un dígito. Letras distintas repre¬sentan dígitos distintos. Determina a qué digito corresponde cada letra. ¿Existe alguna base para la que no tenga solución?**

$$\begin{array}{r} A\,B\,C \\ A\,B \\ +\quad A \\ \hline 3\,0\,0 \end{array}$$

Al utilizar la cifra 3 es evidente que la base n ha de ser como mínimo 4.

Al llevarnos una unidad de la suma de las unidades de segundo orden, se deduce que $A + 1 = 3 \longrightarrow A = 2$.

Análogamente $B + A + 1 = n \longrightarrow B = n - 3$.

Finalmente $C + (n - 3) + 2 = n \longrightarrow C = 1$.

Si $n = 4$, entonces $B = 4 - 3 = 1 = C$, que no puede ser.

Si $n = 5$, entonces $B = 5 - 3 = 2 = A$ que no puede ser.

Por lo tanto $n \geq 6$.

Si $n = 6$: $A = 2$, $B = 3$, $C = 1$

Si $n = 7$: $A = 2$, $B = 4$, $C = 1$, etc.

10. **Un grupo de alumnos no tiene profesor y, aprovechando el momento, uno de los alumnos escribe en la pizarra un número de 6 cifras. Cuando llega el profesor de guardia, borra la primera cifra de la izquierda y la escribe al final del número, quedando así un número que es el triple del que había escrito el alumno.**

¿Qué número había escrito el alumno en la pizarra?

Si hubiera más de una posibilidad calcúlalas todas.

Sea $N = abcdef$ el número, entonces tenemos que $bcdefa = 3 \cdot abcdef$ y como los números están escritos en el sistema decimal se verificará:

$b \cdot 10^5 + c \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^2 + f \cdot 10 + a = 3 \cdot (a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 +$
$+ e \cdot 10 + f)$

Operando obtenemos:

$b(10^5 - 3 \cdot 10^4) + c(10^4 - 3 \cdot 10^3) + d(10^3 - 3 \cdot 10^2) + e(10^2 - 3 \cdot 10) + 7f = a(3 \cdot 10^5 - 1)$

$b \cdot 10^4(10 - 3) + c \cdot 10^3(10 - 3) + \ldots + 7f = 299999 \cdot a$

$7 \cdot (b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f) = 299999 \cdot a \longrightarrow$

$b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f = \dfrac{299999}{7} \cdot a = 42857 \cdot a$

Es decir, el número *bcdef* de 5 cifras es igual a $42857 \cdot a$ por lo que la cifra a solamente puede ser $a = 1$ ó $a = 2$.

Si $a = 1$ el número buscado es $N = 142857$; al mover la primera cifra se obtiene $3N = 428571$.

Si $a = 2$ el número buscado es $N = 285714$; al mover la primera cifra se obtiene $3N = 857142$.

Ampliación de Matemáticas 3º de ESO: Resolución de Problemas

Asociación Matemática Concurso de Primavera

La colección de problemas que en este libro se presenta, siguiendo el esquema de secuenciación en cuatro bloques, los mismos en los que se estructura el currículo de la asignatura, facilita el acceso a los distintos tipos de problemas de acuerdo con la necesidad del usuario, profesor o alumno, y además permite a cualquier estudiante trabajar con el libro de forma autónoma al contar con las soluciones de todos los problemas planteados.

El libro incluye CD con el contenido en versión electrónica del mismo.

La Suma de Todos

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

www.madrid.org

9 788445 133736